

1 節 数列



1 数列と一般項



2, 4, 6, 8, 10, … のような順序づけられた数の並びについて, その表し方や扱い方を学びます。

数列

5

私たちのまわりには, 順序づけられた数の並びがよく見られる。たとえば, 右の表は, ある宅配便の関東から荷物を送る場合の料金表で, 北海道に送るときの料金は, サイズごとに
1100, 1300, 1500, 1700, 1900, 2100
となっている。

サイズ	北海道	北東北	南東北
1	1100	800	700
2	1300	1000	900
3	1500	1200	1100
4	1700	1400	1300
5	1900	1600	1500
6	2100	1800	1700

10

このような, 順序づけられた数の並びを **数列** という。並んでいるそれぞれの数を **項** といい, 初めから順に **第1項**, **第2項**, **第3項**, … という。第1項は **初項** ともいう。

数の並びに限りがある数列では, 項の個数を **項数** といい, 最後の項は **末項** という。

15

●数列を調べてみよう。

例 1 次の数列の初項は 2, 末項は 12, 項数は 6 である。

2, 4, 6, 8, 10, 12

問 1 次の数列の初項, 末項, 項数をいいなさい。

20

- (1) 90, 80, 70, 60, 50
- (2) 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28

例 1 の数列は, 正の偶数を順に並べたものである。

ここでは, このような簡単な規則によってつくられる数列について考えよう。

25

問 2 次の数列の にあてはまる値を求めなさい。

- (1) 1, 3, , 7, 9, 11, 13, …
- (2) 5, 10, 20, 40, , 160, 320, …
- (3) 1, 4, 9, , 25, 36, …

2 等差数列



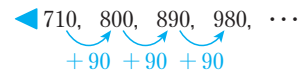
初項に一定の数を次々にたして得られる数列について、一般項や和がどのようになるか学びます。

等差数列

あるタクシーの料金は、走行距離によって、次のようになっている。

710, 800, 890, 980, 1070, 1160, …

この数列は「初項 710 から始まり、前の項に 90 をたす」という規則でできている。



5

このように、初項に一定の数を次々にたして得られる数列を **等差数列** とうさすうれつ といい、たす一定の数を **公差** こうさ という。

10

●等差数列を調べてみよう。

例 4 (1) 等差数列 5, 11, 17, 23, 29, …の

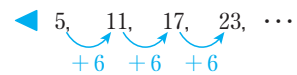
初項は 5

公差は $11 - 5 = 6$

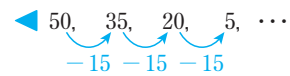
(2) 等差数列 50, 35, 20, 5, -10, -25, …の

初項は 50

公差は $35 - 50 = -15$



15



問 5 次の等差数列の初項と公差を求めなさい。

(1) 9, 13, 17, 21, … (2) 15, 8, 1, -6, …

20

●等差数列の項を求めてみよう。

例 5 等差数列 5, , 13, 17, …の公差は

$$17 - 13 = 4$$

であるから、 にあてはまる数は

$$5 + 4 = 9$$

25

問 6 次の等差数列の にあてはまる数を求めなさい。

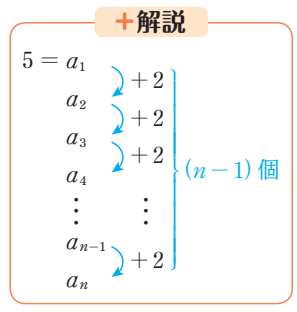
(1) 16, , 30, 37, … (2) , 3, 1, -1, …

等差数列の一般項について考えてみよう。たとえば、
初項 5，公差 2 の等差数列の各項は，次のようになる。

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 5 \\
 a_2 &= a_1 + 2 = 7 \\
 5 \quad a_3 &= a_2 + 2 = 9 \\
 a_4 &= a_3 + 2 = 11 \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$

この等差数列の各項は，次のようにして求めることも
できる。

$$\begin{aligned}
 10 \quad a_1 &= 5 \\
 a_2 &= a_1 + 2 = 5 + 2 = 5 + 2 \times 1 \\
 a_3 &= a_2 + 2 = 5 + 2 + 2 = 5 + 2 \times 2 \\
 a_4 &= a_3 + 2 = 5 + 2 + 2 + 2 = 5 + 2 \times 3 \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$



