1節　数列

1　数列と一般項

数列　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（教科書Ｐ.6）

順序づけられた数の並びを（①　　　　　　）という。

並んでいるそれぞれの数を（②　　　　　）といい，初めから順に（③　　　　　　），（④　　　　　　），（⑤　　　　　　），…という。第１項は（⑥　　　　　）ともいう。

数の並びに限りがある数列では，項の個数を（⑦　　　　　　）といい，最後の項は（⑧　　　　　　）という。

例1 次の数列の初項は（　　　　　），末項は（　　　　　），項数は（　　　　　）である。

2，4，6，8，10，12

問1 次の数列の初項，末項，項数をいいなさい。

(1)　90，80，70，60，50

(2)　4，8，12，16，20，24，28

問2 次の数列の $\boxed{\quad}$ にあてはまる値を求めなさい。

(1)　1，3，$\boxed{\quad}$，7，9，11，13，…

(2)　5，10，20，40，$\boxed{\quad}$，160，320，…

(3)　1，4，9，$\boxed{\quad}$，25，36，…

数列を文字を使って表すときは，第何項であるかを示す番号を小さく添えて，次のように表す。

a_1，	a_2，	a_3，	…，	a_n，	…
第１項	第２項	第３項	…	第 n 項	…

◀第■項　$a_■$
同じ数

とくに，a_n は，（⑨　　　　　　），すなわち，初めから数えて n 番目の項を表す。

この数列を $\{a_n\}$ と書き表すことがある。

例2 第 n 項 a_n が

$$a_n = 2n + 3$$

と表される数列の

初項は　$a_1 = 2 \times$（　　　　）$+ 3 =$（　　　　）

第２項は　$a_2 = 2 \times$（　　　　）$+ 3 =$（　　　　）

第３項は　$a_3 = 2 \times$（　　　　）$+ 3 =$（　　　　）

……

◀$a_■ = 2 \times ■ + 3$
同じ数を代入

問3 第 n 項 a_n が次のように表される数列の，初項から第５項までを求めなさい。

(1)　$3n - 2$

(2)　2^n

数列の第 n 項を n の式で表したものを，その数列の（⑩　　　　　　）という。

例3 正の奇数を順に並べた数列

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots$

の一般項は

$a_n =$

である。

問4 正の偶数を順に並べた数列

$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \cdots$

の一般項 a_n を求めなさい。

2 等差数列

等差数列 （教科書P.8）

初項に一定の数を次々にたして得られる数列を（⑪ ）といい，たす一定の数を（⑫ ）という。

例4 ⑴ 等差数列 $5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29,\ \cdots$ の

初項は

公差は

⑵ 等差数列 $50,\ 35,\ 20,\ 5,\ -10,\ -25,\ \cdots$ の

初項は

公差は

問5 次の等差数列の初項と公差を求めなさい。

⑴ $9,\ 13,\ 17,\ 21,\ \cdots$

⑵ $15,\ 8,\ 1,\ -6,\ \cdots$

例5 等差数列 $5,\ \boxed{},\ 13,\ 17,\ \cdots$ の公差は

であるから，$\boxed{}$ にあてはまる数は

問6 次の等差数列の$\boxed{}$にあてはまる数を求めなさい。

(1) $16,\ \boxed{},\ 30,\ 37,\ \cdots$

(2) $\boxed{},\ 3,\ 1,\ -1,\ \cdots$

等差数列の一般項
初項 a，公差 d の等差数列の一般項は $\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$

例6 初項 2，公差 3 の等差数列の一般項は

$a_n =$

また，第 10 項は

$a_{10} =$

問7 次の等差数列の一般項を求めなさい。また，第 25 項を求めなさい。

(1) 初項 3，公差 2

(2) 初項 8，公差 -3

例題 1 初項 4，公差 3 の等差数列の一般項を求めなさい。
また，55 はこの数列の第何項ですか。

解

問8 初項 9，公差 7 の等差数列の一般項を求めなさい。 ➜p.19 復習問題1
また，121 はこの数列の第何項ですか。

例題 2 第 4 項が 14，第 10 項が 62 の等差数列の一般項を求めなさい。

解

◀はじめに初項と公差を求める。

問9 第 2 項が -17，第 5 項が 10 の等差数列の一般項を求めなさい。

等差数列の和

（教科書 P.11）

等差数列の和
初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S は $\boldsymbol{S=\frac{1}{2}n(a+l)}$

◀$\frac{1}{2}$×(項数)×(初項＋末項)

