新数学Ｂ　P.040

1 節　平面上のベクトル

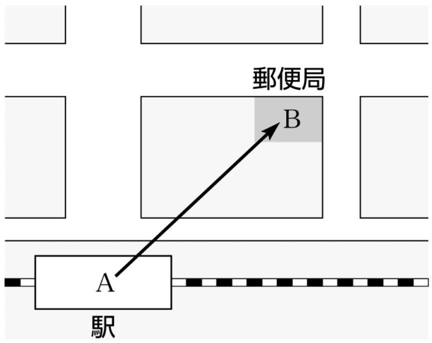
1　有向線分とベクトル

ねらい　風の状態は，「南西の風，風力２」のように，向きと大きさで表されます。
ここでは，このような向きと大きさをもつ量について考えます。

有向線分

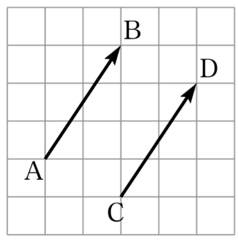
右の地図で，駅から郵便局までの移動は，線分 AB に向きを示す矢印をつけて表すことができる。すなわち，矢印の向きが移動の向きを，線分の長さが移動の大きさを表している。

このような向きのついた線分を**有向線分**という。また，有向線分 AB において，A を**始点**，B を**終点**という。



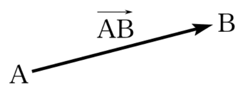
ベクトル

右の図で，2 つの有向線分 AB，CD の表す移動は，その向きと大きさが一致しているので，同じ移動であるとみなすことができる。

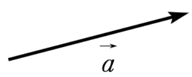


有向線分について，その位置を問題にしないで，向きと長さだけに着目したものを**ベクトル**という。

A を始点，B を終点とする
有向線分 AB の表すベクトルを $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ と表す。また，有向線分 AB の長さを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**大きさ**といい，$\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|$ と表す。



ベクトルは，1 つの文字に矢印をつけて，$\vec{a}$ のように表すこともある。このとき，$\vec{a}$ の大きさを $|\vec{a}|$ と表す。



新数学 B　P.041

等しいベクトルと逆ベクトル

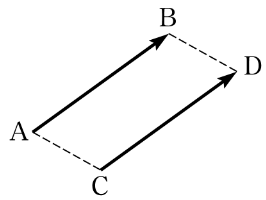
　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，向きが同じで，大きさが等しいとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**等しい**といい

$$\boldsymbol{\vec{a}} = \boldsymbol{\vec{b}}$$

と表す。また

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

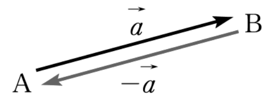
ということは，有向線分 AB を平行移動して有向線分 CD に重ねることができるということである。



　ベクトル $\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが等しいベクトルを，$\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\boldsymbol{\vec{a}}$ と表す。したがって

$$\overrightarrow{\mathbf{BA}} = -\overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

である。



●等しいベクトルと逆ベクトルを求めてみよう。

例 1　右の図の平行四辺形 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に等しいベクトルは

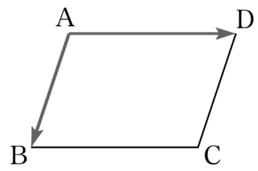
$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の逆ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}},\ \overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

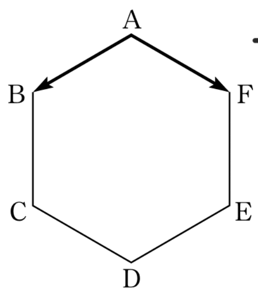
である。



問 1　右の図の正六角形 ABCDEF の頂点を始点，終点とするベクトルを考える。次のベクトルを答えなさい。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に等しいベクトル

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ の逆ベクトル



➔p.49 復習問題1(1)，(2)

2　ベクトルの計算

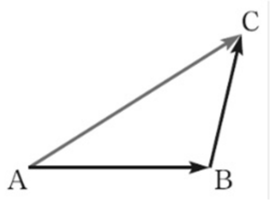
ねらい　2 つのベクトルをたすことや，ベクトルからベクトルをひくこと，ベクトルを実数倍することを学びます。

