1節 確率分布

1 確率の基本性質

事象と確率

（教科書 p.80）

さいころを投げることのように，同じ条件のもとで何回もくり返すことができる実験や観察を（①　　　　　）といい，その結果として起こることがらを（②　　　　　）という。

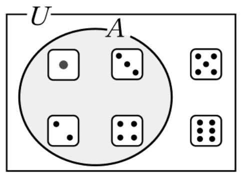
ある試行で起こり得るすべての結果が N 通りで，そのおのおのは同様に確からしいとする。そのうち，事象 A が起こる場合が a 通りのとき，事象 A の（③　　　　　）を $\frac{a}{N}$ で定め，（④　　　　　）で表す。すなわち

$$P(A)=\frac{a}{N}=$$

1 個のさいころを投げる試行では，起こり得るすべての結果は上の 6 通りで，これらの結果は同様に確からしいと考えられる。

例1 1 個のさいころを投げるとき，4 以下の目が出る事象 A の確率 $P(A)$ は，起こり得るすべての場合の数が 6 通りで，そのうち 4 以下の目が出るのが，1 の目，2 の目，3 の目，4 の目の 4 通りであるから

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$



問1 ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプから 1 枚引くとき，次の確率を求めなさい。

(1) ハートの札を引く確率

(2) 絵札を引く確率

◀絵札

数学Ａでは，次のことを学んでいる。

〔1〕 ある試行での事象 A について $0 \leqq P(A) \leqq 1$

〔2〕 事象 A と B が（⑤　　　　　）であるとき

$$\boldsymbol{P(A \cup B)=P(A)+P(B)}$$

〔3〕 事象 A の（⑥　　　　　）$\overline{A}$ について

$$\boldsymbol{P(\overline{A})=1-P(A)}$$

なお，〔2〕を確率の（⑦　　　　　）という。

◀ A と B が同時に起こらないとき排反事象という。

◀ $\overline{A}$ は A が起こらないという事象

◀ $P(A)=1-P(\overline{A})$ の形で使うこともある。

例2 赤球 2 個と白球 3 個の合計 5 個の球が入っている袋から，同時に 2 個の球を取り出すとき，2 個とも同じ色である確率を求めてみよう。

2 個とも赤球が出る事象を A，2 個とも白球が出る事象を B とすると

$P(A)=$　　　　　，　$P(B)=$

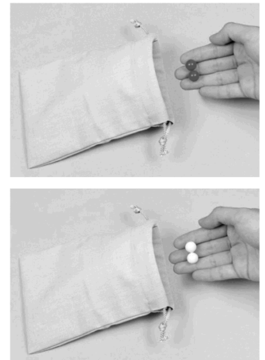
取り出した球が同じ色である事象は（　　　　　）であり，A と B は（　　　　　）であるから，求める確率は

◀ ${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

${}_2\mathrm{C}_2=\frac{2\times1}{2\times1}=1$

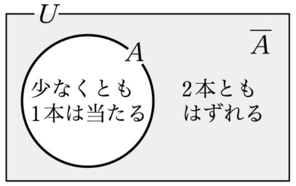
${}_3\mathrm{C}_2=\frac{3\times2}{2\times1}=3$

◀ 2 個とも同じ色



問2 赤球 4 個と白球 2 個の合計 6 個の球が入っている袋から，同時に 2 個の球を取り出すとき，2 個とも同じ色である確率を求めなさい。

例3 9 本のくじの中に当たりくじが 4 本ある。このくじを同時に 2 本引くとき，少なくとも 1 本は当たる確率を求めてみよう。



少なくとも 1 本は当たる事象を A とすると，その余事象 $\bar{A}$ は，2 本ともはずれるという事象になる。

事象 $\bar{A}$ が起こるのは，5 本のはずれくじから 2 本引くときであるから

$P(\bar{A}) =$

◀ ${}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$

${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

よって，求める確率 $P(A)$ は

$P(A) =$

問3 10 本のくじの中に当たりくじが 4 本ある。このくじを同時に 2 本引くとき，少なくとも 1 本は当たる確率を求めなさい。

2 確率分布

確率変数と確率分布

（教科書 p.82）

試行の結果によって値が定まる変数を（⑧　　　　　　　）という。

右の表のように，確率変数のとる値にその値をとる確率を対応させたものを，この確率変数 X の（⑨　　　　　　　）または単に（⑩　　　　　）という。また，確率変数 X は，この確率分布に（⑪　　　　　）という。

Xの値	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

一般に，次のことが成り立つ。

確率分布

確率変数 X のとる値が x_1，x_2，$\cdots$，x_n で，それらの値をとる確率 P が p_1，p_2，$\cdots$，p_n であるとき，X の確率分布は右の表のようになる。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

このとき，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ である。

例4 大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和を X とする。このとき，X は 2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12 の値をとる確率変数である。

X の確率分布は次の表のようになる。

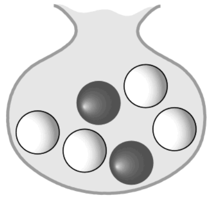
X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

２個のさいころの目の和

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

問4 1 枚の硬貨を 4 回投げるとき，表が出る回数を X とする。X の確率分布を求めなさい。

例題 1 赤球 2 個，白球 4 個が入った袋から，同時に 2 個の球を取り出すとき，その中に含まれている赤球の個数 X の確率分布を求めなさい。



解

問5 赤球 3 個，白球 5 個が入った袋から，同時に 3 個の球を取り出すとき，その中に含まれている赤球の個数 X の確率分布を求めなさい。

3 確率変数の平均

確率変数の平均

（教科書 p.84）

一般に，確率変数 X の確率分布が右の表のようになるとき

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

を確率変数 X の（⑫　　　　　）または（⑬　　　　　）といい，$\boldsymbol{E(X)}$ で表す。

◀ $E(X)$ の E は，期待値を意味する Expectation の頭文字である。

確率変数の平均
$\boldsymbol{E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}$

例5 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とすると，X は 1，2，3，4，5，6 の値をとる確率変数で

$$P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)$$

$$=P(X=6)=$$

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

であるから，X の平均 $E(X)$ は

$$E(X)=$$

問6 10 円硬貨 2 枚を同時に投げるとき，表が出る枚数を X とする。X の平均を求めなさい。

例題 2 2 本の当たりくじを含む 5 本のくじがある。この中から同時に 2 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数を X とする。X の確率分布と平均を求めなさい。

解

問7 2 本の当たりくじを含む 5 本のくじがある。この中から同時に 3 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数を X とする。X の確率分布と平均を求めなさい。

4 確率変数の分散・標準偏差

確率変数の分散

（教科書 p.86）

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

X は確率分布が右の表のようになる確率変数で，X の平均を m とするとき

$$(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n \quad \cdots\cdots①$$

を確率変数 X の（⑭　　　　　）といい，（⑮　　　　　）で表す。

確率変数の分散
$\boldsymbol{V(X)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n}$

例6 前ページの確率変数 X，Y において

$m=E(X)=E(Y)=3$

であるから，分散 $V(X)$，$V(Y)$ は次のようになる。

$V(X)=$

$V(Y)=$

よって，（　　　　　　　　）が成り立つ。

これは，Y の確率分布が X の確率分布より平均からの散らばりぐあいが（　　　　　　）ことを示している。

（教科書 p.87）

例題 3 10 円硬貨 2 枚を同時に投げるとき，表が出る枚数を X とする。X の分散を求めなさい。

◀10 円硬貨の表裏

◀$X=0$ とは 裏裏
$X=1$ とは 表裏，裏表
$X=2$ とは 表表

解

問8 10 円硬貨 3 枚を同時に投げるとき，表が出る枚数を X とする。X の分散を求めなさい。

分散の計算

（教科書 p.88）

分散は次の式でも計算することができる。

分散の計算
$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - m^2}$

◀ $m = E(X)$

例7 87 ページの例題 3 の確率変数 X の分散 $V(X)$ を確率変数 X^2 を利用して求めてみよう。

X の平均を m とすると

$m = E(X) = 1$

である。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

また，確率変数 X^2 の平均 $E(X^2)$ は

$E(X^2) =$

よって，分散 $V(X)$ は

$V(X) =$

問9 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とする。
X の分散 $V(X)$ を確率変数 X^2 の平均 $E(X^2)$ を利用して求めなさい。

