

1 節 平面上のベクトル



1 有向線分とベクトル

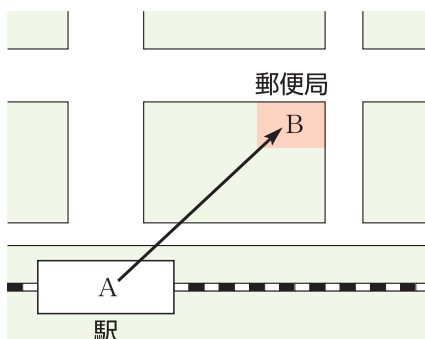


風の状態は、「南西の風，風力2」のように，向きと大きさで表されます。
ここでは，このような向きと大きさをもつ量について考えます。

有向線分

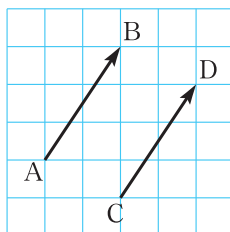
右の地図で，駅から郵便局までの移動は，線分 AB に向きを示す矢印をつけて表すことができる。すなわち，矢印の向きが移動の向きを，線分の長さが移動の大きさを表している。

このような向きのついた線分を **有向線分**（ゆうこうせんぶん）という。また，有向線分 AB において，A を **始点**（しゅてん）
B を **終点**（しゅうてん）という。



ベクトル

右の図で，2つの有向線分 AB，CD の表す移動は，その向きと大きさが一致しているので，同じ移動であるとみなすことができる。



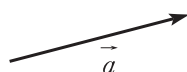
有向線分について，その位置を問題にしないで，向きと長さだけに着目したものを **ベクトル** という。

A を始点，B を終点とする

有向線分 AB の表すベクトルを \overrightarrow{AB} と表す。また，有向線分 AB の長さを \overrightarrow{AB} の **大きさ** といい， $|\overrightarrow{AB}|$ と表す。



ベクトルは，1つの文字に矢印をつけて， \vec{a} のように表すこともある。
このとき， \vec{a} の大きさを $|\vec{a}|$ と表す。



等しいベクトルと逆ベクトル

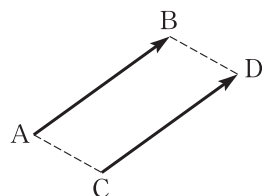
2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} について、向きが同じで、大きさが等しいとき、 \vec{a} と \vec{b} は **等しい** といひ

$$\vec{a} = \vec{b}$$

5 と表す。また

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

ということは、有向線分 AB を平行移動して有向線分 CD に重ねることができるということである。



10 ベクトル \vec{a} と向きが反対で、大きさが等しいベクトルを、 \vec{a} の **逆ベクトル** といひ、 $-\vec{a}$ と表す。したがって

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

である。



●等しいベクトルと逆ベクトルを求めてみよう。

15 **例1** 右の図の平行四辺形 ABCD において、 \overrightarrow{AB} に等しいベクトルは

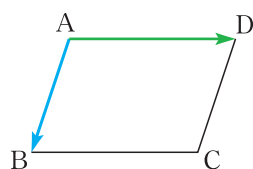
$$\overrightarrow{DC}$$

である。

また、 \overrightarrow{AD} の逆ベクトルは

$$\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}$$

20 である。

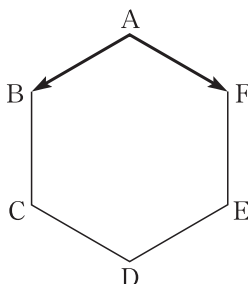


25 **問1** 右の図の正六角形 ABCDEF の

頂点を始点、終点とするベクトルを考える。次のベクトルを答えなさい。

(1) \overrightarrow{AB} に等しいベクトル

(2) \overrightarrow{AF} の逆ベクトル



→ p.49 復習問題(1), (2)

2 ベクトルの計算



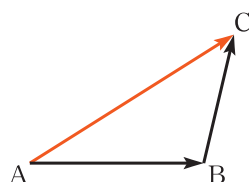
2つのベクトルをたすことや、ベクトルからベクトルをひくこと、ベクトルを実数倍することを学びます。