15 このことから，第 n 項，すなわち，一般項 a_n は

$$a_n = 5 + 2 \times (n - 1)$$

となることがわかる。

一般に，等差数列の一般項は，次のようになる。

等差数列の一般項

初項 a ，公差 d の等差数列の一般項は

$$a_n = a + (n - 1)d$$

● 等差数列の一般項を求めてみよう。

例 6 初項 2，公差 3 の等差数列の一般項は

$$a_n = 2 + (n - 1) \times 3 = 3n - 1$$

25 また，第 10 項は

$$a_{10} = 3 \times 10 - 1 = 29$$

問 7 次の等差数列の一般項を求めなさい。また，第 25 項を
求めなさい。

- (1) 初項 3，公差 2 (2) 初項 8，公差 -3

例題**1**

初項 4, 公差 3 の等差数列の一般項を求めなさい。
また, 55 はこの数列の第何項ですか。

解 初項 4, 公差 3 の等差数列の一般項は

$$a_n = 4 + (n-1) \times 3$$

より

$$a_n = 3n + 1$$

また, 55 がこの数列の第 n 項であるとする

$$3n + 1 = 55$$

よって $n = 18$

すなわち, 55 は **第 18 項** である。

5

10

問 8

初項 9, 公差 7 の等差数列の一般項を求めなさい。
また, 121 はこの数列の第何項ですか。

→ p.19 復習問題①

例題**2**

第 4 項が 14, 第 10 項が 62 の等差数列の一般項を求めなさい。

解 初項を a , 公差を d とおくと, 一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

第 4 項が 14 であるから $a + 3d = 14$ …… ①

第 10 項が 62 であるから $a + 9d = 62$ …… ②

② - ① より $6d = 48$

よって $d = 8$

① に代入すると $a + 3 \times 8 = 14$

よって $a = -10$

したがって, 一般項は

$$a_n = -10 + (n-1) \times 8$$

すなわち

$$a_n = 8n - 18$$

◀ はじめに初項と公差を求めろ。

15

20

25

問 9

第 2 項が -17, 第 5 項が 10 の等差数列の一般項を求めなさい。

→ p.19 復習問題②

等差数列の和

初項 2, 公差 3 の等差数列の初項から第 5 項までの和

$$S = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を求めてみよう。

5 たす順序を逆にしても S の値は変わらないから

$$S = 14 + 11 + 8 + 5 + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① + ② を計算すると

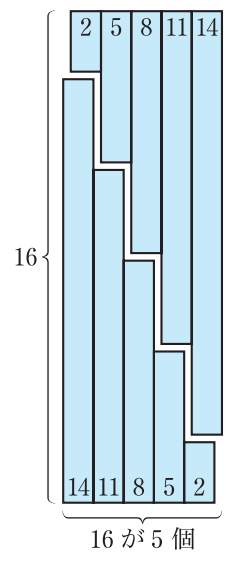
$$\begin{array}{r} S = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 \\ +) S = 14 + 11 + 8 + 5 + 2 \\ \hline 2S = \underbrace{16 + 16 + 16 + 16 + 16}_{5 \text{ 個}} \end{array}$$

よって

$$2S = 5 \times 16$$

したがって

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 16 = 40$$



15 同じように考えると, 初項 a , 公差 d , 末項 l , 項数 n の等差数列の初項から末項までの和 S は

$$\begin{array}{r} S = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-d) + l \\ +) S = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+d) + a \\ \hline 2S = \underbrace{(a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l)}_{n \text{ 個}} \end{array}$$

20 よって

$$2S = n(a+l)$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}n(a+l)$$

となる。

25 **等差数列の和**
 初項 a , 末項 l , 項数 n の等差数列の和 S は

$$S = \frac{1}{2}n(a+l)$$

●等差数列の和を求めてみよう。

例7 等差数列 3, 7, 11, 15, 19, 23 の和 S は、初項 3, 末項 23, 項数 6 であるから

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times (3 + 23) = 78$$

項数
初項
末項

◀ $\frac{1}{2} \times (\text{項数}) \times (\text{初項} + \text{末項})$

問10 次の等差数列の和 S を求めなさい。

→ p.19 復習問題③

5

- (1) 初項 7, 末項 61, 項数 10
- (2) -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13