確率変数の標準偏差 （教科書 p.89）

分散 $V(X)$ の正の平方根 $\sqrt{V(X)}$ を X の（⑯　　　　　　　）といい，
（⑰　　　　　）で表す。

確率変数の標準偏差
$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

例題 4 3 本の当たりくじを含む 5 本のくじがある。この中から同時に 2 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数を X とする。X の標準偏差を求めなさい。

解

問10 1 円硬貨 1 枚と 5 円硬貨 1 枚の計 2 枚を同時に投げ，表が出る硬貨の合計金額を X とするとき，X の標準偏差を求めなさい。

X	0	1	5	6	計
P					1

5 二項分布

（教科書 p.90）

一般に，1 回の試行で，事象 A が起こる確率を p とし，A が起こらない確率を $q=1-p$ とおく。この試行を n 回くり返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすれば，X は0，1，…，n の値をとる確率変数である。

また，$X=r$ となる確率は

$$\boldsymbol{P(X=r)=\,_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}} \qquad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

である。したがって X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	…	r	…	n	計
P	${}_n\mathrm{C}_0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1}$	…	${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$	…	${}_n\mathrm{C}_n p^n$	1

確率変数 X の確率分布が上の表のようになるとき，この確率分布を確率 p に対する次数 n の（⑱　　　　　　）という。また，このとき，確率変数 X は二項分布（⑲　　　　　　）という。

◀ $B(n,\ p)$ の B は，二項分布を意味する Binomial distribution の頭文字である。

二項分布 $\boldsymbol{B(n,\ p)}$ の確率
$\boldsymbol{P(X=r)=\,_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}} \qquad (q=1-p,\ r=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$

◀ 二項分布は，試行の回数 n と確率 p で定まる。

例8 1 枚の硬貨を 5 回くり返し投げる反復試行において，表が出る回数を確率変数 X とすると，X の確率分布は二項分布である。

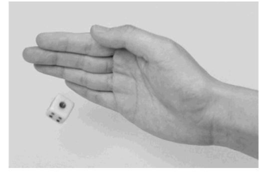
1 回の試行で表が出る確率は　$p=$

これを 5 回くり返すから　$n=$

よって，X は二項分布（　　　　　　）に従う。

問11 1 個のさいころを 8 回投げるとき，6 の目が出る回数を X とする。確率変数 X はどのような二項分布に従いますか。$B(n,\ p)$ の形で答えなさい。

例9 1 個のさいころを 4 回投げるとき，2 以下の目が出る回数を確率変数 X とすると，$n=4$，$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ であるから，X は二項分布（　$B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$　）に従う。



したがって，$X=r$ となる確率は

$P(X=r)=$　　　　　　　　$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

であるから，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P						1

◀ $P(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$
$P(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$
$P(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$
$P(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$
$P(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

問12 1 枚の硬貨を 3 回投げるとき，表が出る回数を X とする。X の確率分布を求めなさい。

二項分布の平均･分散･標準偏差

（教科書 p.92）

一般に，確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，次のことが成り立つ。

二項分布の平均，分散，標準偏差	
平均	$\boldsymbol{E(X)=np}$
分散	$\boldsymbol{V(X)=npq}$　　ただし，$q=1-p$
標準偏差	$\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{npq}}$

例10 確率変数 X が二項分布 $B\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$ に従うとき，X の平均，分散，標準偏差は

$E(X)=$

$V(X)=$

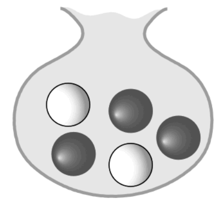
$\sigma(X)=$

問13 確率変数 X が次の二項分布に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めなさい。

(1)　$B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$

(2)　$B\left(8,\ \frac{1}{4}\right)$

例題 5 袋の中に赤球 3 個と白球 2 個が入っている。この袋の中から球を 1 個取り出し，色を調べてもとにもどす。これを 25 回くり返すとき，赤球を取り出す回数 X の平均，分散，標準偏差を求めなさい。



解

問14 袋の中に赤球 3 個と白球 1 個が入っている。この袋の中から球を1 個取り出し，色を調べてもとにもどす。
これを 80 回くり返すとき，赤球を取り出す回数 X の平均，分散，標準偏差を求めなさい。

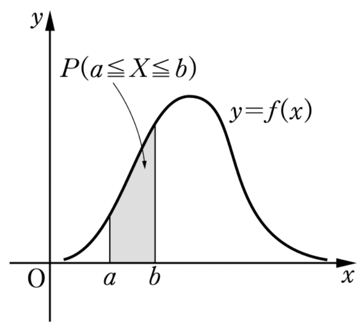
6 連続した値をとる確率変数の分布

（教科書 p.95）

一般に，連続的な値をとる確率変数を（⑳　　　　　　　　　　　　）という。

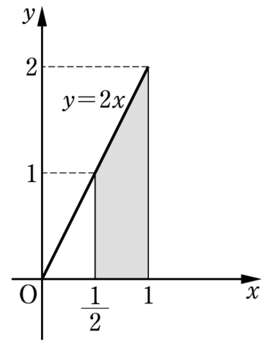
さらに，連続型確率変数X に対して，1 つの関数$y = f(x)$ が対応して，確率 $P(a \leqq X \leqq b)$ が右の図の色のついた部分の面積に等しいとき，関数 $f(x)$ を X の（㉑　　　　　　　　　），$y = f(x)$ のグラフをその（㉒　　　　　　　）という。

このとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間の面積は 1 である。



例11 $0 \leqq x \leqq 1$ に値をとる確率変数 X の確率密度関数が$f(x) = 2x$ であるとき，$\frac{1}{2} \leqq X \leqq 1$ となる確率を求めてみよう。
求める確率は右の図の色のついた部分の面積に等しいから

$$P\left(\frac{1}{2} \leqq X \leqq 1\right) =$$



問15 $0 \leqq x \leqq 2$ に値をとる確率変数 X の確率密度関数が$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ であるとき, 次の確率を求めなさい。

(1)　$P\left(0 \leqq X \leqq \frac{1}{2}\right)$

(2)　$P(1 \leqq X \leqq 2)$

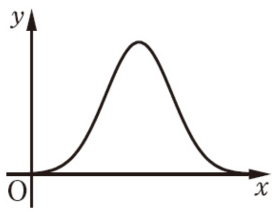
7 正規分布

正規分布

（教科書 p.96）

確率変数 X が右の図のような分布曲線をもち，その確率密度関数 $f(x)$ が，m，σ を定数として

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



と表されるとき，この確率分布を（㉓　　　　　　　　）という。また，このとき，確率変数 X は

（㉔　　　　　　　　　　　　）という。

ここで，π は円周率，e は自然対数の底とよばれる無理数である。

◀ $N(m,\ \sigma^2)$ の N は，正規分布を意味する Normal distribution の頭文字である。

◀無理数 e は $e=2.718281828459045\cdots$

正規分布について，次のことが知られている。

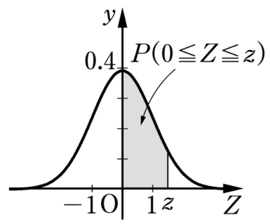
正規分布の平均と標準偏差
確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき 平均　$\boldsymbol{E(X)=m}$,　　標準偏差　$\boldsymbol{\sigma(X)=\sigma}$

