1節　数列

1 数列と一般項

ねらい　2，4，6，8，10，･･･のような順序づけられた数の並びについて，その表し方や扱い方を学びます。

数列

サイズ	北海道	北東北	南東北
1	1100	800	700
2	1300	1000	900
3	1500	1200	1100
4	1700	1400	1300
5	1900	1600	1500
6	2100	1800	1700

　私たちのまわりには，順序づけられた数の並びがよく見られる。たとえば，右の表は，ある宅配便の関東から荷物を送る場合の料金表で，北海道に送るときの料金は，サイズごとに

1100，1300，1500，1700，1900，2100

となっている。

　このような，順序づけられた数の並びを **数列**（すうれつ） という。並んでいるそれぞれの数を **項**（こう） といい，初めから順に **第1項**，**第2項**，**第3項**，･･･という。第1項は **初項**（しょこう） ともいう。

　数の並びに限りがある数列では，項の個数を **項数**（こうすう） といい，最後の項は **末項**（まっこう） という。

●数列を調べてみよう。

例1　次の数列の初項は2，末項は12，項数は6である。

2，4，6，8，10，12

問1　次の数列の初項，末項，項数をいいなさい。

(1)　90，80，70，60，50

(2)　4，8，12，16，20，24，28

　例1の数列は，正の偶数を順に並べたものである。

　ここでは，このような簡単な規則によってつくられる数列について考えよう。

問2　次の数列の □ にあてはまる値を求めなさい。

(1)　1，3，□，7，9，11，13，･･･

(2)　5，10，20，40，□，160，320，･･･

(3)　1，4，9，□，25，36，･･･

数列を文字を使って表すときは，第何項であるかを示す番号を小さく添えて，次のように表す。

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \cdots,\quad a_n,\quad \cdots$$

第 1 項　第 2 項　第 3 項　…　第 n 項　…

とくに，a_n は，**第 n 項**，すなわち，初めから数えて n 番目の項を表す。

◀第$\square$項　$a_{\square}$
同じ数
この数列を $\{a_n\}$ と書き表すことがある。

●数列の各項を求めてみよう。

例 2　第 n 項 a_n が

$$a_n = 2n+3$$

と表される数列の

初項は　$a_{1} = 2\times \boxed{1}+3 = 5$

第 2 項は　$a_{2} = 2\times \boxed{2}+3 = 7$

第 3 項は　$a_{3} = 2\times \boxed{3}+3 = 9$

$\cdots\cdots$

◀$a_{\square} = 2\times\square+3$
同じ数を代入

問 3　第 n 項 a_n が次のように表される数列の，初項から第 5 項までを求めなさい。

(1)　$3n-2$　　　　(2)　2^n

例 2 のように，数列の第 n 項が n の式で表されていると，各項を簡単に求めることができる。

数列の第 n 項を n の式で表したものを，その数列の**一般項**（いっぱんこう）という。

●一般項を求めてみよう。

例 3　正の奇数を順に並べた数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots$$

の一般項は

$$a_n = 2n-1$$

である。

問 4　正の偶数を順に並べた数列

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \cdots$$

の一般項 a_n を求めなさい。

2 等差数列

ねらい　初項に一定の数を次々にたして得られる数列について，一般項や和がどのようになるか学びます。

等差数列

　あるタクシーの料金は，走行距離によって，次のようになっている。

　　　710，800，890，980，1070，1160，・・・

この数列は「初項 710 から始まり，前の項に 90 をたす」という規則でできている。

◀ 710，800，890，980，・・・
$+90$　$+90$　$+90$

　このように，初項に一定の数を次々にたして得られる数列を **等差数列**（とうさすうれつ） といい，たす一定の数を **公差**（こうさ） という。

●等差数列を調べてみよう。

例 4　(1)　等差数列 5，11，17，23，29，・・・の

　　　初項は　5

　　　公差は　$11-5=6$

◀ 5，11，17，23，・・・
$+6$　$+6$　$+6$

(2)　等差数列 50，35，20，5，-10，-25，・・・の

　　　初項は　50

　　　公差は　$35-50=-15$

◀ 50，35，20，5，・・・
-15　-15　-15

問 5　次の等差数列の初項と公差を求めなさい。

(1)　9，13，17，21，・・・　　(2)　15，8，1，-6，・・・

●等差数列の項を求めてみよう。

例 5　等差数列 5，$\boxed{\quad}$，13，17，・・・の公差は

　　$17-13=4$

であるから，$\boxed{\quad}$ にあてはまる数は

　　$5+4=9$

問 6　次の等差数列の $\boxed{\quad}$ にあてはまる数を求めなさい。

(1)　16，$\boxed{\quad}$，30，37，・・・　(2)　$\boxed{\quad}$，3，1，-1，・・・

等差数列の一般項について考えてみよう。たとえば，初項 5，公差 2 の等差数列の各項は，次のようになる。

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1 + 2 = 7$$
$$a_3 = a_2 + 2 = 9$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 11$$
$$\cdots\cdots$$