ベクトルの和

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に対して
その和を

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}$$

と定める。



問 2　上の図において，次の和を求めなさい。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

一般に，2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の和は次のようになる。

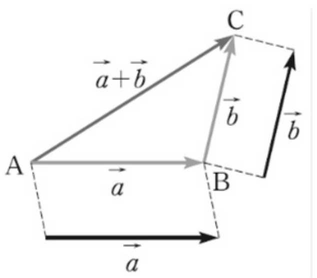
まず 1 つの点 A をとり，次に

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，　$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

となるように点 B，C をとる。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和**を表している。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和を $\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}$ と表す。

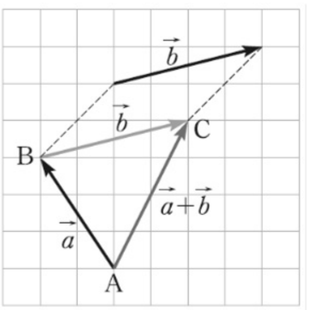


◀点 A は，どこにとってもよい。

●ベクトルの和を図示してみよう。

例 2　右の図の $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\vec{b}$ に対して，$\vec{b}$ を平行移動して $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるように点 C をとる。

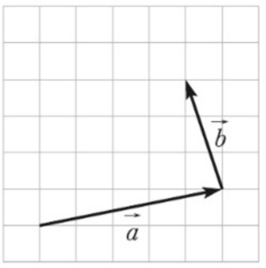
このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が $\vec{a}+\vec{b}$ である。



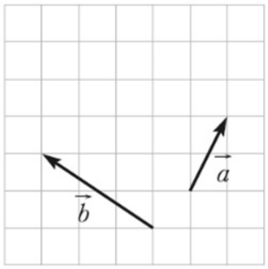
新数学 B　P.043

$\boxed{\text{問 3}}$　次の図で，$\vec{a}+\vec{b}$ を図示しなさい。

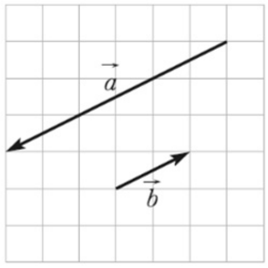
(1)

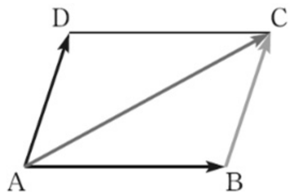


(2)



(3)



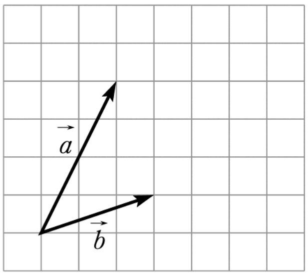


右の図の平行四辺形 ABCD において

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

このように，平行四辺形の対角線を利用して，ベクトルの和を図示することもできる。

$\boxed{\text{問 4}}$　右の図で，$\vec{a}+\vec{b}$ を図示しなさい。



➜p.49 復習問題2

ベクトルの加法については，次のことが成り立つ。

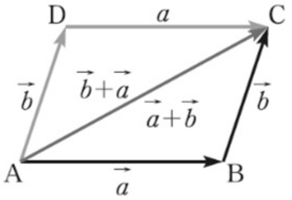
〔1〕　$\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{a}}$

〔2〕　$(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}})+\vec{\boldsymbol{c}}=\vec{\boldsymbol{a}}+(\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}})$

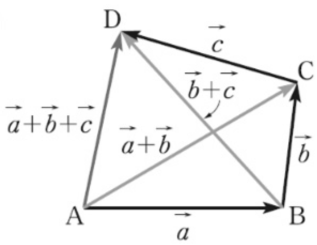
〔2〕より，$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ や $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ は，かっこを省略して $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書くことができる。

〔1〕,〔2〕は，次の図を利用して確かめることができる。

〔1〕

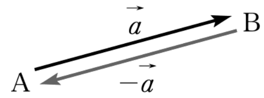


〔2〕



零ベクトル

ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と，その逆ベクトル $-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の和を考えてみよう。



$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は，始点と終点が一致したベクトルである。このベクトルを **零ベクトル**といい，$\vec{\mathbf{0}}$ と表す。

◀ $\vec{0}$ は，ゼロベクトルともいう。

$\vec{0}$ の大きさは 0 であり，向きは考えない。

$\vec{0}$ には，次のような性質がある。

$$\vec{\boldsymbol{a}}+(-\vec{\boldsymbol{a}})=\vec{\mathbf{0}}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\boldsymbol{a}}$$