例7 等差数列 3，7，11，15，19，23 の和 S は，初項 3，末項 23，項数 6 であるから

$S=$

問 10 次の等差数列の和 S を求めなさい。

➜p.19 復習問題3

(1) 初項 7，末項 61，項数 10

(2) -11，-7，-3，1，5，9，13

例題 3 初項 6，公差 4 の等差数列の初項から第 20 項までの和 S を求めなさい。

解

問 11 初項 14，公差 -6 の等差数列の初項から第 15 項までの和 S を求めなさい。

一般に，初項 a，公差 d，項数 n のとき，等差数列の和 S を表す式は，次のようになる。

（⑬　　　　　　　　　　　　　　　　）

◀$S=\dfrac{1}{2}n(a+l)$ の l に $l=a+(n-1)d$ を代入する。

例8 初項 -20，公差 4，項数 13 の等差数列の和 S は

$S=$

問 12 次の等差数列の和 S を求めなさい。

(1)　初項 5，公差 7，項数 10

(2)　初項 23，公差 -9，項数 9

1 から n までの自然数 1，2，3，…，n の和は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから，次のようになる。

（⑭　　　　　　　　　　　　　　　　）

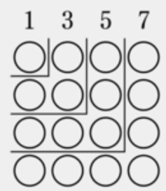
例9 $1+2+3+\cdots+10=$

問 13 1 から 100 までの自然数の和を求めなさい。

例 10 1 から始まる n 個の奇数 1，3，5，7，…，$2n-1$ の和は，初項 1，末項 $2n-1$，項数 n の等差数列の和であるから

$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=$

よって　$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=$



$1=1^2$
$1+3=2^2$
$1+3+5=3^2$
$1+3+5+7=4^2$

問 14 2 から始まる n 個の偶数の和 $2+4+6+8+\cdots+2n$ を求めなさい。

問 15 3 から始まる n 個の 3 の倍数の和 $3+6+9+12+\cdots+3n$ を求めなさい。

例題 4　次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。

$7,\ 13,\ 19,\ \cdots,\ 91$

解

問 16 次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。

$8,\ 15,\ 22,\ \cdots,\ 85$

3 等比数列

等比数列　（教科書 P.14）

初項に一定の数を次々にかけて得られる数列を（⑮　　　　　　）といい，かける一定の数を（⑯　　　　　）という。

例 11　(1)　等比数列 $4,\ 12,\ 36,\ 108,\ 324,\ \cdots$ の

初項は

公比は

◀ $4 \xrightarrow{\times 3} 12 \xrightarrow{\times 3} 36 \xrightarrow{\times 3} 108,\ \cdots$

(2)　等比数列 $48,\ 24,\ 12,\ 6,\ 3,\ \cdots$ の

初項は

公比は $24 \div 48 = \frac{1}{2}$

◀ $48 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 24 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 12 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 6,\ \cdots$

問 17 次の等比数列の初項と公比を求めなさい。

(1)　$5,\ 15,\ 45,\ 135,\ \cdots$

(2)　$54,\ 18,\ 6,\ 2,\ \cdots$

例 12 等比数列 $6,\ \boxed{},\ 54,\ 162,\ \cdots$ の公比は

であるから，$\boxed{}$ にあてはまる数は

問 18 次の等比数列の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。

（1） 14，$\boxed{}$，56，112，…

(2) $\boxed{}$，18，-54，162，…

等比数列の一般項
初項 a，公比 r の等比数列の一般項は $\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$

例 13 （1） 初項 2，公比 3 の等比数列の一般項は

$a_n =$

また，第 5 項は

$a_5 =$

(2) 初項 5，公比 -2 の等比数列の一般項は

$a_n =$

また，第 4 項は

$a_4 =$

問 19 次の等比数列の一般項を求めなさい。また，第 4 項を求めなさい。

（1） 初項 4，公比 5

(2) 初項 48，公比 $-\frac{1}{2}$

例題 5 初項 5，公比 3 の等比数列において，135 はこの数列の第何項ですか。

解

問 20 初項 3，公比 4 の等比数列において，768 はこの数列の第何項ですか。 ➔p.19 復習問題6

例題 6　第 2 項が 6，第 4 項が 24 の等比数列の一般項を求めなさい。

解

◀はじめに初項と公比を求める。

問 21 第 3 項が 36，第 5 項が 324 の等比数列の一般項を求めなさい。

等比数列の和

等比数列の和
初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S は $\boldsymbol{S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}}$　　ただし　$r \neq 1$

