新数学 B　P.006

1 節　数列

1　数列と一般項

ねらい　2，4，6，8，10，…のような順序づけられた数の並びについて，その表し方や扱い方を学びます。

数列

私たちのまわりには，順序づけられた数の並びがよく見られる。たとえば，右の表は，ある宅配便の関東から荷物を送る場合の料金表で，北海道に送るときの料金は，サイズごとに

1100，1300，1500，1700，1900，2100

となっている。

サイズ	北海道	北東北	南東北
1	1100	800	700
2	1300	1000	900
3	1500	1200	1100
4	1700	1400	1300
5	1900	1600	1500
6	2100	1800	1700

このような, 順序づけられた数の並びを**数列**という。並んでいるそれぞれの数を**項**といい，初めから順に**第 1 項**，**第 2 項**，**第 3 項**，…という。第 1 項は**初項**ともいう。

数の並びに限りがある数列では，項の個数を**項数**といい，最後の項は**末項**という。

●数列を調べてみよう。

例 1　次の数列の初項は 2，末項は 12，項数は 6 である。

2，4，6，8，10，12

問 1　次の数列の初項，末項，項数をいいなさい。

(1)　90，80，70，60，50

(2)　4，8，12，16，20，24，28

例 1 の数列は，正の偶数を順に並べたものである。

ここでは，このような簡単な規則によってつくられる数列について考えよう。

問 2　次の数列の $\square$ にあてはまる値を求めなさい。

(1)　1，3，$\square$，7，9，11，13，…

(2)　5，10，20，40，$\square$，160，320，…

(3)　1，4，9，$\square$，25，36，…

数列を文字を使って表すときは，第何項であるかを示す番号を小さく添えて，次のように表す。

a_1,　a_2,　a_3,　$\cdots$,　a_n,　$\cdots$

第 1 項　第 2 項　第 3 項　$\cdots$　第 n 項　$\cdots$

とくに，a_n は，**第 $\boldsymbol{n}$ 項**，すなわち，初めから数えて n 番目の項を表す。

◀第■項　$a_■$
同じ数

この数列を $\{a_n\}$ と書き表すことがある。

●数列の各項を求めてみよう。

例 2　第 n 項 a_n が

$$a_n = 2n + 3$$

と表される数列の

初項は　$a_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$

第 2 項は　$a_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$

第 3 項は　$a_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$

……

◀$a_■ = 2 \times ■ + 3$
同じ数を代入

問 3　第 n 項 a_n が次のように表される数列の，初項から第 5 項までを求めなさい。

(1)　$3n - 2$　　(2)　2^n

例 2 のように，数列の第 n 項が n の式で表されていると，各項を簡単に求めることができる。

数列の第 n 項を n の式で表したものを，その数列の**一般項**という。

●一般項を求めてみよう。

例 3　正の奇数を順に並べた数列

1，3，5，7，9，11，$\cdots$

の一般項は

$$a_n = 2n - 1$$

である。

問 4　正の偶数を順に並べた数列

2，4，6，8，10，12，$\cdots$

の一般項 a_n を求めなさい。

2　等差数列

ねらい　初項に一定の数を次々にたして得られる数列について，一般項や和がどのようになるか学びます。

等差数列

あるタクシーの料金は，走行距離によって，次のようになっている。

$710,\ 800,\ 890,\ 980,\ 1070,\ 1160,\ \cdots$

この数列は「初項 710 から始まり，前の項に 90 をたす」という規則でできている。

このように，初項に一定の数を次々にたして得られる数列を**等差数列**といい，たす一定の数を**公差**という。

◀ $710 \xrightarrow{+90} 800 \xrightarrow{+90} 890 \xrightarrow{+90} 980,\ \cdots$

●等差数列を調べてみよう。

例 4　(1)　等差数列 $5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29,\ \cdots$ の