ここに注意！

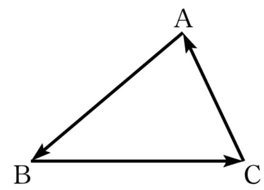
○ $\vec{a}=\vec{0}$

× $\vec{a}=0$

零ベクトルもベクトルであることに注意する。

例 3　平面上に 3 点 A，B，C があるとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AA}}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$



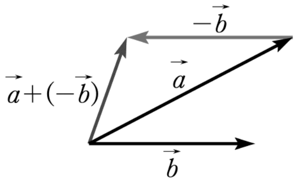
ベクトルの差

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，その**差** $\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}$ を

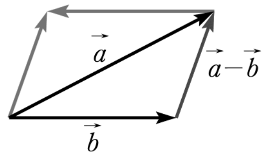
$$\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{a}}+\left(-\vec{\boldsymbol{b}}\right)$$

と定める。

$\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，$\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ は右の図のようにかくことができる。



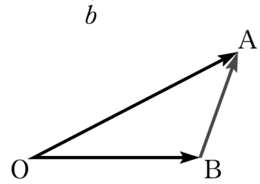
したがって，$\vec{a}-\vec{b}$ は，右の図のようになる。



また，右の図において

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}}-\overrightarrow{\mathbf{OB}}=\overrightarrow{\mathbf{BA}}$$

が成り立つ。



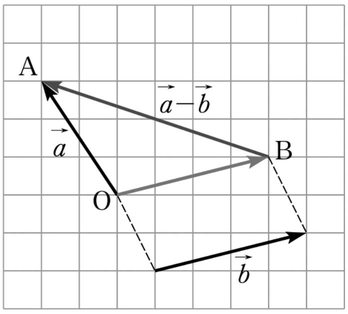
●ベクトルの差を図示してみよう。

例 4　右の図の $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\vec{b}$ に対して，$\vec{b}$ を平行移動して

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

となるように点 B をとる。

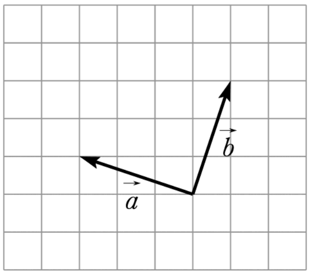
このとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ が $\vec{a}-\vec{b}$ である。



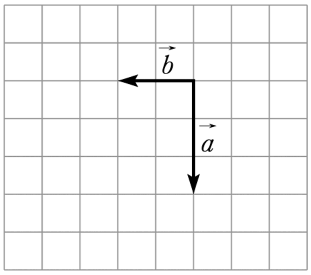
問 5　次の図で，$\vec{a}-\vec{b}$ を図示しなさい。

➔p.49 復習問題2

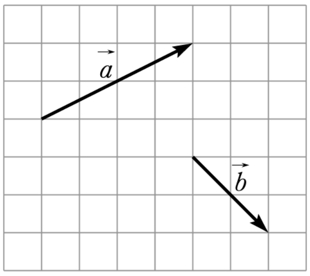
(1)



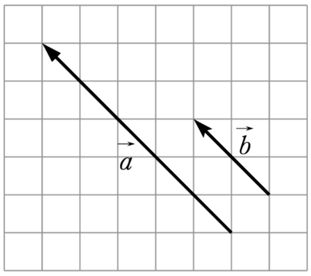
(2)



(3)



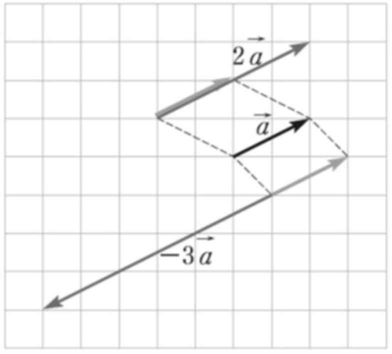
(4)



ベクトルの実数倍

$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが 2 倍のベクトルを $\boldsymbol{2\vec{a}}$ と表す。