例題
3

初項 6, 公差 4 の等差数列の初項から第 20 項までの和 S を求めなさい。

解 初項 6, 公差 4 の等差数列の一般項は

10

$$a_n = 6 + (n - 1) \times 4$$

よって、第 20 項、すなわち、末項 l は

$$l = 6 + (20 - 1) \times 4 = 82$$

したがって $S = \frac{1}{2} \times 20 \times (6 + 82) = 880$

問11 初項 14, 公差 -6 の等差数列の初項から第 15 項までの和 S を求めなさい。

→ p.19 復習問題④

15

一般に、初項 a , 公差 d , 項数 n のとき、11 ページの等差数列の和 S を表す式は、次のようになる。

$$S = \frac{1}{2} n \{2a + (n - 1)d\}$$

◀ $S = \frac{1}{2} n(a + l)$ の l に
 $l = a + (n - 1)d$
を代入する。

20

●等差数列の和を求めてみよう。

例8 初項 -20, 公差 4, 項数 13 の等差数列の和 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 13 \times \{2 \times (-20) + (13 - 1) \times 4\} = 52$$

問12 次の等差数列の和 S を求めなさい。

- (1) 初項 5, 公差 7, 項数 10
- (2) 初項 23, 公差 -9, 項数 9

25

1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ の和は、初項 1 、末項 n 、項数 n の等差数列の和であるから、次のようになる。

$$1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

●自然数の和を求めてみよう。

5 **例 9** $1+2+3+\dots+10 = \frac{1}{2} \times 10 \times (10+1) = 55$

問 13 1 から 100 までの自然数の和を求めなさい。

●自然数のいろいろな和を求めてみよう。

10 **例 10** 1 から始まる n 個の奇数 $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$ の和は、初項 1 、末項 $2n-1$ 、項数 n の等差数列の和であるから

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1) = \frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}$$

よって $1+3+5+7+\dots+(2n-1) = n^2$

1	3	5	7	
1				= 1 ²
1+3				= 2 ²
1+3+5				= 3 ²
1+3+5+7				= 4 ²

問 14 2 から始まる n 個の偶数の和

$$2+4+6+8+\dots+2n \text{ を求めなさい。}$$

15 **問 15** 3 から始まる n 個の 3 の倍数の和

$$3+6+9+12+\dots+3n \text{ を求めなさい。}$$

例題

4

次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。

$$7, 13, 19, \dots, 91$$

解 初項 7 、公差 6 であるから、一般項は

$$a_n = 7 + (n-1) \times 6 = 6n + 1$$

末項 91 が第 n 項であるとする $6n + 1 = 91$

よって $n = 15$

したがって $S = \frac{1}{2} \times 15 \times (7 + 91) = 735$

問 16 次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。

→ p.19 復習問題⑤

25 $8, 15, 22, \dots, 85$

3 等比数列



初項に一定の数を次々にかけて得られる数列について、一般項や和がどのようになるか学びます。

等比数列

日常生活で、数を表すのに用いられる位取りの単位

一, 十, 百, 千, 一万, ...
1, 10, 100, 1000, 10000

5

は、「初項1から始まり、前の項に10をかける」という規則でできている。

このように、初項に一定の数を次々にかけて得られる数列を **等比数列** といい、かける一定の数を **公比** という。

10

●等比数列を調べてみよう。

例 11 (1) 等比数列 4, 12, 36, 108, 324, ... の

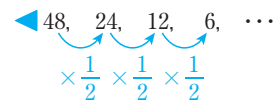
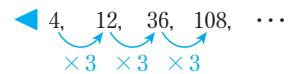
初項は 4

公比は $12 \div 4 = 3$

(2) 等比数列 48, 24, 12, 6, 3, ... の

初項は 48

公比は $24 \div 48 = \frac{1}{2}$



15

問 17 次の等比数列の初項と公比を求めなさい。

(1) 5, 15, 45, 135, ... (2) 54, 18, 6, 2, ...