初項は　5

公差は　$11-5=6$

(2)　等差数列 $50,\ 35,\ 20,\ 5,\ -10,\ -25,\ \cdots$ の

初項は　50

公差は　$35-50=-15$

◀ $5 \xrightarrow{+6} 11 \xrightarrow{+6} 17 \xrightarrow{+6} 23,\ \cdots$

◀ $50 \xrightarrow{-15} 35 \xrightarrow{-15} 20 \xrightarrow{-15} 5,\ \cdots$

問 5　次の等差数列の初項と公差を求めなさい。

(1)　$9,\ 13,\ 17,\ 21,\ \cdots$　　(2)　$15,\ 8,\ 1,\ -6,\ \cdots$

●等差数列の項を求めてみよう。

例 5　等差数列 $5,\ \boxed{},\ 13,\ 17,\ \cdots$ の公差は

$17-13=4$

であるから，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$5+4=9$

問 6　次の等差数列の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。

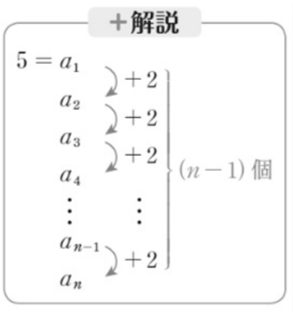
(1)　$16,\ \boxed{},\ 30,\ 37,\ \cdots$　(2)　$\boxed{},\ 3,\ 1,\ -1,\ \cdots$

新数学 B　P.009

等差数列の一般項について考えてみよう。たとえば, 初項 5, 公差 2 の等差数列の各項は, 次のようになる。

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1 + 2 = 7$$
$$a_3 = a_2 + 2 = 9$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 11$$
$$\cdots\cdots$$

この等差数列の各項は，次のようにして求めることもできる。



$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1 + 2 = 5 + 2 = 5 + 2 \times 1$$
$$a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 + 2 = 5 + 2 \times 2$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 + 2 + 2 = 5 + 2 \times 3$$
$$\cdots\cdots$$

このことから，第 n 項，すなわち，一般項 a_n は

$$a_n = 5 + 2 \times (n - 1)$$

となることがわかる。

一般に，等差数列の一般項は，次のようになる。

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = a + (n - 1)d}$$

●等差数列の一般項を求めてみよう。

例 6　初項 2，公差 3 の等差数列の一般項は

$$a_n = 2 + (n - 1) \times 3 = 3n - 1$$

また，第 10 項は

$$a_{10} = 3 \times 10 - 1 = 29$$

問 7　次の等差数列の一般項を求めなさい。また，第 25 項を求めなさい。

(1)　初項 3，公差 2　　　　(2)　初項 8，公差 -3

例題 1

初項 4，公差 3 の等差数列の一般項を求めなさい。
また，55 はこの数列の第何項ですか。

解　初項 4，公差 3 の等差数列の一般項は

$$a_n = 4 + (n-1) \times 3$$

より

$$\boldsymbol{a_n = 3n + 1}$$

また，55 がこの数列の第 n 項であるとすると

$$3n + 1 = 55$$

よって　$n = 18$

すなわち，55 は**第 18 項**である。

問 8　初項 9，公差 7 の等差数列の一般項を求めなさい。
また，121 はこの数列の第何項ですか。

➜p.19 復習問題1

例題 2

第 4 項が 14，第 10 項が 62 の等差数列の一般項を求めなさい。

解　初項を a，公差を d とおくと，一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

第 4 項が 14 であるから　$a + 3d = 14$　……①

第 10 項が 62 であるから　$a + 9d = 62$　……②

② − ①より　$6d = 48$

よって　$d = 8$

①に代入すると　$a + 3 \times 8 = 14$

よって　$a = -10$

したがって，一般項は

$$a_n = -10 + (n-1) \times 8$$

すなわち

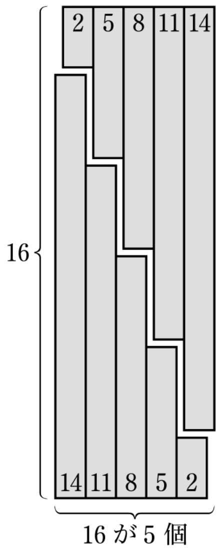
$$\boldsymbol{a_n = 8n - 18}$$

◀ はじめに初項と公差を求める。

問 9　第 2 項が −17，第 5 項が 10 の等差数列の一般項を求めなさい。

➜p.19 復習問題2

等差数列の和



初項 2，公差 3 の等差数列の初項から第 5 項までの和

$S = 2 + 5 + 8 + 11 + 14$　　……①

を求めてみよう。

たす順序を逆にしても S の値は変わらないから

$S = 14 + 11 + 8 + 5 + 2$　　……②

①＋②を計算すると

$$\begin{array}{rrl} & S = & 2 + 5 + 8 + 11 + 14 \\ +) & S = & 14 + 11 + 8 + 5 + 2 \\ \hline & 2S = & \underbrace{16 + 16 + 16 + 16 + 16}_{5\text{ 個}} \end{array}$$