$r=1$ のときは，次のようになる。

$$S=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{個}}=na$$

例 14 (1)　初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 5 項までの和 S は

$S=$

(2)　初項 1，公比 -3 の等比数列の初項から第 4 項までの和 S は

$S=$

問 22 次の等比数列の和 S を求めなさい。 ➔p.19 復習問題8

(1)　初項 4，公比 3，項数 5

(2)　初項 1，公比 -2，項数 6

例 15 等比数列

$4,\ -12,\ 36,\ -108,\ \cdots$

の初項から第6項までの和 S は

初項　$a=$

公比　$r=$

項数　$n=$

であるから

$S=$

(2)　$2,\ -6,\ 18,\ -54,\ \cdots$ の初項から第5項まで

問 23 次の等比数列の和 S を求めなさい。 ➜p.19 復習問題9

(1)　$5,\ 10,\ 20,\ 40,\ \cdots$ の初項から第6項まで

問 24 1日目に100円，2日目に200円，3日目に400円というように，毎日，前日の2倍の金額を貯金していくと，10日目には貯金額は全部で何円になるか求めなさい。

復　習　問　題

（教科書 P.19）

1　初項 9，公差 4 の等差数列の一般項を求めなさい。また，57 はこの数列の第何項ですか。

2　第 7 項が 16，第 12 項が 41 の等差数列の一般項を求めなさい。

3　次の等差数列の和 S を求めなさい。

(1)　初項 -4，末項 41，項数 16

(2)　-15，-8，-1，6，13，20

4　初項 -13，公差 4 の等差数列の初項から第 11 項までの和 S を求めなさい。

5　次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。

17，13，9，…，-39

6　初項 7，公比 -3 の等比数列において，-189 はこの数列の第何項ですか。

7 第 2 項が 12，第 4 項が 192 の等比数列の一般項を求めなさい。

8 次の等比数列の和 S を求めなさい。

(1) 初項 3，公比 4，項数 5

(2) 初項 4，公比 -5，項数 4

9 次の等比数列の和 S を求めなさい。

(1) 4，-8，16，-32，… の初項から第 6 項まで

(2) 6，18，54，162，… の初項から第 5 項まで

1節　数列

1　数列と一般項

数列　（教科書 P.6）

順序づけられた数の並びを（[1]　数列　）という。

並んでいるそれぞれの数を（[2]　項　）といい，初めから順に（[3]　第1項　），（[4]　第2項　），（[5]　第3項　），…という。第1項は（[6]　初項　）ともいう。

数の並びに限りがある数列では，項の個数を（[7]　項数　）といい，最後の項は（[8]　末項　）という。

例1　次の数列の初項は（　2　），末項は（　12　），項数は（　6　）である。

2，4，6，8，10，12

問1　次の数列の初項，末項，項数をいいなさい。

(1)　90，80，70，60，50

初項 90，末項 50，項数 5

(2)　4，8，12，16，20，24，28

初項 4，末項 28，項数 7

問2　次の数列の $\boxed{}$ にあてはまる値を求めなさい。

(1)　1，3，$\boxed{5}$，7，9，11，13，…

(2)　5，10，20，40，$\boxed{80}$，160，320，…

(3)　1，4，9，$\boxed{16}$，25，36，…

数列を文字を使って表すときは，第何項であるかを示す番号を小さく添えて，次のように表す。

a_1,	a_2,	a_3,	…,	a_n,	…
第1項	第2項	第3項	…	第 n 項	…

◀第■項　$a_■$　同じ数

この数列を $\{a_n\}$ と書き表すことがある。

とくに，a_n は，（[9]　第 n 項　），すなわち，初めから数えて n 番目の項を表す。

例2　第 n 項 a_n が

$$a_n = 2n + 3$$

と表される数列の

初項は　$a_1 = 2 \times$（　1　）$+ 3 =$（　5　）

第2項は　$a_2 = 2 \times$（　2　）$+ 3 =$（　7　）

第3項は　$a_3 = 2 \times$（　3　）$+ 3 =$（　9　）

……

◀$a_■ = 2 \times ■ + 3$　同じ数を代入

問3　第 n 項 a_n が次のように表される数列の，初項から第5項までを求めなさい。

(1)　$3n - 2$

初項は　$a_1 = 3 \times 1 - 2 = \mathbf{1}$

第2項は　$a_2 = 3 \times 2 - 2 = \mathbf{4}$

第3項は　$a_3 = 3 \times 3 - 2 = \mathbf{7}$

第4項は　$a_4 = 3 \times 4 - 2 = \mathbf{10}$

第5項は　$a_5 = 3 \times 5 - 2 = \mathbf{13}$

(2)　2^n

初項は　$a_1 = 2^1 = \mathbf{2}$

第2項は　$a_2 = 2^2 = \mathbf{4}$

第3項は　$a_3 = 2^3 = \mathbf{8}$

第4項は　$a_4 = 2^4 = \mathbf{16}$

第5項は　$a_5 = 2^5 = \mathbf{32}$

数列の第 n 項を n の式で表したものを，その数列の（[10]　一般項　）という。

例3 正の奇数を順に並べた数列

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots$

の一般項は

$a_n = 2n - 1$

である。

問4 正の偶数を順に並べた数列

$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \cdots$

の一般項 a_n を求めなさい。

$a_n = 2n$

2 等差数列

等差数列　（教科書 P.8）

初項に一定の数を次々にたして得られる数列を（⑪　等差数列　）といい，たす一定の数を（⑫　公差　）という。

例4 (1)　等差数列 $5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29,\ \cdots$ の