標準正規分布

（教科書 p.97）

確率変数 Z が，平均 $m=0$，標準偏差 $\sigma=1$ の正規分布，すなわち $N(0,\ 1)$ に従うとき，この正規分布を（㉕　　　　　　　　）という。

このとき，確率変数 Z の分布曲線は右の図のようになる。



確率変数 Z が標準正規分布に従うとき，右の図の色のついた部分の面積は確率 $P(0\leqq Z\leqq z)$ に等しい。この値をまとめたものが，129 ページの正規分布表である。

標準正規分布の確率

科書 p.98）

例12 標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z について確率 $P(0\leqq Z\leqq 0.84)$ を求めてみよう。

正規分布表を用いて調べると

$P(0\leqq Z\leqq 0.84)=$

であることがわかる。

z	.03	.04	.05
0.6	.23565	.23891	.24215
0.7	.26730	.27035	.27337
0.8	.29673	.29955	.30234
0.9	.32381	.32639	.32894

問16 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。

(1)　$P(0\leqq Z\leqq 1)$

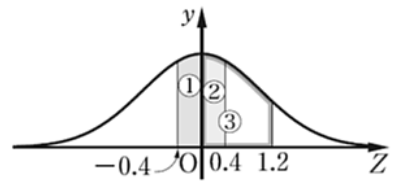
(2)　$P(0\leqq Z\leqq 1.96)$

例題 6 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。

(1)　$P(0.4\leqq Z\leqq 1.2)$

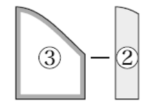
(2)　$P(-0.4\leqq Z\leqq 1.2)$

(3)　$P(0.4\leqq Z)$



解　(1)　$P(0.4\leqq Z\leqq 1.2)$

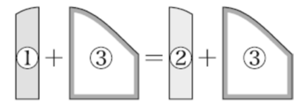
$=$



(2)　$P(-0.4\leqq Z\leqq 1.2)$

$=$

◀　$P(-0.4\leqq Z\leqq 0)$
$=P(0\leqq Z\leqq 0.4)$



(3)　$P(0.4\leqq Z)$

$=$

◀ $P(0\leqq Z)=0.5$

問17 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。 ➜p.103 復習問題④

(1)　$P(0.6\leqq Z\leqq 1.5)$

(2)　$P(-0.6\leqq Z\leqq 1.5)$

(3)　$P(Z\leqq 0.6)$

一般の正規分布の確率

（教科書 p.99）

確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

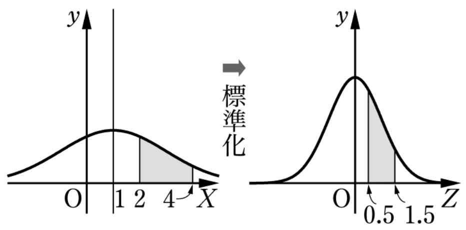
とすれば，Z は平均 0，標準偏差 1 の標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うことが知られている。このとき，Z を，X を（㉖　　　　　　　　　　　　）という。

X に関する確率は，$Z=\frac{X-m}{\sigma}$ を用いて X を標準化し，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ における Z の確率に変えることにより，求めることができる。

例13 確率変数 X が正規分布 $N(1,\ 2^2)$ に従うとき，$Z=\frac{X-1}{2}$ とすると，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。
このとき

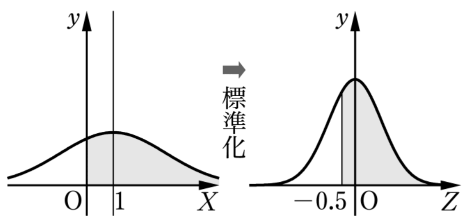
$P(2 \leqq X \leqq 4)$

$=$



$P(0 \leqq X)$

$=$



問18 確率変数 X が正規分布 $N(3,\ 5^2)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。

(1)　$P(3 \leqq X \leqq 7)$

(2)　$P(6 \leqq X \leqq 9)$

(3)　$P(0 \leqq X \leqq 5)$

(4)　$P(1 \leqq X)$

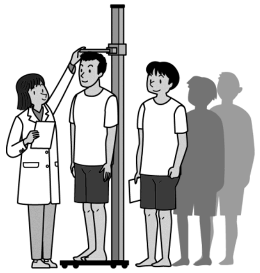
正規分布の利用

（教科書 p.100）

例題 7 ある高校の 1 年生男子の身長の分布は

平均 168cm，標準偏差 6cm

の正規分布とみなせるという。身長が 165cm 以上 174cm 以下の生徒は約何%いますか。



解

問19 例題 7 で身長が 180cm 以上の生徒は約何%いますか。

8 二項分布と標準正規分布

二項分布の正規分布による近似

（教科書 p.102）

二項分布の正規分布による近似
確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，n が十分に大きければ， $Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$ とする。

例題 8 1 個のさいころを 450 回投げるとき，3 の倍数の目が 148 回以上出る確率を求めなさい。

解

問20 1 個のさいころを 180 回投げるとき，1 の目が 36 回以上出る確率を求めなさい。

復　習　問　題

（教科書 p.103）

1 大小 2 個のさいころを同時に投げて，出る目の数が異なるときは，出る目の数の大きいほうから小さいほうをひいた差を X とし，出る目の数が等しいときは，$X = 0$ とする。このとき，X の確率分布を求めなさい。

2 1 から 5 までの番号を 1 つずつ書いた 5 枚のカードがある。この中から同時に 2 枚のカードを引くとき，引いたカードの番号の小さいほうを X とする。このとき，次の問に答えなさい。

（1） X の確率分布と平均を求めなさい。

⑵ X の分散と標準偏差を求めなさい。

3 2 本の当たりくじを含む 10 本のくじがある。このくじを引き，当たりはずれを調べてもとにもどす。これを100 回くり返すとき，当たりくじを引く回数 X の平均，分散，標準偏差を求めなさい。

4 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。

（1） $P(-1 \leqq Z \leqq 1)$

(2)　$P(-1.5 \leqq Z)$

5 確率変数 X が正規分布 $N\left(64,\ 2^2\right)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。

(1)　$P(X \leqq 68)$

(2)　$P(63 \leqq X \leqq 66)$

6 ある農場で生産されるニワトリの卵の重さの分布は

平均 60.4g，　標準偏差 9.6g

の正規分布とみなせるという。重さが 58g 以上 70g 以下の卵は約何%ありますか。

7 赤球 2 個と白球 3 個が入った袋から球を 1 個取り出し，色を調べてもとにもどす。これを 150 回くり返す。赤球を取り出す回数を X とするとき，次の確率を求めなさい。

(1) $P(X \leqq 48)$

(2) $P(66 \leqq X \leqq 72)$

1節　確率分布

1 確率の基本性質

事象と確率

（教科書 p.80）

　さいころを投げることのように，同じ条件のもとで何回もくり返すことができる実験や観察を（① 試行 ）といい，その結果として起こることがらを（② 事象 ）という。

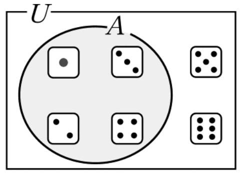
　ある試行で起こり得るすべての結果が N 通りで，そのおのおのは同様に確からしいとする。そのうち，事象 A が起こる場合が a 通りのとき，事象 A の（③ 確率 ）を $\frac{a}{N}$ で定め，（④ $P(A)$ ）で表す。すなわち

$$P(A)=\frac{a}{N}=\frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

1 個のさいころを投げる試行では，起こり得るすべての結果は上の 6 通りで，これらの結果は同様に確からしいと考えられる。

例1 1 個のさいころを投げるとき，4 以下の目が出る事象 A の確率 $P(A)$ は，起こり得るすべての場合の数が 6 通りで，そのうち 4 以下の目が出るのが，1 の目，2 の目，3 の目，4 の目の 4 通りであるから

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$



問1 ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプから 1 枚引くとき，次の確率を求めなさい。

(1)　ハートの札を引く確率

ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプから 1 枚引くとき，起こり得るすべての場合の数は 52 通りである。