よって

$$2S = 5 \times 16$$

したがって

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 16 = 40$$

同じように考えると，初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の初項から末項までの和 S は

$$\begin{array}{rrl} & S = & a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-d) + l \\ +) & S = & l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+d) + a \\ \hline & 2S = & \underbrace{(a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l)}_{n\text{個}} \end{array}$$

よって

$$2S = n(a + l)$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}n(a + l)$$

となる。

等差数列の和

初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S は

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}n(a + l)}$$

●等差数列の和を求めてみよう。

例 7　等差数列 3，7，11，15，19，23 の和 S は，初項 3，
末項 23，項数 6 であるから

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times (3 + 23) = 78$$

項数　初項　末項

◀$\frac{1}{2}\times$(項数)$\times$(初項＋末項)

問 10　次の等差数列の和 S を求めなさい。　➔p.19 復習問題3

(1)　初項 7，末項 61，項数 10

(2)　-11，-7，-3，1，5，9，13

例題 3
初項 6，公差 4 の等差数列の初項から第 20 項までの和 S を求めなさい。
解　初項 6，公差 4 の等差数列の一般項は $a_n = 6 + (n-1) \times 4$ よって，第 20 項，すなわち，末項 l は $l = 6 + (20-1) \times 4 = 82$ したがって　$S = \frac{1}{2} \times 20 \times (6 + 82) = \mathbf{880}$

問 11　初項 14，公差 -6 の等差数列の初項から第 15 項までの和 S を求めなさい。　➔p.19 復習問題4

一般に，初項 a，公差 d，項数 n のとき，11 ページの等差数列の和 S を表す式は，次のようになる。

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}}$$

◀$S = \frac{1}{2}n(a+l)$ の l に
$l = a + (n-1)d$
を代入する。

●等差数列の和を求めてみよう。

例 8　初項 -20，公差 4，項数 13 の等差数列の和 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 13 \times \{2 \times (-20) + (13-1) \times 4\} = 52$$

問 12　次の等差数列の和 S を求めなさい。

(1)　初項 5，公差 7，項数 10

(2)　初項 23，公差 -9，項数 9

新数学 B　P.013

1 から n までの自然数 1，2，3，…，n の和は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから，次のようになる。

$$\mathbf{1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)}$$

●自然数の和を求めてみよう。

例 9　$1+2+3+\cdots+10=\frac{1}{2}\times 10\times(10+1)=55$

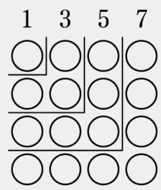
問 13　1 から 100 までの自然数の和を求めなさい。

●自然数のいろいろな和を求めてみよう。

例 10　1 から始まる n 個の奇数 1，3，5，7，…，$2n-1$ の和は，
初項 1，末項 $2n-1$，項数 n の等差数列の和であるから

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=\frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}$$

よって　　$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$



$1=1^2$

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

問 14　2 から始まる n 個の偶数の和
$2+4+6+8+\cdots+2n$ を求めなさい。

問 15　3 から始まる n 個の 3 の倍数の和
$3+6+9+12+\cdots+3n$ を求めなさい。

例題 4
次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。 7，13，19，…，91
解　初項 7，公差 6 であるから，一般項は $a_n=7+(n-1)\times 6=6n+1$ 末項 91 が第 n 項であるとすると　$6n+1=91$ よって　$n=15$ したがって　$S=\frac{1}{2}\times 15\times(7+91)=\mathbf{735}$