初項は　5

公差は　$11 - 5 = 6$

(2)　等差数列 $50,\ 35,\ 20,\ 5,\ -10,\ -25,\ \cdots$ の

初項は　50

公差は　$35 - 50 = -15$

問5 次の等差数列の初項と公差を求めなさい。

(1)　$9,\ 13,\ 17,\ 21,\ \cdots$

初項は　9

公差は　$13 - 9 = 4$

(2)　$15,\ 8,\ 1,\ -6,\ \cdots$

初項は　15

公差は　$8 - 15 = -7$

例5 等差数列 $5,\ \boxed{},\ 13,\ 17,\ \cdots$ の公差は

$17 - 13 = 4$

であるから，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$5 + 4 = 9$

問6 次の等差数列の$\boxed{}$にあてはまる数を求めなさい。

(1)　16，$\boxed{}$，30，37，…

等差数列 16，$\boxed{}$，30，37，… の公差は

$37-30=7$

であるから，$\boxed{}$にあてはまる数は

$16+7=\mathbf{23}$

(2)　$\boxed{}$，3，1，-1，…

等差数列$\boxed{}$，3，1，-1，… の公差は

$1-3=-2$

であるから，$\boxed{}$にあてはまる数は

$3-(-2)=5$

等差数列の一般項
初項 a，公差 d の等差数列の一般項は $\boldsymbol{a_n=a+(n-1)d}$

例6 初項 2，公差 3 の等差数列の一般項は

$a_n=2+(n-1)\times 3=3n-1$

また，第 10 項は

$a_{10}=3\times 10-1=29$

問7 次の等差数列の一般項を求めなさい。また，第 25 項を求めなさい。

(1)　初項 3，公差 2

初項 3，公差 2 の等差数列の一般項は

$a_n=3+(n-1)\times 2=\mathbf{2n+1}$

また，第 25 項は

$a_{25}=2\times 25+1=\mathbf{51}$

(2)　初項 8，公差 -3

初項 8，公差 -3 の等差数列の一般項は

$a_n=8+(n-1)\times(-3)$

$=\mathbf{-3n+11}$

また，第 25 項は

$a_{25}=-3\times 25+11=\mathbf{-64}$

例題 1 初項 4，公差 3 の等差数列の一般項を求めなさい。

また，55 はこの数列の第何項ですか。

解 初項 4，公差 3 の等差数列の一般項は

$a_n=4+(n-1)\times 3$

より

$\boldsymbol{a_n=3n+1}$

また，55 がこの数列の第 n 項であるとすると

$3n+1=55$

よって　$n=18$

すなわち，55 は第 **18** 項である。

問8 初項 9，公差 7 の等差数列の一般項を求めなさい。 ➔p.19 復習問題1

また，121 はこの数列の第何項ですか。

初項 9，公差 7 の等差数列の一般項は

$a_n=9+(n-1)\times 7$

より

$\boldsymbol{a_n=7n+2}$

また，121 がこの数列の第 n 項であるとすると

$7n+2=121$

よって　$n=17$

すなわち，121 は第 **17** 項である。

例題 2　第 4 項が 14，第 10 項が 62 の等差数列の一般項を求めなさい。

解　初項を a，公差を d とおくと，一般項は

◀はじめに初項と公差を求める。

$a_n = a + (n-1)d$

第 4 項が 14 であるから　$a + 3d = 14$　……①

第 10 項が 62 であるから　$a + 9d = 62$　……②

②－①より　$6d = 48$

よって　$d = 8$

①に代入すると　$a + 3 \times 8 = 14$

よって　$a = -10$

したがって，一般項は

$a_n = -10 + (n-1) \times 8$

すなわち

$\boldsymbol{a_n = 8n - 18}$

問9　第 2 項が -17，第 5 項が 10 の等差数列の一般項を求めなさい。

初項を a，公差を d とおくと，一般項は

$a_n = a + (n-1)d$

第 2 項が -17 であるから

$a + d = -17$　……①

第 5 項が 10 であるから

$a + 4d = 10$　……②

②–①より　$3d = 27$

よって　$d = 9$

①に代入すると　$a + 9 = -17$

よって　$a = -26$

したがって，一般項は

$a_n = -26 + (n-1) \times 9$

すなわち

$\boldsymbol{a_n = 9n - 35}$

等差数列の和

（教科書 P.11）

等差数列の和
初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S は $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}n(a+l)}$