ハートの札を引く場合の数は 13 通りであるから，求める確率 $P(A)$ は

$$P(A)=\frac{13}{52}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2)　絵札を引く確率

絵札を引く場合の数は 12 通りであるから，求める確率 $P(B)$ は

$$P(B)=\frac{12}{52}=\mathbf{\frac{3}{13}}$$

◀絵札

数学 A では，次のことを学んでいる。

〔1〕　ある試行での事象 A について　　$0 \leqq P(A) \leqq 1$

〔2〕　事象 A と B が（⑤ 排反事象 ）であるとき

$$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

〔3〕　事象 A の（⑥ 余事象 ）$\bar{A}$ について

$$\boldsymbol{P(\bar{A})=1-P(A)}$$

なお，〔2〕を確率の（⑦ 加法定理 ）という。

◀ A と B が同時に起こらないとき排反事象という。

◀ $\bar{A}$ は A が起こらないという事象

◀ $P(A)=1-P(\bar{A})$ の形で使うこともある。

例2 赤球 2 個と白球 3 個の合計 5 個の球が入っている袋から，同時に 2 個の球を取り出すとき，2 個とも同じ色である確率を求めてみよう。

2 個とも赤球が出る事象を A，2 個とも白球が出る事象を B とすると

$$P(A)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}\quad ,\quad P(B)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

取り出した球が同じ色である事象は（ 和事象 $A\cup B$ ）であり，

A と B は（ 排反事象 ）であるから，求める確率は

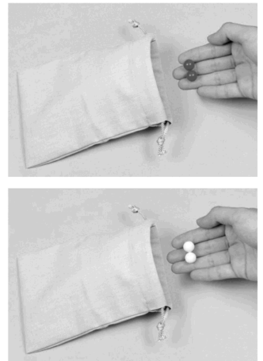
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}$$

◀ ${}_5C_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$

${}_2C_2=\frac{2\times 1}{2\times 1}=1$

${}_3C_2=\frac{3\times 2}{2\times 1}=3$

◀ 2 個とも同じ色



問2 赤球 4 個と白球 2 個の合計 6 個の球が入っている袋から，同時に 2 個の球を取り出すとき，2 個とも同じ色である確率を求めなさい。

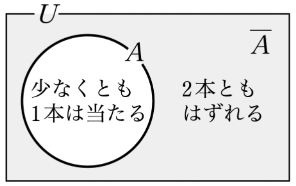
2 個とも赤球が出る事象を A，2 個とも白球が出る事象を B とすると

$$P(A)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{6}{15},\quad P(B)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

取り出した球が同じ色である事象は和事象 $A\cup B$ であり，A と B は排反事象であるから，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{6}{15}+\frac{1}{15}=\mathbf{\frac{7}{15}}$$

例3 9 本のくじの中に当たりくじが 4 本ある。このくじを同時に 2 本引くとき，少なくとも 1 本は当たる確率を求めてみよう。



少なくとも 1 本は当たる事象を A とすると，その余事象 $\bar{A}$ は，2 本ともはずれるという事象になる。

事象 $\bar{A}$ が起こるのは，5 本のはずれくじから 2 本引くときであるから

$$P(\bar{A}) = \frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

◀ ${}_9C_2 = \frac{9\times 8}{2\times 1} = 36$

${}_5C_2 = \frac{5\times 4}{2\times 1} = 10$

よって，求める確率 $P(A)$ は

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

問3 10 本のくじの中に当たりくじが 4 本ある。このくじを同時に 2 本引くとき，少なくとも 1 本は当たる確率を求めなさい。

少なくとも 1 本は当たる事象を A とすると，その余事象 $\bar{A}$ は，2 本ともはずれるという事象になる。

事象 $\bar{A}$ が起こるのは，6 本のはずれくじから 2 本引くときであるから

$$P(\bar{A}) = \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

よって，求める確率 $P(A)$ は

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

2 確率分布

確率変数と確率分布

（教科書 p.82）

試行の結果によって値が定まる変数を（⑧ 確率変数 ）という。

右の表のように，確率変数のとる値にその値をとる確率を対応させたものを，この確率変数 X の（⑨ 確率分布 ）または単に（⑩ 分布 ）という。また，確率変数 X は，この確率分布に（⑪ 従う ）という。

X の値	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

一般に，次のことが成り立つ。

確率分布

確率変数 X のとる値が x_1，x_2，…，x_n で，それらの値をとる確率 P が p_1，p_2，…，p_n であるとき，X の確率分布は右の表のようになる。

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

このとき，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ である。

例4 大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和を X とする。このとき，X は 2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12 の値をとる確率変数である。

X の確率分布は次の表のようになる。

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

2 個のさいころの目の和

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

問4 1 枚の硬貨を 4 回投げるとき，表が出る回数を X とする。X の確率分布を求めなさい。

X は 0，1，2，3，4 の値をとる確率変数である。

起こり得るすべての結果は $2^4 = 16$（通り）であり

$X = 0$ になるのは　${}_4C_0 = 1$（通り）

$X = 1$ になるのは　${}_4C_1 = 4$（通り）

$X = 2$ になるのは　${}_4C_2 = 6$（通り）

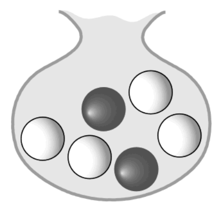
$X = 3$ になるのは　${}_4C_3 = 4$（通り）

$X = 4$ になるのは　${}_4C_4 = 1$（通り）

よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

例題 1 赤球 2 個，白球 4 個が入った袋から，同時に 2 個の球を取り出すとき，その中に含まれている赤球の個数 X の確率分布を求めなさい。



解 X は 0，1，2 の値をとる確率変数である。
$X=0$ となるのは 2 個とも白球を取り出すときであるから

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}$$

$X=1$ となるのは赤球と白球を 1 個ずつ取り出すときであるから

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$$

$X=2$ となるのは 2 個とも赤球を取り出すときであるから

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

よって，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

問5 赤球 3 個，白球 5 個が入った袋から，同時に 3 個の球を取り出すとき，その中に含まれている赤球の個数 X の確率分布を求めなさい。

Xは 0，1，2，3 の値をとる確率変数である。$X=0$ となるのは 3 個とも白球を取り出すときであるから

$$P(X=0)=\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\frac{10}{56}$$

$X=1$ となるのは赤球 1 個と白球 2 個を取り出すときであるから

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_5C_2}{{}_8C_3}=\frac{30}{56}$$

$X=2$ となるのは赤球 2 個と白球 1 個を取り出すときであるから

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_5C_1}{{}_8C_3}=\frac{15}{56}$$

$X=3$ となるのは 3 個とも赤球を取り出すときであるから

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56}$$

よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

3 確率変数の平均

確率変数の平均

（教科書 p.84）

一般に，確率変数 X の確率分布が右の表のようになるとき

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

を確率変数 X の（⑫ 平均 ）または（⑬ 期待値 ）といい，$\boldsymbol{E(X)}$ で表す。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

◀ $E(X)$のEは，期待値を意味する Expectation の頭文字である。

確率変数の平均

$$\boldsymbol{E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}$$

例5 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とすると，X は 1，2，3，4，5，6 の値をとる確率変数で

$$P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)$$
$$=P(X=6)=\frac{1}{6}$$

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

であるから，X の平均 $E(X)$ は

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

問6 10 円硬貨 2 枚を同時に投げるとき，表が出る枚数を X とする。X の平均を求めなさい。

X は 0，1，2 の値をとる確率変数で，硬貨の表裏の出方は
（表，表），（表，裏），（裏，表），（裏，裏）
の 4 通りであるから，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

したがって，X の平均 $E(X)$ は

$$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=\mathbf{1}$$

例題 2 2 本の当たりくじを含む 5 本のくじがある。この中から同時に 2 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数を X とする。X の確率分布と平均を求めなさい。