ベクトルの和

2つのベクトル \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} に対して
その和を

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

と定める。



5

問2 上の図において、次の和を求めなさい。

(1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

(2) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

10

一般に、2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} の和は次のようになる。

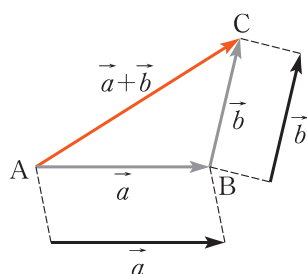
まず1つの点Aをとり、次に

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}$$

となるように点B, Cをとる。

このとき、 \overrightarrow{AC} が \vec{a} と \vec{b} の和を表している。

\vec{a} と \vec{b} の和を $\vec{a} + \vec{b}$ と表す。

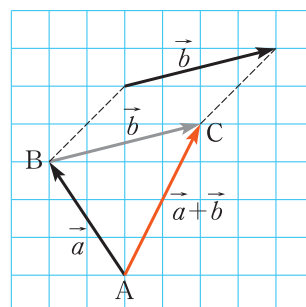


◀ 点Aは、どこにとってもよい。

15

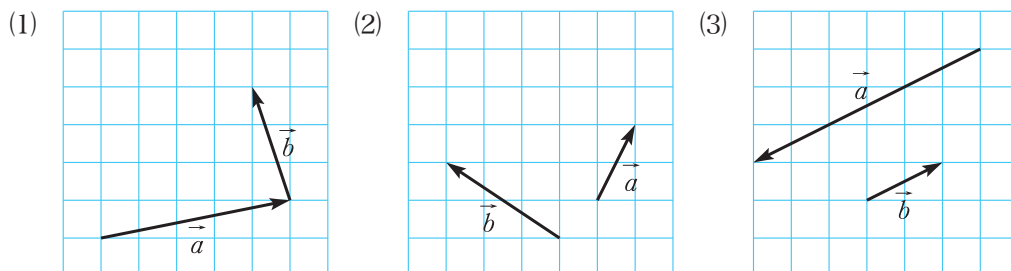
●ベクトルの和を図示してみよう。

例2 右の図の $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ と \vec{b} に対して、 \vec{b} を平行移動して $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ となるように点Cをとる。
このとき、 \overrightarrow{AC} が $\vec{a} + \vec{b}$ である。



20

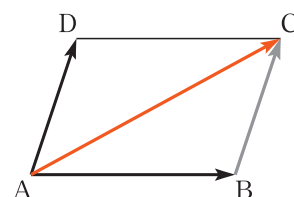
問3 次の図で、 $\vec{a} + \vec{b}$ を図示しなさい。



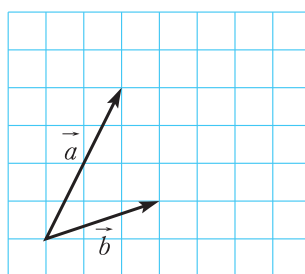
右の図の平行四辺形 ABCD において

$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BC} \\ &= \vec{AC}\end{aligned}$$

- 5 このように、平行四辺形の対角線を利用して、ベクトルの和を図示することもできる。



問4 右の図で、 $\vec{a} + \vec{b}$ を図示しなさい。



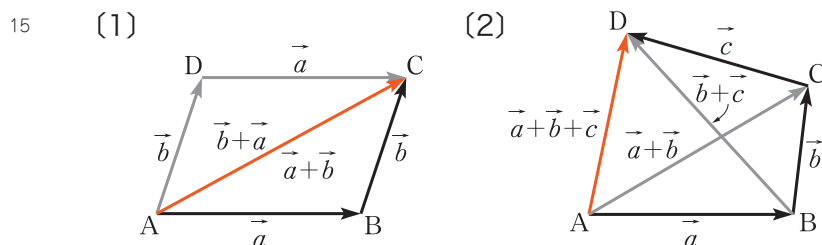
→ p.49 復習問題②

ベクトルの加法については、次のことが成り立つ。

- 10 (1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
(2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(2) より、 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ や $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ は、かっこを省略して $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ と書くことができる。

(1), (2) は、次の図を利用して確かめることができる。



零ベクトル

ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ と、その逆ベクトル $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ の和を考えてみよう。

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$$

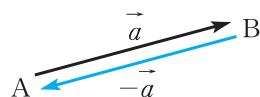
\overrightarrow{AA} は、始点と終点が一致したベクトルである。このベクトルを **零ベクトル** といい、 $\vec{0}$ と表す。