●等比数列の項を求めてみよう。

20

例 12 等比数列 6, , 54, 162, ... の公比は

$$162 \div 54 = 3$$

であるから, にあてはまる数は

$$6 \times 3 = 18$$

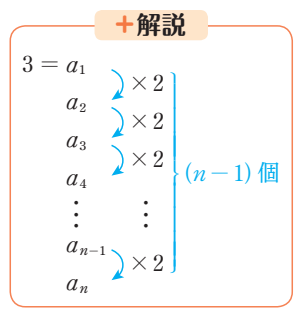
問 18 次の等比数列の にあてはまる数を求めなさい。

25

(1) 14, , 56, 112, ... (2) , 18, -54, 162, ...

等比数列の一般項について考えてみよう。たとえば、
初項 3，公比 2 の等比数列の各項は，次のようになる。

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 3 \\
 a_2 &= a_1 \times 2 = 3 \times 2 = 3 \times 2^1 \\
 a_3 &= a_2 \times 2 = (3 \times 2) \times 2 = 3 \times 2^2 \\
 a_4 &= a_3 \times 2 = (3 \times 2 \times 2) \times 2 = 3 \times 2^3 \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$



このことから， $n \geq 2$ のとき，第 n 項 a_n は，次のようになることがわかる。

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

一般に， $n \geq 2$ のとき，初項 a ，公比 r の等比数列の第 n 項は，次のようになる。

$$a_n = ar^{n-1}$$

ここで $r^0 = 1$ とすると，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

等比数列の一般項
初項 a ，公比 r の等比数列の一般項は
$$a_n = ar^{n-1}$$

● 等比数列の一般項を求めてみよう。

例 13 (1) 初項 2，公比 3 の等比数列の一般項は

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

また，第 5 項は

$$a_5 = 2 \times 3^{5-1} = 2 \times 3^4 = 162$$

(2) 初項 5，公比 -2 の等比数列の一般項は

$$a_n = 5 \times (-2)^{n-1}$$

また，第 4 項は

$$a_4 = 5 \times (-2)^{4-1} = 5 \times (-2)^3 = -40$$

問 19 次の等比数列の一般項を求めなさい。また，第 4 項を求めなさい。

- (1) 初項 4，公比 5 (2) 初項 48，公比 $-\frac{1}{2}$

例題
5

初項 5, 公比 3 の等比数列において, 135 はこの数列の第何項ですか。

解 初項 5, 公比 3 の等比数列の一般項は

$$a_n = 5 \times 3^{n-1}$$

よって, 135 がこの数列の第 n 項であるとする

$$5 \times 3^{n-1} = 135$$

$$3^{n-1} = 27$$

$$3^3 = 27 \text{ であるから } 3^{n-1} = 3^3$$

$$\text{よって, } n-1 = 3 \text{ より } n = 4$$

したがって, 135 は第 4 項である。

5

10

問 20 初項 3, 公比 4 の等比数列において, 768 はこの数列の第何項ですか。

→p.19 復習問題⑥

例題
6

第 2 項が 6, 第 4 項が 24 の等比数列の一般項を求めなさい。

解 初項を a , 公比を r とおくと, 一般項は $a_n = ar^{n-1}$

$$\text{第 2 項が 6 であるから } ar = 6 \quad \dots\dots \text{①}$$

$$\text{第 4 項が 24 であるから } ar^3 = 24 \quad \dots\dots \text{②}$$

$$\text{② より } ar \times r^2 = 24$$

$$\text{① を代入すると } 6 \times r^2 = 24$$

$$\text{よって } r^2 = 4$$

$$\text{したがって } r = \pm 2$$

① より

$$r = 2 \text{ のとき } a = 3$$

$$r = -2 \text{ のとき } a = -3$$

したがって, 一般項は

$$a_n = 3 \times 2^{n-1} \text{ または } a_n = -3 \times (-2)^{n-1}$$

◀はじめに初項と公比を求めろ。

15

20

25

問 21 第 3 項が 36, 第 5 項が 324 の等比数列の一般項を求めなさい。

→p.19 復習問題⑦

等比数列の和

初項 2, 公比 3 の等比数列の初項から第 5 項までの和

$$S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を求めてみよう。

5 ① の両辺に, 公比の 3 をかけると

$$3S = 6 + 18 + 54 + 162 + 486 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