問 16　次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。 ➜p.19 復習問題5

8，15，22，…，85

3　等比数列

ねらい　初項に一定の数を次々にかけて得られる数列について，一般項や和がどのようになるか学びます。

等比数列

日常生活で，数を表すのに用いられる位取りの単位

一，　十，　百，　千，　一万，…

1　10　100　1000　10000

は，「初項 1 から始まり，前の項に 10 をかける」という規則でできている。

このように，初項に一定の数を次々にかけて得られる数列を**等比数列**といい，かける一定の数を**公比**という。

●等比数列を調べてみよう。

例 11　(1)　等比数列 4，12，36，108，324，… の

初項は　4

公比は　$12 \div 4 = 3$

◀ 4，12，36，108，…
　×3　×3　×3

(2)　等比数列 48，24，12，6，3，… の

初項は　48

公比は　$24 \div 48 = \frac{1}{2}$

◀ 48，24，12，6，…
　$\times\frac{1}{2}$　$\times\frac{1}{2}$　$\times\frac{1}{2}$

問 17　次の等比数列の初項と公比を求めなさい。

(1)　5，15，45，135，…　　(2)　54，18，6，2，…

●等比数列の項を求めてみよう。

例 12　等比数列 6，$\boxed{\quad}$，54，162，… の公比は

$162 \div 54 = 3$

であるから，$\boxed{\quad}$ にあてはまる数は

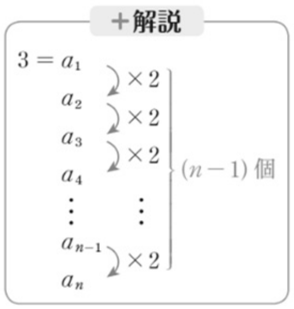
$6 \times 3 = 18$

問 18　次の等比数列の $\boxed{\quad}$ にあてはまる数を求めなさい。

(1)　14，$\boxed{\quad}$，56，112，…　(2)　$\boxed{\quad}$，18，-54，162，…

等比数列の一般項について考えてみよう。たとえば, 初項 3, 公比 2 の等比数列の各項は, 次のようになる。

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = a_1 \times 2 = 3 \times 2 = 3 \times 2^1$$
$$a_3 = a_2 \times 2 = (3 \times 2) \times 2 = 3 \times 2^2$$
$$a_4 = a_3 \times 2 = (3 \times 2 \times 2) \times 2 = 3 \times 2^3$$
.....



このことから，$n \geqq 2$ のとき，第 n 項 a_n は，次のようになることがわかる。

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

一般に，$n \geqq 2$ のとき，初項 a，公比 r の等比数列の第 n 項は，次のようになる。

$$a_n = ar^{n-1}$$

ここで $r^0 = 1$ とすると，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$$

●等比数列の一般項を求めてみよう。

例 13　(1)　初項 2，公比 3 の等比数列の一般項は

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

また，第 5 項は

$$a_5 = 2 \times 3^{5-1} = 2 \times 3^4 = 162$$

(2)　初項 5，公比 -2 の等比数列の一般項は

$$a_n = 5 \times (-2)^{n-1}$$

また，第 4 項は

$$a_4 = 5 \times (-2)^{4-1} = 5 \times (-2)^3 = -40$$

問 19　次の等比数列の一般項を求めなさい。また，第 4 項を求めなさい。

(1)　初項 4，公比 5　　　　(2)　初項 48，公比 $-\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{例題 5}}$
初項 5，公比 3 の等比数列において，135 はこの数列の第何項ですか。
解　初項 5，公比 3 の等比数列の一般項は $a_n = 5 \times 3^{n-1}$ よって，135 がこの数列の第 n 項であるとすると $5 \times 3^{n-1} = 135$ $3^{n-1} = 27$ $3^3 = 27$であるから　$3^{n-1} = 3^3$ よって，$n - 1 = 3$ より　$n = 4$ したがって，135 は**第 4 項**である。

問 20　初項 3, 公比 4 の等比数列において, 768 はこの数列の第何項ですか。 ➜p.19 復習問題⑥

$\boxed{\text{例題 6}}$
第 2 項が 6，第 4 項が 24 の等比数列の一般項を求めなさい。
解　初項を a，公比を r とおくと，一般項は　$a_n = ar^{n-1}$ 第 2 項が 6 であるから　$ar = 6$　……① 第 4 項が 24 であるから　$ar^3 = 24$　……② ②より　$ar \times r^2 = 24$ ①を代入すると　$6 \times r^2 = 24$ よって　$r^2 = 4$ したがって　$r = \pm 2$ ①より $r = 2$ のとき　$a = 3$ $r = -2$ のとき　$a = -3$ したがって，一般項は $\boldsymbol{a_n = 3 \times 2^{n-1}}$　**または**　$\boldsymbol{a_n = -3 \times (-2)^{n-1}}$