解 X のとる値は 0，1，2 である。

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

であるから，確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

したがって，平均 $E(X)$ は

$$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

問7 2 本の当たりくじを含む 5 本のくじがある。この中から同時に 3 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数を X とする。X の確率分布と平均を求めなさい。

X のとる値は 0，1，2 である。

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$$

であるから，確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

したがって，平均 $E(X)$ は

$$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\boldsymbol{\frac{6}{5}}$$

4 確率変数の分散・標準偏差

確率変数の分散

（教科書 p.86）

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

　X は確率分布が右の表のようになる確率変数で，X の平均を m とするとき

$$(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n \quad \cdots\cdots①$$

を確率変数 X の（⑭　分散　）といい，（⑮　$V(X)$　）で表す。

確率変数の分散
$\boldsymbol{V(X)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n}$

例6 前ページの確率変数 X，Y において

$$m=E(X)=E(Y)=3$$

であるから，分散 $V(X)$，$V(Y)$ は次のようになる。

$$V(X)=(1-3)^2\times0+(2-3)^2\times\frac{3}{10}+(3-3)^2\times\frac{4}{10}+(4-3)^2\times\frac{3}{10}+(5-3)^2\times0$$

$$=4\times0+1\times\frac{3}{10}+0\times\frac{4}{10}+1\times\frac{3}{10}+4\times0=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$V(Y)=(1-3)^2\times\frac{2}{10}+(2-3)^2\times\frac{2}{10}+(3-3)^2\times\frac{2}{10}+(4-3)^2\times\frac{2}{10}+(5-3)^2\times\frac{2}{10}$$

$$=4\times\frac{2}{10}+1\times\frac{2}{10}+0\times\frac{2}{10}+1\times\frac{2}{10}+4\times\frac{2}{10}=\frac{20}{10}=2$$

よって，（　$V(Y)>V(X)$　）が成り立つ。

これは，Y の確率分布が X の確率分布より平均からの散らばりぐあいが（　大きい　）ことを示している。

（教科書 p.87）

例題 3 10 円硬貨 2 枚を同時に投げるとき，表が出る枚数を X とする。X の分散を求めなさい。

◀10 円硬貨の表裏

解 X は 0，1，2 の値をとる確率変数で，その確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

◀$X=0$ とは 裏裏
$X=1$ とは 表裏，裏表
$X=2$ とは 表表

X の平均を m とすると

$$m=E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$$

よって，X の分散 $V(X)$ は

$$V(X)=(0-1)^2\times\frac{1}{4}+(1-1)^2\times\frac{2}{4}+(2-1)^2\times\frac{1}{4}$$

$$=1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{2}{4}+1\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{2}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

問8 10 円硬貨 3 枚を同時に投げるとき，表が出る枚数を X とする。X の分散を求めなさい。

X は 0，1，2，3 の値をとる確率変数で，その確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

X の平均を m とすると

$$m=E(X)$$

$$=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{3}{2}$$

よって，X の分散 $V(X)$ は

$$V(X)=\left(0-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{9}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}+\frac{9}{4}\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{24}{32}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

分散の計算

（教科書 p.88）

分散は次の式でも計算することができる。

分散の計算
$\boldsymbol{V(X)=E(X^2)-m^2}$

◀ $m=E(X)$

例7 87 ページの例題 3 の確率変数 X の分散 $V(X)$ を確率変数 X^2 を利用して求めてみよう。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

X の平均を m とすると

$$m=E(X)=1$$

である。

また，確率変数 X^2 の平均 $E(X^2)$ は

$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{2}{4}+2^2\times\frac{1}{4}$$

$$=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

よって，分散 $V(X)$ は

$$V(X)=E(X^2)-m^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$$

問9 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とする。

X の分散 $V(X)$ を確率変数 X^2 の平均 $E(X^2)$ を利用して求めなさい。

1 個のさいころを投げるとき，出る目の数 X は 1，2，3，4，5，6 の値をとる確率変数で，その確率分布は次の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

X の平均を m とすると

$$m=E(X)=\frac{7}{2}$$

である。

また，確率変数 X^2 の平均 $E(X^2)$ は

$$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}$$

$$=1\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+9\times\frac{1}{6}+16\times\frac{1}{6}+25\times\frac{1}{6}+36\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{91}{6}$$

$$V(X)=E(X^2)-m^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{35}{12}}$$

確率変数の標準偏差

（教科書 p.89）

分散 $V(X)$ の正の平方根 $\sqrt{V(X)}$ を X の（⑯ 標準偏差 ）といい，
（⑰ $\sigma(X)$ ）で表す。

確率変数の標準偏差
$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

例題 4 3 本の当たりくじを含む 5 本のくじがある。この中から同時に 2 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数を X とする。X の標準偏差を求めなさい。

解 X は 0，1，2 の値をとる確率変数で，確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

よって，X の平均を m とすると

$$m = E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$

である。

また，確率変数 X^2 の平均 $E(X^2)$ は

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{5}$$

ゆえに，X の分散 $V(X)$ は

$$V(X) = E(X^2) - m^2 = \frac{9}{5} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

したがって，X の標準偏差 $\sigma(X)$ は次のようになる。

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

問10 1 円硬貨 1 枚と 5 円硬貨 1 枚の計 2 枚を同時に投げ，表が出る硬貨の合計金額を X とするとき，X の標準偏差を求めなさい。

X	0	1	5	6	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

X は 0，1，5，6 の値をとる確率変数で，その確率分布は右の表のようになる。

よって，X の平均を m とすると

$$m = E(X)$$

$$= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{4} = 3$$

である。

また，確率変数 X^2 の平均 $E(X^2)$ は

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 5^2 \times \frac{1}{4} + 6^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{31}{2}$$

ゆえに，X の分散 $V(X)$ は

$$V(X) = E(X^2) - m^2 = \frac{31}{2} - 3^2 = \frac{13}{2}$$

したがって，X の標準偏差 $\sigma(X)$ は次のようになる。

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{13}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{26}}{2}}$$

5 二項分布

（教科書 p.90）

一般に，1 回の試行で，事象 A が起こる確率を p とし，A が起こらない確率を $q=1-p$ とおく。この試行を n 回くり返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすれば，X は0，1，…，n の値をとる確率変数である。

また，$X=r$ となる確率は

$$\boldsymbol{P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}} \quad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

である。したがって X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	…	r	…	n	計
P	${}_n\mathrm{C}_0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1}$	…	${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$	…	${}_n\mathrm{C}_n p^n$	1

確率変数 X の確率分布が上の表のようになるとき，この確率分布を確率 p に対する次数 n の（[18] 二項分布 ）という。また，このとき，確率変数 X は二項分布（[19] $B(n,\ p)$ に従う ）という。

◀ $B(n,\ p)$ の B は，二項分布を意味する Binomial distribution の頭文字である。

二項分布 $\boldsymbol{B(n,\ p)}$ の確率
$\boldsymbol{P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}} \quad (q=1-p,\ r=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$

◀二項分布は，試行の回数 n と確率 p で定まる。

例8 1 枚の硬貨を 5 回くり返し投げる反復試行において，表が出る回数を確率変数 X とすると，X の確率分布は二項分布である。

1 回の試行で表が出る確率は　$p=\frac{1}{2}$

これを 5 回くり返すから　$n=5$

よって，X は二項分布（ $B\left(5,\ \frac{1}{2}\right)$ ）に従う。

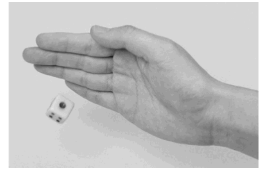
問11 1 個のさいころを 8 回投げるとき，6 の目が出る回数を X とする。確率変数 X はどのような二項分布に従いますか。$B(n,\ p)$ の形で答えなさい。