$\vec{0}$ の大きさは 0 であり、向きは考えない。

$\vec{0}$ には、次のような性質がある。

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$



◀ $\vec{0}$ は、ゼロベクトルともいう。

ここに注意！

○ $\vec{a} = \vec{0}$

✗ $\vec{a} = 0$

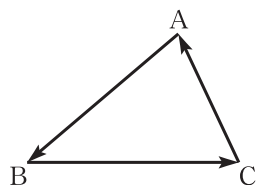
零ベクトルもベクトルであることに注意する。

5

10

例3 平面上に 3 点 A, B, C があるとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AA} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$



15

ベクトルの差

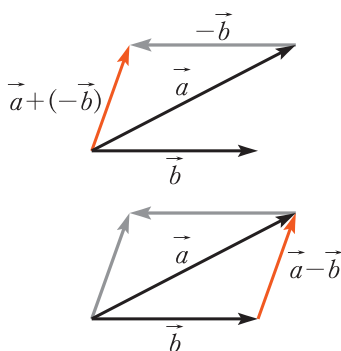
2 つのベクトル \vec{a} , \vec{b} に対して、その **差** $\vec{a} - \vec{b}$ を

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

と定める。

\vec{a} , \vec{b} が与えられたとき、 $\vec{a} + (-\vec{b})$ は右の図のようにかくことができる。

したがって、 $\vec{a} - \vec{b}$ は、右の図のようになる。

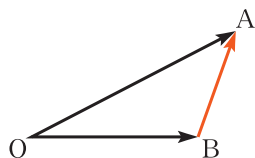


20

また、右の図において

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

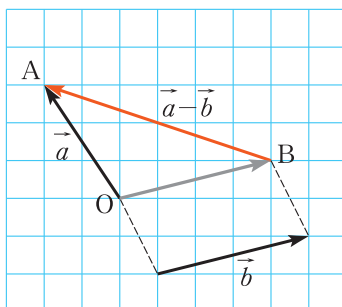
が成り立つ。



25

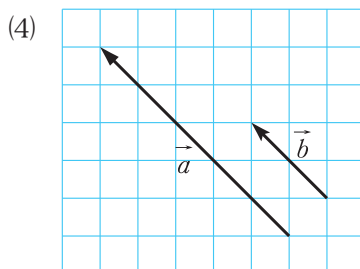
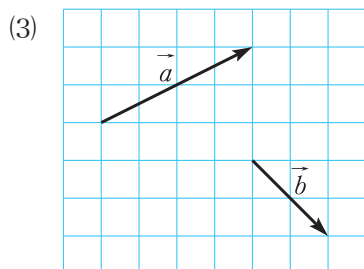
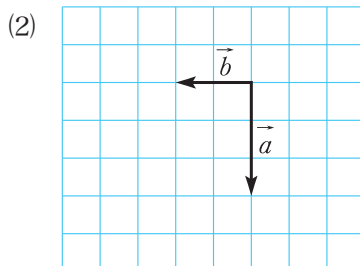
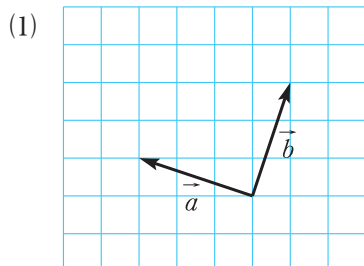
●ベクトルの差を図示してみよう。

例 4 右の図の $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ と \vec{b} に対して、 \vec{b} を平行移動して $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ となるように点Bをとる。
このとき、 \overrightarrow{BA} が $\vec{a} - \vec{b}$ である。