② - ① を計算すると

$$\begin{array}{r} 3S = 6 + 18 + 54 + 162 + 486 \\ -) S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 \\ \hline 2S = -2 \qquad \qquad \qquad + 486 \end{array}$$

10 したがって $S = \frac{486 - 2}{2} = 242$

同じように考えると, 初項 a , 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S は

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

15 ① の両辺に, 公比 r をかけると

$$rS = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

② - ① を計算すると

$$\begin{array}{r} rS = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ -) S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ \hline rS - S = -a \qquad \qquad \qquad + ar^n \end{array}$$

20 よって $(r-1)S = a(r^n - 1)$

したがって, $r \neq 1$ のとき, 両辺を $r-1$ でわって

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

等比数列の和

25 初項 a , 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S は

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{ただし } r \neq 1$$

$r = 1$ のときは, 次のようになる。

$$S = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ 個}} = na$$

●等比数列の和を求めてみよう。

例 14 (1) 初項 3, 公比 2 の等比数列の初項から
第 5 項までの和 S は

$$S = \frac{3 \times (2^5 - 1)}{2 - 1} = 3 \times (32 - 1) = 93$$

$$\leftarrow S = 3 + 6 + 12 + 24 + 48$$

(2) 初項 1, 公比 -3 の等比数列の初項から
第 4 項までの和 S は

$$S = \frac{1 \times \{(-3)^4 - 1\}}{(-3) - 1} = \frac{81 - 1}{-3 - 1} = \frac{80}{-4} = -20$$

5

問 22 次の等比数列の和 S を求めなさい。

→p.19 復習問題⑧

(1) 初項 4, 公比 3, 項数 5

(2) 初項 1, 公比 -2 , 項数 6

10

例 15 等比数列

4, -12 , 36, -108 , \dots

の初項から第 6 項までの和 S は

初項 $a = 4$

公比 $r = (-12) \div 4 = -3$

項数 $n = 6$

15

であるから

$$S = \frac{4 \times \{(-3)^6 - 1\}}{(-3) - 1}$$

$$= \frac{4 \times (729 - 1)}{-3 - 1}$$

$$= \frac{4 \times 728}{-4}$$

$$= -728$$

20

問 23 次の等比数列の和 S を求めなさい。

→p.19 復習問題⑨

(1) 5, 10, 20, 40, \dots の初項から第 6 項まで

(2) 2, -6 , 18, -54 , \dots の初項から第 5 項まで

問 24 1 日目に 100 円, 2 日目に 200 円, 3 日目に 400 円と

いうように, 毎日, 前日の 2 倍の金額を貯金していくと,

10 日目には貯金額は全部で何円になるか求めなさい。

25

復習問題

- 1** 初項 9, 公差 4 の等差数列の一般項を求めなさい。また, 57 はこの数列の第何項ですか。
- 2** 第 7 項が 16, 第 12 項が 41 の等差数列の一般項を求めなさい。
- 3** 次の等差数列の和 S を求めなさい。
(1) 初項 -4 , 末項 41 , 項数 16
(2) $-15, -8, -1, 6, 13, 20$
- 4** 初項 -13 , 公差 4 の等差数列の初項から第 11 項までの和 S を求めなさい。
- 5** 次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。
 $17, 13, 9, \dots, -39$
- 6** 初項 7, 公比 -3 の等比数列において, -189 はこの数列の第何項ですか。
- 7** 第 2 項が 12, 第 4 項が 192 の等比数列の一般項を求めなさい。
- 8** 次の等比数列の和 S を求めなさい。
(1) 初項 3, 公比 4, 項数 5
(2) 初項 4, 公比 -5 , 項数 4
- 9** 次の等比数列の和 S を求めなさい。
(1) $4, -8, 16, -32, \dots$ の初項から第 6 項まで
(2) $6, 18, 54, 162, \dots$ の初項から第 5 項まで

等差数列の一般項

↩ p.10 例題 1

等差数列の一般項

↩ p.10 例題 2

等差数列の和

↩ p.12 例 7

等差数列の和

↩ p.12 例題 3

等差数列の和

↩ p.13 例題 4

等比数列の一般項

↩ p.16 例題 5

等比数列の一般項

↩ p.16 例題 6

等比数列の和

↩ p.18 例 14

等比数列の和

↩ p.18 例 15