◀$\frac{1}{2}$×(項数)×(初項＋末項)

例7　等差数列 3，7，11，15，19，23 の和 S は，初項 3，末項 23，項数 6 であるから

$S = \frac{1}{2} \times 6 \times (3 + 23) = 78$

問 10　次の等差数列の和 S を求めなさい。

➜p.19 復習問題3

(1)　初項 7，末項 61，項数 10

$S = \frac{1}{2} \times 10 \times (7 + 61) = \mathbf{340}$

(2)　-11，-7，-3，1，5，9，13

初項 -11，末項 13，項数 7 であるから，その和 S は

$S = \frac{1}{2} \times 7 \times (-11 + 13) = \mathbf{7}$

例題 3　初項 6，公差 4 の等差数列の初項から第 20 項までの和 S を求めなさい。

解　初項 6，公差 4 の等差数列の一般項は

$a_n = 6 + (n-1) \times 4$

よって，第 20 項，すなわち，末項 l は

$l = 6 + (20-1) \times 4 = 82$

したがって　$S = \frac{1}{2} \times 20 \times (6 + 82) = \mathbf{880}$

問 11 初項 14，公差 −6 の等差数列の初項から第 15 項までの和 S を求めなさい。

初項 14，公差 −6 の等差数列の一般項は

$a_n = 14 + (n-1) \times (-6)$

よって，第 15 項，すなわち，末項 l は

$l = 14 + (15-1) \times (-6) = -70$

したがって

$$S = \frac{1}{2} \times 15 \times \{14 + (-70)\} = \mathbf{-420}$$

一般に，初項 a，公差 d，項数 n のとき，等差数列の和 S を表す式は，次のようになる。

(⑬　$S = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$　)

◀$S = \frac{1}{2}n(a+l)$ の l に $l = a + (n-1)d$ を代入する。

例8 初項 −20，公差 4，項数 13 の等差数列の和 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 13 \times \{2 \times (-20) + (13-1) \times 4\} = 52$$

問 12 次の等差数列の和 S を求めなさい。

(1)　初項 5，公差 7，項数 10

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times \{2 \times 5 + (10-1) \times 7\}$$
$$= \mathbf{365}$$

(2)　初項 23，公差 −9，項数 9

$$S = \frac{1}{2} \times 9 \times \{2 \times 23 + (9-1) \times (-9)\}$$
$$= \mathbf{-117}$$

1 から n までの自然数 1，2，3，…，n の和は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから，次のようになる。

(⑭　$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$　)

例9 $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \frac{1}{2} \times 10 \times (10+1) = 55$

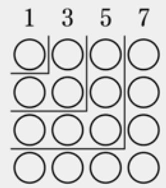
問 13 1 から 100 までの自然数の和を求めなさい。

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{1}{2} \times 100 \times (100+1)$$
$$= \mathbf{5050}$$

例 10 1 から始まる n 個の奇数 1，3，5，7，…，$2n-1$ の和は，初項 1，末項 $2n-1$，項数 n の等差数列の和であるから

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = \frac{1}{2}n\{1 + (2n-1)\}$$

よって　$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$



$1 = 1^2$
$1+3 = 2^2$
$1+3+5 = 3^2$
$1+3+5+7 = 4^2$

問 14 2 から始まる n 個の偶数の和 $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$ を求めなさい。

2 から始まる n 個の偶数の和は，初項 2，末項 $2n$，項数 n の等差数列の和であるから

$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

$$= \frac{1}{2}n(2 + 2n) = \boldsymbol{n(n+1)}$$

問 15 3 から始まる n 個の 3 の倍数の和 $3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 3n$ を求めなさい。