10 **問 5** 次の図で、 $\vec{a} - \vec{b}$ を図示しなさい。

→ p.49 復習問題②

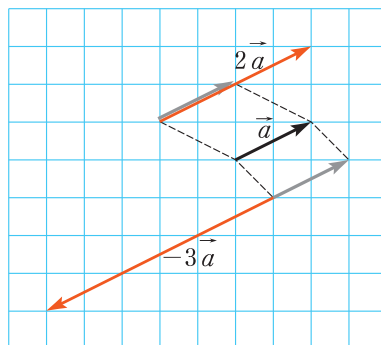


ベクトルの実数倍

$\vec{0}$ でないベクトル \vec{a} と同じ向きで、大きさが 2 倍のベクトルを $2\vec{a}$ と表す。

\vec{a} と反対向きで、大きさが 3 倍のベクトルを $-3\vec{a}$ と表す。

一般に、 $\vec{0}$ でない \vec{a} と実数 k に対して、 $k\vec{a}$ を次のように定める。



5

ベクトルの実数倍

$k > 0$ のとき

$k\vec{a}$ は、 \vec{a} と同じ向きで大きさが k 倍のベクトル

$-k\vec{a}$ は、 \vec{a} と反対向きで大きさが k 倍のベクトル

$$\begin{aligned} 1\vec{a} &= \vec{a} \\ (-1)\vec{a} &= -\vec{a} \end{aligned}$$

10

$k = 0$ のときは、 $0\vec{a} = \vec{0}$ と定める。

なお、 $\vec{a} = \vec{0}$ のときは、 $k\vec{0} = \vec{0}$ と定める。

●ベクトルの実数倍を図示してみよう。

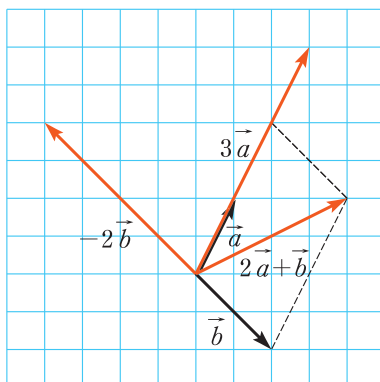
例 5 右の図は、 \vec{a} 、 \vec{b} に
対して

$$3\vec{a}$$

$$-2\vec{b}$$

$$2\vec{a} + \vec{b}$$

を図示したもので
ある。



15

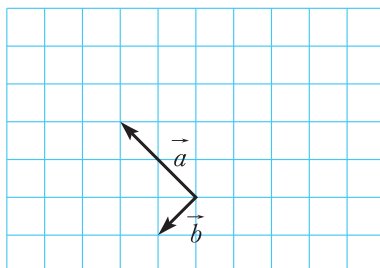
20

問 6 右の図で、次の
ベクトルを図示
しなさい。

$$2\vec{a}$$

$$-3\vec{b}$$

$$\vec{a} + 2\vec{b}$$



→p.49 復習問題②

25

ベクトルの実数倍の性質

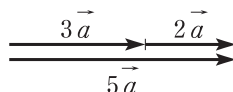
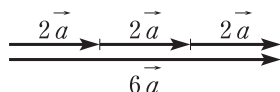
k, l を実数とすると、次のことが成り立つ。

ベクトルの実数倍の性質

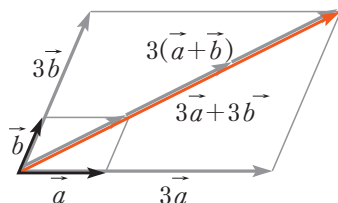
- (1) $k(l\vec{a}) = (k \times l)\vec{a}$
- (2) $k\vec{a} + l\vec{a} = (k+l)\vec{a}$
- (3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

これらの性質は、次の図を用いて確かめることができる。

- (1) $3(2\vec{a}) = (3 \times 2)\vec{a}$
- (2) $3\vec{a} + 2\vec{a} = (3+2)\vec{a}$



- (3) $3(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b}$



●ベクトルの実数倍の性質を利用して、ベクトルの計算をしてみよう。

例6

- (1) $5(3\vec{a}) = (5 \times 3)\vec{a} = 15\vec{a}$
- (2) $7\vec{a} + \vec{a} = (7+1)\vec{a} = 8\vec{a}$
- (3) $6(\vec{a} + \vec{b}) = 6\vec{a} + 6\vec{b}$
- (4) $4(\vec{a} + 2\vec{b}) + 3(\vec{a} - \vec{b}) = 4\vec{a} + 8\vec{b} + 3\vec{a} - 3\vec{b}$
 $= (4+3)\vec{a} + (8-3)\vec{b}$
 $= 7\vec{a} + 5\vec{b}$

▶ 整式の計算と同じように計算することができる。

問7 次の計算をしなさい。

- (1) $2(8\vec{a})$
- (2) $6\vec{a} + \vec{a}$
- (3) $5(\vec{a} + \vec{b})$
- (4) $3(2\vec{a} + \vec{b}) + 4(\vec{a} - \vec{b})$

→ p.49 復習問題③

ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル \vec{a} , \vec{b} が、同じ向き、または反対向きであるとき、 \vec{a} と \vec{b} は **平行** であるといい、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ と表す。