$\vec{a}$ と反対向きで，大きさが 3 倍のベクトルを $\boldsymbol{-3\vec{a}}$ と表す。



一般に，$\vec{0}$ でない $\vec{a}$ と実数 k に対して，$\boldsymbol{k\vec{a}}$ を次のように定める。

ベクトルの実数倍
$k>0$ のとき
$k\vec{a}$ は，$\vec{a}$ と同じ向きで大きさが k 倍のベクトル
$-k\vec{a}$ は，$\vec{a}$ と反対向きで大きさが k 倍のベクトル

◀ $1\vec{a}=\vec{a}$
$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

$k=0$ のときは，$0\vec{a}=\vec{0}$ と定める。

なお，$\vec{a}=\vec{0}$ のときは，$k\vec{0}=\vec{0}$ と定める。

●ベクトルの実数倍を図示してみよう。

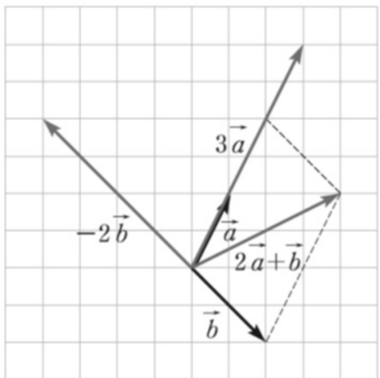
例 5　右の図は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して

$3\vec{a}$

$-2\vec{b}$

$2\vec{a}+\vec{b}$

を図示したものである。

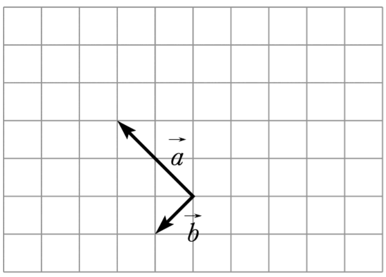


問 6　右の図で，次のベクトルを図示しなさい。

$2\vec{a}$

$-3\vec{b}$

$\vec{a}+2\vec{b}$



→p.49 復習問題2

ベクトルの実数倍の性質

k，l を実数とするとき，次のことが成り立つ。

ベクトルの実数倍の性質

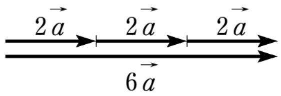
〔1〕　$\boldsymbol{k(l\vec{a}) = (k \times l)\vec{a}}$

〔2〕　$\boldsymbol{k\vec{a} + l\vec{a} = (k + l)\vec{a}}$

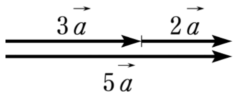
〔3〕　$\boldsymbol{k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}}$

これらの性質は，次の図を用いて確かめることができる。

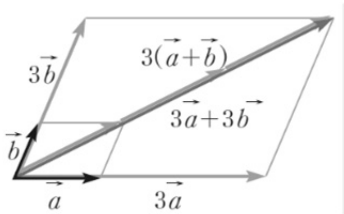
〔1〕　$3(2\vec{a}) = (3 \times 2)\vec{a}$



〔2〕　$3\vec{a} + 2\vec{a} = (3 + 2)\vec{a}$



〔3〕　$3(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b}$



●ベクトルの実数倍の性質を利用して，ベクトルの計算をしてみよう。

例 6　(1)　$5(3\vec{a}) = (5 \times 3)\vec{a} = 15\vec{a}$

(2)　$7\vec{a} + \vec{a} = (7 + 1)\vec{a} = 8\vec{a}$

(3)　$6(\vec{a} + \vec{b}) = 6\vec{a} + 6\vec{b}$

(4)　$$\begin{aligned} 4(\vec{a} + 2\vec{b}) + 3(\vec{a} - \vec{b}) &= 4\vec{a} + 8\vec{b} + 3\vec{a} - 3\vec{b} \\ &= (4 + 3)\vec{a} + (8 - 3)\vec{b} \\ &= 7\vec{a} + 5\vec{b} \end{aligned}$$

◀整式の計算と同じように計算することができる。

問 7　次の計算をしなさい。

➔p.49 復習問題3

(1)　$2(8\vec{a})$　　(2)　$6\vec{a} + \vec{a}$

(3)　$5(\vec{a} + \vec{b})$　　(4)　$3(2\vec{a} + \vec{b}) + 4(\vec{a} - \vec{b})$

新数学B　P.048

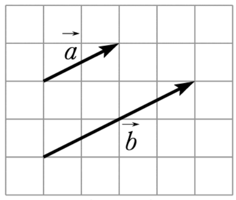
ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，同じ向き，または反対向きであるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行**であるといい，$\boldsymbol{\vec{a} \parallel \vec{b}}$ と表す。