3 から始まる n 個の 3 の倍数の和は，初項 3，末項 $3n$，項数 n の等差数列の和であるから

$3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 3n$

$$= \frac{1}{2}n(3 + 3n) = \boldsymbol{\frac{3}{2}n(n+1)}$$

例題 4　次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。

$7,\ 13,\ 19,\ \cdots,\ 91$

解　初項 7，公差 6 であるから，一般項は

$a_n = 7 + (n-1) \times 6 = 6n + 1$

末項 91 が第 n 項であるとすると　$6n + 1 = 91$

よって　$n = 15$

したがって　$S = \frac{1}{2} \times 15 \times (7 + 91) = \mathbf{735}$

問 16 次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。

$8,\ 15,\ 22,\ \cdots,\ 85$

初項 8，公差 7 であるから，一般項は

$a_n = 8 + (n-1) \times 7 = 7n + 1$

末項 85 が第 n 項であるとすると

$7n + 1 = 85$

よって　$n = 12$

したがって　$S = \frac{1}{2} \times 12 \times (8 + 85) = \mathbf{558}$

3 等比数列

（教科書 P.14）

等比数列

初項に一定の数を次々にかけて得られる数列を（⑮　等比数列　）といい，かける一定の数を（⑯　公比　）という。

例 11　(1)　等比数列 $4,\ 12,\ 36,\ 108,\ 324,\ \cdots$ の

初項は　4

公比は　$12 \div 4 = 3$

◀ $4,\ 12,\ 36,\ 108,\ \cdots$　$\times 3$　$\times 3$　$\times 3$

(2)　等比数列 $48,\ 24,\ 12,\ 6,\ 3,\ \cdots$ の

初項は　48

公比は $24 \div 48 = \frac{1}{2}$

◀ $48,\ 24,\ 12,\ 6,\ \cdots$　$\times\frac{1}{2}$　$\times\frac{1}{2}$　$\times\frac{1}{2}$

問 17 次の等比数列の初項と公比を求めなさい。

(1)　$5,\ 15,\ 45,\ 135,\ \cdots$

等比数列 $5,\ 15,\ 45,\ 135,\ \cdots$ の

初項は　$\mathbf{5}$

公比は　$15 \div 5 = \mathbf{3}$

(2)　$54,\ 18,\ 6,\ 2,\ \cdots$

等比数列 $54,\ 18,\ 6,\ 2,\ \cdots$ の

初項は　$\mathbf{54}$

公比は　$18 \div 54 = \mathbf{\frac{1}{3}}$

例 12 等比数列 $6,\ \boxed{\quad},\ 54,\ 162,\ \cdots$ の公比は

$162 \div 54 = 3$

であるから，$\boxed{\quad}$ にあてはまる数は

$6 \times 3 = 18$

問 18 次の等比数列の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。

(1)　14, $\boxed{}$, 56, 112, …

等比数列 14, $\boxed{}$, 56, 112, …の公比は

$112 \div 56 = 2$

であるから, $\boxed{}$ にあてはまる数は

$14 \times 2 = \mathbf{28}$

(2)　$\boxed{}$, 18, -54, 162, …

等比数列 $\boxed{}$, 18, -54, 162, …の公比は

$(-54) \div 18 = -3$

であるから, $\boxed{}$ にあてはまる数は

$18 \div (-3) = \mathbf{-6}$

等比数列の一般項
初項 a, 公比 r の等比数列の一般項は $\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$

例 13 (1)　初項 2, 公比 3 の等比数列の一般項は

$a_n = 2 \times 3^{n-1}$

また, 第 5 項は

$a_5 = 2 \times 3^{5-1} = 2 \times 3^4 = 162$

(2)　初項 5, 公比 -2 の等比数列の一般項は

$a_n = 5 \times (-2)^{n-1}$

また, 第 4 項は

$a_4 = 5 \times (-2)^{4-1} = 5 \times (-2)^3 = -40$

問 19 次の等比数列の一般項を求めなさい。また, 第 4 項を求めなさい。

(1)　初項 4, 公比 5

初項 4, 公比 5 の等比数列の一般項は

$\boldsymbol{a_n = 4 \times 5^{n-1}}$

また, 第 4 項は

$a_4 = 4 \times 5^{4-1} = \mathbf{500}$

(2)　初項 48, 公比 $-\frac{1}{2}$

初項 48, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列の一般項は

$\boldsymbol{a_n = 48 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

また, 第 4 項は

$a_4 = 48 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{4-1} = \mathbf{-6}$

例題 5　初項 5, 公比 3 の等比数列において, 135 はこの数列の第何項ですか。

解　初項 5, 公比 3 の等比数列の一般項は

$a_n = 5 \times 3^{n-1}$

よって, 135 がこの数列の第 n 項であるとすると

$5 \times 3^{n-1} = 135$

$3^{n-1} = 27$

$3^3 = 27$ であるから　$3^{n-1} = 3^3$

よって, $n - 1 = 3$ より　$n = 4$

したがって, 135 は第 **4** 項である。

問 20 初項 3, 公比 4 の等比数列において, 768 はこの数列の第何項ですか。 ➜p.19 復習問題6

初項 3, 公比 4 の等比数列の一般項は

$a_n = 3 \times 4^{n-1}$

よって, 768 がこの数列の第 n 項であるとすると

$3 \times 4^{n-1} = 768$

$4^{n-1} = 256$

$4^4 = 256$ であるから　$4^{n-1} = 4^4$

よって, $n - 1 = 4$ より　$n = 5$

したがって, 768 は第 **5** 項である。

例題 6　第 2 項が 6，第 4 項が 24 の等比数列の一般項を求めなさい。

解　初項を a，公比を r とおくと，一般項は　$a_n = ar^{n-1}$

◀はじめに初項と公比を求める。

第 2 項が 6 であるから　　$ar = 6$　　……①

第 4 項が 24 であるから　　$ar^3 = 24$　　……②

②より　　$ar \times r^2 = 24$

①を代入すると　　$6 \times r^2 = 24$

よって　　$r^2 = 4$

したがって　　$r = \pm 2$

①より

$r = 2$ のとき　　$a = 3$

$r = -2$ のとき　　$a = -3$

したがって，一般項は

$\boldsymbol{a_n = 3 \times 2^{n-1}}$　または　$\boldsymbol{a_n = -3 \times (-2)^{n-1}}$