◀はじめに初項と公比を求める。

問 21　第 3 項が 36，第 5 項が 324 の等比数列の一般項を求めなさい。 ➜p.19 復習問題⑦

等比数列の和

初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 5 項までの和

$$S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 \qquad \cdots\cdots①$$

を求めてみよう。

①の両辺に，公比の 3 をかけると

$$3S = \phantom{2+{}} 6 + 18 + 54 + 162 + 486 \qquad \cdots\cdots②$$

② − ①を計算すると

$$\begin{array}{rrl} & 3S = & \phantom{2+{}}6 + 18 + 54 + 162 + 486 \\ -) & S = & 2 + 6 + 18 + 54 + 162 \\ \hline & 2S = & -2 \qquad\qquad\qquad\qquad + 486 \end{array}$$

したがって　$S = \frac{486-2}{2} = 242$

同じように考えると，初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S は

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad \cdots\cdots①$$

①の両辺に，公比 r をかけると

$$rS = \phantom{a+{}} ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad \cdots\cdots②$$

② − ①を計算すると

$$\begin{array}{rrl} & rS = & \phantom{a+{}} ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ -) & S = & a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ \hline & rS - S = & -a \qquad\qquad\qquad\qquad + ar^n \end{array}$$

よって　$(r-1)S = a(r^n - 1)$

したがって，$r \neq 1$ のとき，両辺を $r-1$ でわって

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S は

$$\boldsymbol{S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}} \qquad \text{ただし}\quad r \neq 1$$

$r = 1$ のときは，次のようになる。

$$S = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n\text{個}} = na$$

●等比数列の和を求めてみよう。

例 14　(1)　初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 5 項までの和 S は　◀$S=3+6+12+24+48$

$$S=\frac{3\times(2^5-1)}{2-1}=3\times(32-1)=93$$

(2)　初項 1，公比 -3 の等比数列の初項から第 4 項までの和 S は

$$S=\frac{1\times\{(-3)^4-1\}}{(-3)-1}=\frac{81-1}{-3-1}=\frac{80}{-4}=-20$$

問 22　次の等比数列の和 S を求めなさい。　➜p.19 復習問題8

(1)　初項 4，公比 3，項数 5

(2)　初項 1，公比 -2，項数 6

例 15　等比数列

$4,\ -12,\ 36,\ -108,\ \cdots$

の初項から第 6 項までの和 S は

初項　$a=4$

公比　$r=(-12)\div 4=-3$

項数　$n=6$

であるから

$$S=\frac{4\times\{(-3)^6-1\}}{(-3)-1}$$

$$=\frac{4\times(729-1)}{-3-1}$$

$$=\frac{4\times 728}{-4}$$

$$=-728$$

問 23　次の等比数列の和 S を求めなさい。　➜p.19 復習問題9

(1)　5，10，20，40，… の初項から第 6 項まで

(2)　2，-6，18，-54，… の初項から第 5 項まで

問 24　1 日目に 100 円，2 日目に 200 円，3 日目に 400 円というように，毎日，前日の 2 倍の金額を貯金していくと，10 日目には貯金額は全部で何円になるか求めなさい。

復習問題

□ $\boxed{1}$ 初項 9，公差 4 の等差数列の一般項を求めなさい。また，57 はこの数列の第何項ですか。

等差数列の一般項
p.10 例題 1

□ $\boxed{2}$ 第 7 項が 16，第 12 項が 41 の等差数列の一般項を求めなさい。

等差数列の一般項
p.10 例題 2

□ $\boxed{3}$ 次の等差数列の和 S を求めなさい。

(1)　初項 -4，末項 41，項数 16

(2)　-15，-8，-1，6，13，20

等差数列の和
p.12 例 7

□ $\boxed{4}$ 初項 -13，公差 4 の等差数列の初項から第 11 項までの和 S を求めなさい。

等差数列の和
p.12 例題 3

□ $\boxed{5}$ 次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。

17，13，9，…，-39

等差数列の和
p.13 例題 4

□ $\boxed{6}$ 初項 7，公比 -3 の等比数列において，-189 はこの数列の第何項ですか。

等比数列の一般項
p.16 例題 5

□ $\boxed{7}$ 第 2 項が 12，第 4 項が 192 の等比数列の一般項を求めなさい。

等比数列の一般項
p.16 例題 6

□ $\boxed{8}$ 次の等比数列の和 S を求めなさい。

(1)　初項 3，公比 4，項数 5

(2)　初項 4，公比 -5，項数 4

等比数列の和
p.18 例 14

□ $\boxed{9}$ 次の等比数列の和 S を求めなさい。

(1)　4，-8，16，-32，… の初項から第 6 項まで

(2)　6，18，54，162，… の初項から第 5 項まで

等比数列の和
p.18 例 15