1 回の試行で 6 の目が出る確率は　$p=\frac{1}{6}$

これを 8 回くり返すから　$n=8$

よって，X は二項分布 $\boldsymbol{B\left(8,\ \frac{1}{6}\right)}$ に従う。

例9 1 個のさいころを 4 回投げるとき，2 以下の目が出る回数を確率変数 X とすると，



$n=4,\ p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ であるから，X は

二項分布（ $B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$ ）に従う。

したがって，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_4\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{4-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

◀ $P(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$
$P(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$
$P(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$
$P(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$
$P(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

であるから，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

問12 1 枚の硬貨を 3 回投げるとき，表が出る回数を X とする。X の確率分布を求めなさい。

1 回の試行で表が出る確率は　$P=\frac{1}{2}$

これを3回くり返すから　$n=3$

よって，確率変数 X は二項分布 $B\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

したがって，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_3\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{3-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

であるから，X の確率分布は次の表のようになる。

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	3	計
$\boldsymbol{P}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

二項分布の平均･分散･標準偏差

（教科書 p.92）

一般に，確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，次のことが成り立つ。

二項分布の平均，分散，標準偏差	
平均	$\boldsymbol{E(X) = np}$
分散	$\boldsymbol{V(X) = npq}$ ただし，$q = 1 - p$
標準偏差	$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq}}$

例10 確率変数 X が二項分布 $B\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$ に従うとき，X の平均，分散，標準偏差は

$$E(X) = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

$$V(X) = 9 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2}$$

問13 確率変数 X が次の二項分布に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めなさい。

(1) $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$

確率変数 X が二項分布 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$ に従うとき，X の平均，分散，標準偏差は

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{50}$$

$$V(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{25}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{25} = \boldsymbol{5}$$

(2) $B\left(8,\ \frac{1}{4}\right)$

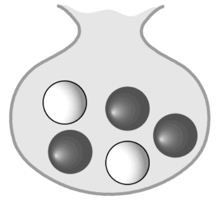
確率変数 X が二項分布 $B\left(8,\ \frac{1}{4}\right)$ に従うとき，X の平均，分散，標準偏差は

$$E(X) = 8 \times \frac{1}{4} = \boldsymbol{2}$$

$$V(X) = 8 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

例題 5 袋の中に赤球 3 個と白球 2 個が入っている。この袋の中から球を 1 個取り出し，色を調べてもとにもどす。これを 25 回くり返すとき，赤球を取り出す回数 X の平均，分散，標準偏差を求めなさい。



解 球を 1 個取り出すとき，それが赤球である確率は

$$p = \frac{3}{5}$$

これを 25 回くり返すから，$n = 25$ である。

よって，確率変数 X は二項分布 $B\left(25,\ \frac{3}{5}\right)$ に従う。

したがって，X の平均，分散，標準偏差は

$$E(X) = 25 \times \frac{3}{5} = \boldsymbol{15}$$

$$V(X) = 25 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \boldsymbol{6}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \boldsymbol{\sqrt{6}}$$

問14 袋の中に赤球 3 個と白球 1 個が入っている。この袋の中から球を1 個取り出し，色を調べてもとにもどす。
これを 80 回くり返すとき，赤球を取り出す回数 X の平均，分散，標準偏差を求めなさい。

球を 1 個取り出すとき，それが赤球である確率は

$$p = \frac{3}{4}$$

これを 80 回くり返すから，$n = 80$ である。

よって，確率変数 X は二項分布 $B\left(80,\ \frac{3}{4}\right)$に従う。

したがって，X の平均，分散，標準偏差は

$$E(X) = 80 \times \frac{3}{4} = \mathbf{60}$$

$$V(X) = 80 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \mathbf{15}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\mathbf{15}}$$

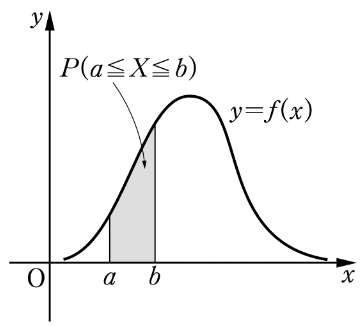
6 連続した値をとる確率変数の分布

（教科書 p.95）

一般に，連続的な値をとる確率変数を（⑳　連続型確率変数　）という。

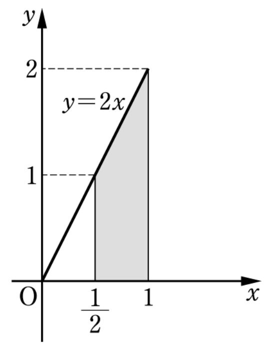
さらに，連続型確率変数X に対して，1 つの関数$y = f(x)$ が対応して，確率 $P(a \leqq X \leqq b)$ が右の図の色のついた部分の面積に等しいとき，関数 $f(x)$ を X の（㉑　確率密度関数　），$y = f(x)$ のグラフをその（㉒　分布曲線　）という。

このとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間の面積は 1 である。



例11 $0 \leqq x \leqq 1$ に値をとる確率変数 X の確率密度関数が$f(x) = 2x$ であるとき，$\frac{1}{2} \leqq X \leqq 1$ となる確率を求めてみよう。
求める確率は右の図の色のついた部分の面積に等しいから

$$P\left(\frac{1}{2} \leqq X \leqq 1\right) = (1 + 2) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$



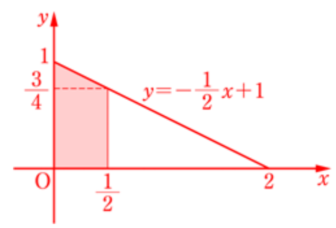
問15 $0 \leqq x \leqq 2$ に値をとる確率変数 X の確率密度関数が$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ であるとき，次の確率を求めなさい。

(1)　$P\left(0 \leqq X \leqq \frac{1}{2}\right)$

求める確率は，図の影をつけた部分の面積に等しいから

$$P\left(0 \leqq X \leqq \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

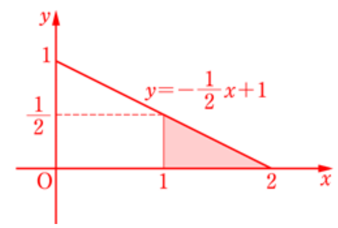
$$= \mathbf{\frac{7}{16}}$$



(2)　$P(1 \leqq X \leqq 2)$

求める確率は，図の影をつけた部分の面積に等しいから

$$P(1 \leqq X \leqq 2) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$



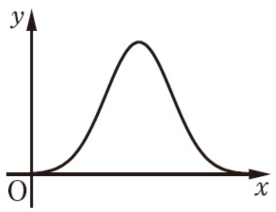
7 正規分布

正規分布

（教科書 p.96）

確率変数 X が右の図のような分布曲線をもち，その確率密度関数 $f(x)$ が，m，σ を定数として

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



◀ $N(m,\ \sigma^2)$ の N は，正規分布を意味する Normal distribution の頭文字である。
◀ 無理数 e は $e=2.718281828459045\cdots$

と表されるとき，この確率分布を（㉓ 正規分布 ）という。また，このとき，確率変数 X は
（㉔ 正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従う ）という。

ここで，π は円周率，e は自然対数の底とよばれる無理数である。

正規分布について，次のことが知られている。

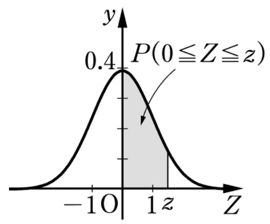
正規分布の平均と標準偏差
確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき 平均 $\boldsymbol{E(X)=m}$，　標準偏差 $\boldsymbol{\sigma(X)=\sigma}$

標準正規分布

（教科書 p.97）

確率変数 Z が，平均 $m=0$，標準偏差 $\sigma=1$ の正規分布，すなわち $N(0,\ 1)$ に従うとき，この正規分布を（㉕ 標準正規分布 ）という。