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ となるのは，$\vec{b}$ が $\vec{a}$ の実数倍になるときである。

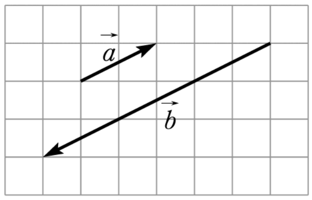
すなわち，次のことが成り立つ。

同じ向き



$\vec{b}=2\vec{a}$

反対向き



$\vec{b}=-3\vec{a}$

ベクトルの平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，k を実数とするとき

$$\boldsymbol{\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}}$$

◀ $A \Longleftrightarrow B$ は，A と B が同じ内容であることを表す。

ベクトルの分解

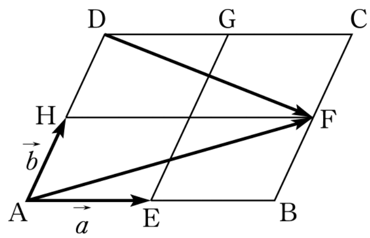
2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で，他のベクトルを表してみよう。

例題1

右の図の平行四辺形ABCDにおいて，点E，F，G，Hは，各辺の中点である。

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$



解　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=2\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\boldsymbol{2\vec{a}+\vec{b}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-2\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(2\vec{a}+\vec{b})-2\vec{b}$

$=\boldsymbol{2\vec{a}-\vec{b}}$

問8　例題1で，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$

➜p.49 復習問題④

一般に，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとき，平面上のベクトル $\vec{c}$ は，実数 k，l を用いて

$$\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$$

と表すことができる。この表し方は，ただ1通りである。

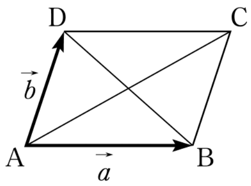
新数学 B　P.049

復習問題

□ **1**　右の図の平行四辺形 ABCD において，
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(1)　$\overrightarrow{DC}$　　(2)　$\overrightarrow{CB}$

(3)　$\overrightarrow{AC}$　　(4)　$\overrightarrow{BD}$

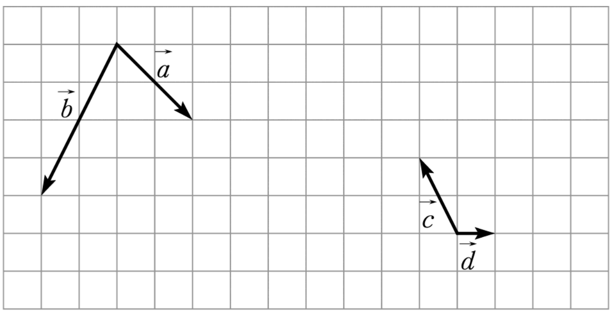


等しいベクトルと逆ベクトル
ベクトルの和
ベクトルの差

p.41 例 1
p.42 例 2
p.45 例 4

□ **2**　下の図で，次のベクトルを図示しなさい。

$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$，$2\vec{c}$，$-4\vec{d}$，$\vec{c}+3\vec{d}$



ベクトルの和
ベクトルの差
ベクトルの実数倍

p.43 問 4
p.45 例 4
p.46 例 5

□ **3**　次の計算をしなさい。

(1)　$4(5\vec{a})$　　(2)　$3\vec{a}+\vec{a}$

(3)　$2(\vec{a}+\vec{b})$　　(4)　$2(\vec{a}+3\vec{b})+7(\vec{a}-\vec{b})$

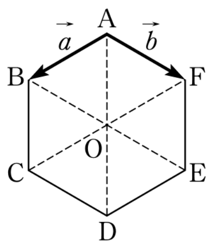
ベクトルの実数倍の性質

p.47 例 6

□ **4**　正六角形 ABCDEF の中心を O とする。
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，
次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表しなさい。

(1)　$\overrightarrow{AO}$　　(2)　$\overrightarrow{BF}$

(3)　$\overrightarrow{AC}$　　(4)　$\overrightarrow{BD}$



ベクトルの分解

p.48 例題 1