問 21　第 3 項が 36，第 5 項が 324 の等比数列の一般項を求めなさい。

初項を a，公比を r とおくと，一般項は

$a_n = ar^{n-1}$

第 3 項が 36 であるから

$ar^2 = 36$　　……①

第 5 項が 324 であるから

$ar^4 = 324$　　……②

②より　　$ar^2 \times r^2 = 324$

①を代入すると　　$36 \times r^2 = 324$

よって　　$r^2 = 9$

したがって　　$r = \pm 3$

①より

$r = 3$ のとき　　$a = 4$

$r = -3$ のとき　$a = 4$

したがって，一般項は

$\boldsymbol{a_n = 4 \times 3^{n-1}}$　または　$\boldsymbol{a_n = 4 \times (-3)^{n-1}}$

等比数列の和

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S は

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}\qquad ただし\quad r \neq 1$$

$r = 1$ のときは，次のようになる。

$$S = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n\,個} = na$$

例 14　(1)　初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 5 項までの和 S は

$$S = \frac{3 \times (2^5 - 1)}{2 - 1} = 3 \times (32 - 1) = 93$$

(2)　初項 1，公比 -3 の等比数列の初項から第 4 項までの和 S は

$$S = \frac{1 \times \{(-3)^4 - 1\}}{(-3) - 1} = \frac{81 - 1}{-3 - 1} = \frac{80}{-4} = -20$$

問 22　次の等比数列の和 S を求めなさい。 ➜p.19 復習問題8

(1)　初項 4，公比 3，項数 5

初項 4，公比 3，項数 5 の等比数列の和 S は

$$S = \frac{4 \times (3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{4 \times (243 - 1)}{2}$$

$$= \boldsymbol{484}$$

(2)　初項 1，公比 -2，項数 6

初項 1，公比 -2，項数 6 の等比数列の和 S は

$$S = \frac{1 \times \{(-2)^6 - 1\}}{(-2) - 1}$$

$$= \frac{64 - 1}{-3}$$

$$= \boldsymbol{-21}$$

例 15 等比数列

4，　− 12，36，　− 108，　…

の初項から第 6 項までの和 S は

初項　$a = 4$

公比　$r = (-12) \div 4 = -3$

項数　$n = 6$

であるから

$$S = \frac{4 \times \{(-3)^6 - 1\}}{(-3) - 1}$$

$$= \frac{4 \times (729 - 1)}{-3 - 1}$$

$$= \frac{4 \times 728}{-4}$$

$$= -728$$

(2)　2，　− 6，18，　− 54，… の初項から第 5 項まで

等比数列

2，　− 6，18，　− 54，　…

の初項から第 5 項までの和 S は

初項　$a = 2$

公比　$r = (-6) \div 2 = -3$

項数　$n = 5$

であるから

$$S = \frac{2 \times \{(-3)^5 - 1\}}{(-3) - 1}$$

$$= \frac{2 \times (-243 - 1)}{-4}$$

$$= \mathbf{122}$$

問 23 次の等比数列の和 S を求めなさい。 ➜p.19 復習問題 9

(1)　5，10，20，40，… の初項から第 6 項まで

等比数列

5，10，20，40，…

の初項から第 6 項までの和 S は

初項　$a = 5$

公比　$r = 10 \div 5 = 2$

項数　$n = 6$

であるから

$$S = \frac{5 \times (2^6 - 1)}{2 - 1}$$

$$= 5 \times (64 - 1)$$

$$= \mathbf{315}$$

問 24 1 日目に 100 円，2 日目に 200 円，3 日目に 400 円というように，毎日，前日の 2 倍の金額を貯金していくと，10 日目には貯金額は全部で何円になるか求めなさい。