このとき，確率変数 Z の分布曲線は右の図のようになる。



確率変数 Z が標準正規分布に従うとき，右の図の色のついた部分の面積は確率 $P(0\leqq Z\leqq z)$ に等しい。この値をまとめたものが，129 ページの正規分布表である。

標準正規分布の確率

科書 p.98）

例12 標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z について確率 $P(0\leqq Z\leqq 0.84)$ を求めてみよう。

正規分布表を用いて調べると

$P(0\leqq Z\leqq 0.84)=0.29955$

であることがわかる。

z	.03	.04	.05
0.6	.23565	.23891	.24215
0.7	.26730	.27035	.27337
0.8	.29673	.29955	.30234
0.9	.32381	.32639	.32894

問16 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。

(1) $P(0\leqq Z\leqq 1)=\mathbf{0.34134}$

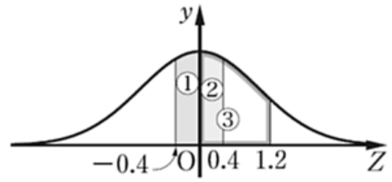
(2) $P(0\leqq Z\leqq 1.96)=\mathbf{0.47500}$

例題 6 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。

(1) $P(0.4\leqq Z\leqq 1.2)$

(2) $P(-0.4\leqq Z\leqq 1.2)$

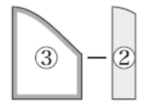
(3) $P(0.4\leqq Z)$



解 (1) $P(0.4\leqq Z\leqq 1.2)$

$=P(0\leqq Z\leqq 1.2)-P(0\leqq Z\leqq 0.4)$

$=0.38493-0.15542=\mathbf{0.22951}$



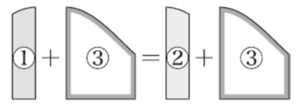
(2) $P(-0.4\leqq Z\leqq 1.2)$

$=P(-0.4\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1.2)$

$=P(0\leqq Z\leqq 0.4)+P(0\leqq Z\leqq 1.2)$

$=0.15542+0.38493=\mathbf{0.54035}$

◀ $P(-0.4\leqq Z\leqq 0)$ $=P(0\leqq Z\leqq 0.4)$



(3) $P(0.4\leqq Z)$

$=P(0\leqq Z)-P(0\leqq Z\leqq 0.4)$

$=0.5-0.15542=\mathbf{0.34458}$

◀ $P(0\leqq Z)=0.5$

問17 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。 ➜p.103 復習問題4

(1) $P(0.6\leqq Z\leqq 1.5)$

$=P(0\leqq Z\leqq 1.5)-P(0\leqq Z\leqq 0.6)$

$=0.43319-0.22575$

$=\mathbf{0.20744}$

(2) $P(-0.6\leqq Z\leqq 1.5)$

$=P(-0.6\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1.5)$

$=P(0\leqq Z\leqq 0.6)+P(0\leqq Z\leqq 1.5)$

$=0.22575+0.43319$

$=\mathbf{0.65894}$

(3) $P(Z\leqq 0.6)$

$=P(Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 0.6)$

$=0.5+0.22575$

$=\mathbf{0.72575}$

一般の正規分布の確率

（教科書 p.99）

確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

とすれば，Z は平均 0，標準偏差 1 の標準正規分布$N(0,\ 1)$ に従うことが知られている。このとき，Z を，X を（㉖ 標準化した確率変数 ）という。

X に関する確率は，$Z=\frac{X-m}{\sigma}$ を用いて X を標準化し，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ における Z の確率に変えることにより，求めることができる。

例13 確率変数 X が正規分布 $N(1,\ 2^2)$ に従うとき，$Z=\frac{X-1}{2}$ とすると，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

このとき

$P(2\leqq X\leqq 4)$

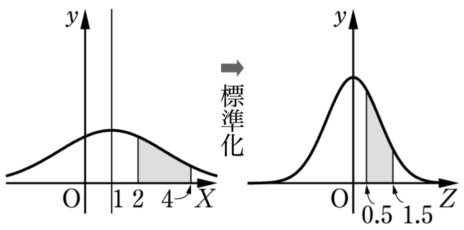
$=P\left(\frac{2-1}{2}\leqq Z\leqq\frac{4-1}{2}\right)$

$=P(0.5\leqq Z\leqq 1.5)$

$=P(0\leqq Z\leqq 1.5)-P(0\leqq Z\leqq 0.5)$

$=0.43319-0.19146$

$=0.24173$



$P(0\leqq X)$

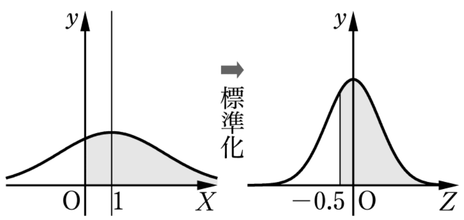
$=P\left(\frac{0-1}{2}\leqq Z\right)$

$=P(-0.5\leqq Z)$

$=0.5+P(0\leqq Z\leqq 0.5)$

$=0.5+0.19146$

$=0.69146$



問18 確率変数 X が正規分布 $N(3,\ 5^2)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。

(1) $P(3\leqq X\leqq 7)$

確率変数 X が正規分布 $N(3,\ 5^2)$ に従うとき，$Z=\frac{X-3}{5}$ とすると，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

$P(3\leqq X\leqq 7)$

$=P\left(\frac{3-3}{5}\leqq Z\leqq\frac{7-3}{5}\right)$

$=P(0\leqq Z\leqq 0.8)$

$=\mathbf{0.28814}$

(2) $P(6\leqq X\leqq 9)$

$=P\left(\frac{6-3}{5}\leqq Z\leqq\frac{9-3}{5}\right)$

$=P(0.6\leqq Z\leqq 1.2)$

$=P(0\leqq Z\leqq 1.2)-P(0\leqq Z\leqq 0.6)$

$=0.38493-0.22575$

$=\mathbf{0.15918}$

(3) $P(0\leqq X\leqq 5)$

$=P\left(\frac{0-3}{5}\leqq Z\leqq\frac{5-3}{5}\right)$

$=P(-0.6\leqq Z\leqq 0.4)$

$=P(-0.6\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 0.4)$

$=P(0\leqq Z\leqq 0.6)+P(0\leqq Z\leqq 0.4)$

$=0.22575+0.15542$

$=\mathbf{0.38117}$

(4) $P(1\leqq X)$

$=P\left(\frac{1-3}{5}\leqq Z\right)$

$=P(-0.4\leqq Z)$

$=P(-0.4\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z)$

$=P(0\leqq Z\leqq 0.4)+P(0\leqq Z)$

$=0.15542+0.5$

$=\mathbf{0.65542}$

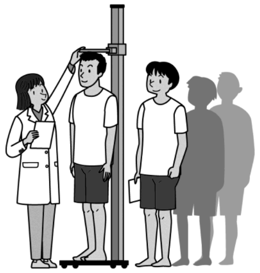
正規分布の利用

（教科書 p.100）

例題 7 ある高校の 1 年生男子の身長の分布は

平均 168cm，標準偏差 6cm

の正規分布とみなせるという。身長が 165cm 以上 174cm 以下の生徒は約何%いますか。



解 平均 168，標準偏差 6 の正規分布に従う確率変数を X とすれば，求める割合は確率 $P(165 \leqq X \leqq 174)$ である。$Z=\frac{X-168}{6}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって

$$\begin{aligned}P(165 \leqq X \leqq 174) &= P\left(\frac{165-168}{6} \leqq Z \leqq \frac{174-168}{6}\right)\\ &= P(-0.5 \leqq Z \leqq 1)\\ &= P(-0.5 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 1)\\ &= P(0 \leqq Z \leqq 0.5)+P(0 \leqq Z \leqq 1)\\ &= 0.19146+0.34134=0.53280\end{aligned}$$