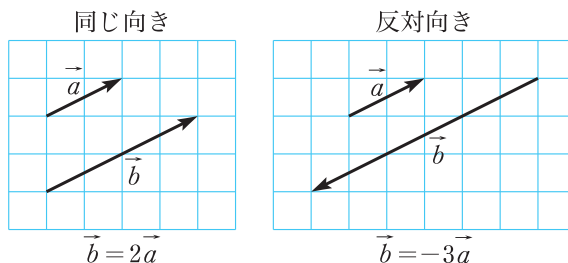
$\vec{a} \parallel \vec{b}$ となるのは、 \vec{b} が \vec{a} の実数倍になるときである。

すなわち、次のことが成り立つ。

ベクトルの平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, k を実数とすると

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$$



5

◀ $A \iff B$ は、 A と B が同じ内容であることを表す。

10

ベクトルの分解

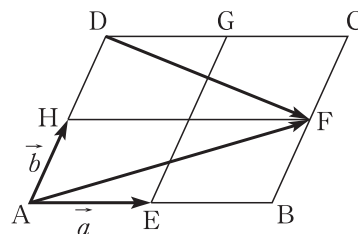
2 つのベクトル \vec{a} , \vec{b} で、他のベクトルを表してみよう。

例題 1

右の図の平行四辺形 ABCD において、点 E, F, G, H は、各辺の中点である。

$\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AH} = \vec{b}$ とするとき、次のベクトルを \vec{a} , \vec{b} で表しなさい。

- (1) \overrightarrow{AF} (2) \overrightarrow{DF}



15

解

- (1) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AH} = 2\vec{a} + \vec{b}$
 (2) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AH} = (2\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{b} = 2\vec{a} - \vec{b}$

20

問 8 例題 1 で、次のベクトルを \vec{a} , \vec{b} で表しなさい。

- (1) \overrightarrow{AG} (2) \overrightarrow{BG}

→ p.49 復習問題 4

一般に、 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル \vec{a} , \vec{b} が平行でないとき、平面上のベクトル \vec{c} は、実数 k , l を用いて

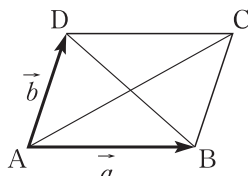
$$\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$$

と表すことができる。この表し方は、ただ 1 通りである。

25

復習問題

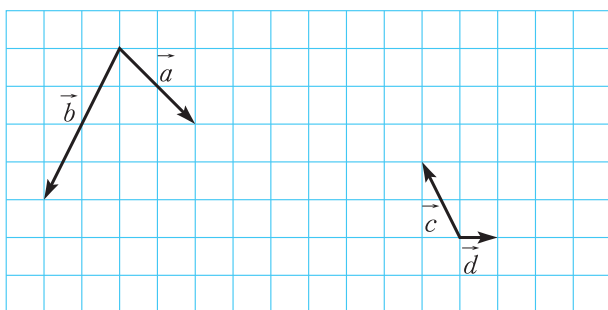
- 1 右の図の平行四辺形 ABCD において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とするとき、次のベクトルを \vec{a} , \vec{b} で表しなさい。



- (1) \overrightarrow{DC} (2) \overrightarrow{CB}
(3) \overrightarrow{AC} (4) \overrightarrow{BD}

- 2 下の図で、次のベクトルを図示しなさい。

$$\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, 2\vec{c}, -4\vec{d}, \vec{c} + 3\vec{d}$$



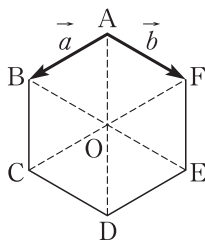
- 10 □3 次の計算をしなさい。

- (1) $4(5\vec{a})$ (2) $3\vec{a} + \vec{a}$
(3) $2(\vec{a} + \vec{b})$ (4) $2(\vec{a} + 3\vec{b}) + 7(\vec{a} - \vec{b})$

- 4 正六角形 ABCDEF の中心を O とする。

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とするとき、次のベクトルを \vec{a} , \vec{b} で表しなさい。

- (1) \overrightarrow{AO} (2) \overrightarrow{BF}
(3) \overrightarrow{AC} (4) \overrightarrow{BD}



等しいベクトルと
逆ベクトル
ベクトルの和
ベクトルの差

← p.41 例 1
p.42 例 2
p.45 例 4

ベクトルの和
ベクトルの差
ベクトルの実数倍

← p.43 問 4
p.45 例 4
p.46 例 5

ベクトルの実数倍の
性質

← p.47 例 6

ベクトルの分解

← p.48 例題 1

2

ベクトル