貯金額は，初項 100，公比 2 の等比数列の初項から第 10 項までの和であるから

$$\frac{100 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 100 \times (1024 - 1)$$

$$= \mathbf{102300}\ (円)$$

復　習　問　題

（教科書 P.19）

1 初項 9，公差 4 の等差数列の一般項を求めなさい。また，57 はこの数列の第何項ですか。

初項 9，公差 4 の等差数列の一般項は

$a_n = 9 + (n-1) \times 4$

より

$\boldsymbol{a_n = 4n + 5}$

また, 57 がこの数列の第 n 項であるとすると

$4n + 5 = 57$

よって　$n = 13$

すなわち，57 は第 **13** 項である。

2 第 7 項が 16，第 12 項が 41 の等差数列の一般項を求めなさい。

初項を a，公差を d とおくと，一般項は

$a_n = a + (n-1)d$

第 7 項が 16 であるから

$a + 6d = 16$　……①

第 12 項が 41 であるから

$a + 11d = 41$　……②

②−①より　$5d = 25$

よって　$d = 5$

①に代入すると　$a + 6 \times 5 = 16$

よって　$a = -14$

したがって，一般項は

$a_n = -14 + (n-1) \times 5$

すなわち

$\boldsymbol{a_n = 5n - 19}$

3 次の等差数列の和 S を求めなさい。

(1)　初項 −4，末項 41，項数 16

$$S = \frac{1}{2} \times 16 \times (-4 + 41) = \mathbf{296}$$

(2)　−15，−8，−1，6，13，20

初項 −15，末項 20，項数 6 の等差数列であるから，その和 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times (-15 + 20) = \mathbf{15}$$

4 初項 −13，公差 4 の等差数列の初項から第 11 項までの和 S を求めなさい。

初項 −13，公差 4 の等差数列の一般項は

$a_n = -13 + (n-1) \times 4$

よって，第 11 項，すなわち，末項 l は

$l = -13 + (11-1) \times 4 = 27$

したがって

$$S = \frac{1}{2} \times 11 \times (-13 + 27) = \mathbf{77}$$

5 次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。

17，13，9，…，−39

初項 17，公差 −4 であるから，一般項は

$a_n = 17 + (n-1) \times (-4) = -4n + 21$

末項 −39 が第 n 項であるとすると

$-4n + 21 = -39$

よって　$n = 15$

したがって

$$S = \frac{1}{2} \times 15 \times \{17 + (-39)\} = \mathbf{-165}$$

6 初項 7，公比 −3 の等比数列において，−189 はこの数列の第何項ですか。

初項 7，公比 −3 の等比数列の一般項は

$a_n = 7 \times (-3)^{n-1}$

よって，−189 がこの数列の第 n 項であるとすると

$7 \times (-3)^{n-1} = -189$

$(-3)^{n-1} = -27$

$(-3)^3 = -27$ であるから

$(-3)^{n-1} = (-3)^3$

よって，$n - 1 = 3$ より　$n = 4$

したがって，−189 は第 **4** 項である。

7 第 2 項が 12，第 4 項が 192 の等比数列の一般項を求めなさい。

初項を a，公比を r とおくと，一般項は

$a_n = ar^{n-1}$

第 2 項が 12 であるから

$ar = 12$ ……①

第 4 項が 192 であるから

$ar^3 = 192$ ……②

②より　$ar \times r^2 = 192$

①を代入すると　$12 \times r^2 = 192$

よって　$r^2 = 16$

したがって　$r = \pm 4$

①より

$r = 4$ のとき　$a = 3$

$r = -4$ のとき　$a = -3$

したがって，一般項は

$\boldsymbol{a_n = 3 \times 4^{n-1}}$　または　$\boldsymbol{a_n = -3 \times (-4)^{n-1}}$

8 次の等比数列の和 S を求めなさい。

(1)　初項 3，公比 4，項数 5

$$S = \frac{3 \times (4^5 - 1)}{4 - 1} = \frac{3 \times (1024 - 1)}{3} = \mathbf{1023}$$

(2)　初項 4，公比 −5，項数 4

$$S = \frac{4 \times \{(-5)^4 - 1\}}{(-5) - 1} = \frac{4 \times (625 - 1)}{-6} = \mathbf{-416}$$

9 次の等比数列の和 S を求めなさい。

(1)　4，−8，16，−32，… の初項から第 6 項まで

等比数列

4，−8，16，−32，…

の初項から第 6 項までの和 S は

初項　$a = 4$

公比　$r = (-8) \div 4 = -2$

項数　$n = 6$

であるから

$$S = \frac{4 \times \{(-2)^6 - 1\}}{(-2) - 1}$$

$$= \frac{4 \times (64 - 1)}{-3}$$

$$= \mathbf{-84}$$

(2)　6，18，54，162，… の初項から第 5 項まで

等比数列

6，18，54，162，…

の初項から第 5 項までの和 S は

初項　$a = 6$

公比　$r = 18 \div 6 = 3$

項数　$n = 5$

であるから

$$S = \frac{6 \times (3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{6 \times (243 - 1)}{2}$$

$$= \mathbf{726}$$