したがって，身長が 165cm 以上 174cm 以下の生徒は約 **53**% います。

問19 例題 7 で身長が 180cm 以上の生徒は約何%いますか。

求める割合は確率 $P(180 \leqq X)$ である。

$$\begin{aligned}P(180 \leqq X) &= P\left(\frac{180-168}{6} \leqq Z\right)\\ &= P(2 \leqq Z)\\ &= P(0 \leqq Z)-P(0 \leqq Z \leqq 2)\\ &= 0.5-0.47725\\ &= 0.02275\end{aligned}$$

したがって，身長が 180 cm 以上の生徒は約**2 %**います。

8 二項分布と標準正規分布

二項分布の正規分布による近似　（教科書 p.102）

二項分布の正規分布による近似
確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，n が十分に大きければ， $Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$ とする。

例題 8　1 個のさいころを 450 回投げるとき，3 の倍数の目が 148 回以上出る確率を求めなさい。

解　3 の倍数の目が出る回数を X とすると, X は二項分布 $B\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$ に従う。X の平均 m と標準偏差 σ は

$$m=450\times\frac{1}{3}=150$$

$$\sigma=\sqrt{450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=10$$

である。
ここで，$n=450$ は十分に大きいから，$Z=\frac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとみなしてよい。
よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(148\leqq X)&=P\left(\frac{148-150}{10}\leqq Z\right)\\&=P(-0.2\leqq Z)\\&=P(-0.2\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z)\\&=P(0\leqq Z\leqq 0.2)+0.5\\&=0.07926+0.5=\mathbf{0.57926}\end{aligned}$$

問20　1 個のさいころを 180 回投げるとき，1 の目が 36 回以上出る確率を求めなさい。

1 の目が出る回数を X とすると, X は二項分布 $B\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。X の平均 m と標準偏差 σ は

$$m=180\times\frac{1}{6}=30$$

$$\sigma=\sqrt{180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=5$$

である。
ここで，$n=180$ は十分に大きいから，
$Z=\frac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとみなしてよい。
よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(36\leqq X)&=P\left(\frac{36-30}{5}\leqq Z\right)\\&=P(1.2\leqq Z)\\&=P(0\leqq Z)-P(0\leqq Z\leqq 1.2)\\&=0.5-0.38493\\&=\mathbf{0.11507}\end{aligned}$$

復 習 問 題

（教科書 p.103）

1 大小 2 個のさいころを同時に投げて，出る目の数が異なるときは，出る目の数の大きいほうから小さいほうをひいた差を X とし，出る目の数が等しいときは，$X=0$ とする。このとき，X の確率分布を求めなさい。

X は 0，1，2，3，4，5 の値をとる確率変数であり，大小のさいころの目の出方によって，その値は右の表のようになる。

小＼大	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

よって，その確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

2 1 から 5 までの番号を 1 つずつ書いた 5 枚のカードがある。この中から同時に 2 枚のカードを引くとき，引いたカードの番号の小さいほうを X とする。このとき，次の問に答えなさい。

(1) X の確率分布と平均を求めなさい。

X は 1，2，3，4 の値をとる確率変数である。

$X=1$ となるのは，1 のカードと，番号が 1 より大きい 2，3，4，5 のカード 4 枚のうち 1 枚を引くときであるから

$$P(X=1)=\frac{4}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{4}{10}$$

同様にして

$$P(X=2)=\frac{3}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=3)=\frac{2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{10}$$

$$P(X=4)=\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$$

よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

したがって，X の平均 m は

$$m=E(X)$$

$$=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}$$

$$=\mathbf{2}$$

(2) X の分散と標準偏差を求めなさい。

$$E(X^2)=1^2\times\frac{4}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{2}{10}+4^2\times\frac{1}{10}$$

$$=5$$

であるから，X の分散 $V(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ は

$$V(X)=E(X^2)-m^2=5-2^2=\mathbf{1}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1}=\mathbf{1}$$

3 2 本の当たりくじを含む 10 本のくじがある。このくじを引き，当たりはずれを調べてもとにもどす。これを100 回くり返すとき，当たりくじを引く回数 X の平均，分散，標準偏差を求めなさい。

くじを 1 本引くとき，それが当たる確率は

$$p=\frac{1}{5}$$

これを 100 回くり返すから，$n=100$ である。

よって，確率変数 X は二項分布 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$ に従う。

したがって，X の平均，分散，標準偏差は

$$E(X)=100\times\frac{1}{5}=\mathbf{20}$$

$$V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\mathbf{16}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{16}=\mathbf{4}$$

4 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。

(1) $P(-1\leqq Z\leqq 1)$

$=P(-1\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1)$

$=P(0\leqq Z\leqq 1)+P(0\leqq Z\leqq 1)$

$=0.34134+0.34134$

$=\mathbf{0.68268}$

(2) $P(-1.5 \leqq Z)$

$= P(-1.5 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1.5) + P(0 \leqq Z)$

$= 0.43319 + 0.5$

$= \mathbf{0.93319}$

5 確率変数 X が正規分布 $N(64,\ 2^2)$ に従うとき，次の確率を求めなさい。

(1) $P(X \leqq 68)$

$Z = \frac{X-64}{2}$ とすると，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

$P(X \leqq 68)$

$= P\left(Z \leqq \frac{68-64}{2}\right)$

$= P(Z \leqq 2)$

$= P(Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 2)$

$= 0.5 + 0.47725$

$= \mathbf{0.97725}$

(2) $P(63 \leqq X \leqq 66)$

$= P\left(\frac{63-64}{2} \leqq Z \leqq \frac{66-64}{2}\right)$

$= P(-0.5 \leqq Z \leqq 1)$

$= P(-0.5 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 0.5) + P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 0.19146 + 0.34134$

$= \mathbf{0.53280}$

6 ある農場で生産されるニワトリの卵の重さの分布は

平均 60.4g，　標準偏差 9.6g

の正規分布とみなせるという。重さが 58g 以上 70g 以下の卵は約何%ありますか。

平均 60.4，標準偏差 9.6 の正規分布に従う確率変数を X とすれば，求める割合は確率 $P(58 \leqq X \leqq 70)$ である。$Z = \frac{X-60.4}{9.6}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって

$P(58 \leqq X \leqq 70)$

$= P\left(\frac{58-60.4}{9.6} \leqq Z \leqq \frac{70-60.4}{9.6}\right)$

$= P(-0.25 \leqq Z \leqq 1)$

$= P(-0.25 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 0.25) + P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 0.09871 + 0.34134$

$= 0.44005$

したがって，重さが 58 g 以上 70 g 以下の卵は約 **44 %**あります。

7 赤球 2 個と白球 3 個が入った袋から球を 1 個取り出し，色を調べてもとにもどす。これを 150 回くり返す。赤球を取り出す回数を X とするとき，次の確率を求めなさい。

(1) $P(X \leqq 48)$

赤球を取り出す回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(150,\ \frac{2}{5}\right)$ に従う。

X の平均 m と標準偏差 σ は

$$m = 150 \times \frac{2}{5} = 60$$

$$\sigma = \sqrt{150 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}} = 6$$

である。
ここで，$n = 150$ は十分に大きいから，
$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとみなしてよい。

$$\begin{aligned} P(X \leqq 48) &= P\left(Z \leqq \frac{48-60}{6}\right) \\ &= P(Z \leqq -2) \\ &= P(2 \leqq Z) \\ &= P(0 \leqq Z) - P(0 \leqq Z \leqq 2) \\ &= 0.5 - 0.47725 \\ &= \mathbf{0.02275} \end{aligned}$$

(2) $P(66 \leqq X \leqq 72)$

$$\begin{aligned} &= P\left(\frac{66-60}{6} \leqq Z \leqq \frac{72-60}{6}\right) \\ &= P(1 \leqq Z \leqq 2) \\ &= P(0 \leqq Z \leqq 2) - P(0 \leqq Z \leqq 1) \\ &= 0.47725 - 0.34134 \\ &= \mathbf{0.13591} \end{aligned}$$