この等差数列の各項は，次のようにして求めることもできる。

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1 + 2 = 5 + 2 = 5 + 2 \times 1$$
$$a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 + 2 = 5 + 2 \times 2$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 + 2 + 2 = 5 + 2 \times 3$$
$$\cdots\cdots$$

このことから，第 n 項，すなわち，一般項 a_n は

$$a_n = 5 + 2 \times (n-1)$$

となることがわかる。

＋解説

$$\begin{array}{l} 5 = a_1 \\ \quad a_2 \\ \quad a_3 \\ \quad a_4 \\ \quad \vdots \\ \quad a_{n-1} \\ \quad a_n \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} +2 \\ +2 \\ +2 \\ \vdots \\ +2 \end{array}\right\} (n-1)\text{個}$$

一般に，等差数列の一般項は，次のようになる。

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$$

●等差数列の一般項を求めてみよう。

例 6 初項 2，公差 3 の等差数列の一般項は

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

また，第 10 項は

$$a_{10} = 3 \times 10 - 1 = 29$$

問 7 次の等差数列の一般項を求めなさい。また，第 25 項を求めなさい。

(1)　初項 3，公差 2　　　(2)　初項 8，公差 -3

例題 1　初項 4，公差 3 の等差数列の一般項を求めなさい。
また，55 はこの数列の第何項ですか。

解　初項 4，公差 3 の等差数列の一般項は

$$a_n = 4+(n-1)\times 3$$

より

$$\boldsymbol{a_n = 3n+1}$$

また，55 がこの数列の第 n 項であるとすると

$$3n+1 = 55$$

よって　　$n = 18$

すなわち，55 は **第 18 項** である。

問 8　初項 9，公差 7 の等差数列の一般項を求めなさい。
また，121 はこの数列の第何項ですか。

→p.19 復習問題1

例題 2　第 4 項が 14，第 10 項が 62 の等差数列の一般項を求めなさい。

解　初項を a，公差を d とおくと，一般項は

◀はじめに初項と公差を求める。

$$a_n = a+(n-1)d$$

第 4 項が 14 であるから　　$a+3d = 14$　……①

第 10 項が 62 であるから　　$a+9d = 62$　……②

②－① より　　$6d = 48$

よって　　$d = 8$

① に代入すると　　$a+3\times 8 = 14$

よって　　$a = -10$

したがって，一般項は

$$a_n = -10+(n-1)\times 8$$

すなわち

$$\boldsymbol{a_n = 8n-18}$$

問 9　第 2 項が －17，第 5 項が 10 の等差数列の一般項を求めなさい。

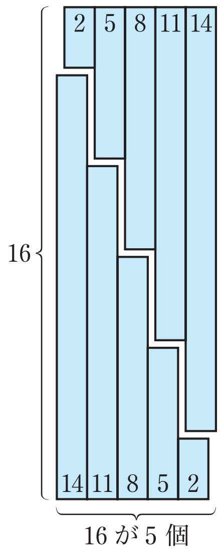
→p.19 復習問題2

等差数列の和

初項 2，公差 3 の等差数列の初項から第 5 項までの和

$$S=2+5+8+11+14 \qquad \cdots\cdots ①$$

を求めてみよう。



たす順序を逆にしても S の値は変わらないから

$$S=14+11+8+5+2 \qquad \cdots\cdots ②$$

①＋② を計算すると

$$\begin{array}{rrl} & S = & 2+\ 5+\ 8+11+14 \\ +) & S = & 14+11+\ 8+\ 5+\ 2 \\ \hline & 2S = & \underbrace{16+16+16+16+16}_{5\text{ 個}} \end{array}$$

よって

$$2S=5\times 16$$

したがって

$$S=\frac{1}{2}\times 5\times 16=40$$

同じように考えると，初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の初項から末項までの和 S は

$$\begin{array}{rrl} & S = & a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l \\ +) & S = & l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+d)+a \\ \hline & 2S = & \underbrace{(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)}_{n\text{ 個}} \end{array}$$

よって

$$2S=n(a+l)$$

したがって

$$S=\frac{1}{2}n(a+l)$$

となる。

等差数列の和

初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S は

$$S=\frac{1}{2}n(a+l)$$

●等差数列の和を求めてみよう。

例 7 等差数列 3, 7, 11, 15, 19, 23 の和 S は，初項 3，末項 23，項数 6 であるから

$$S=\frac{1}{2}\times\underbrace{6}_{\text{項数}}\times(\underbrace{3}_{\text{初項}}+\underbrace{23}_{\text{末項}})=78$$

◀ $\frac{1}{2}\times$(項数)$\times$(初項＋末項)

問 10 次の等差数列の和 S を求めなさい。 ➔p.19 復習問題3

(1) 初項 7, 末項 61, 項数 10

(2) $-11,\ -7,\ -3,\ 1,\ 5,\ 9,\ 13$

例題 3 初項 6，公差 4 の等差数列の初項から第 20 項までの和 S を求めなさい。

解 初項 6，公差 4 の等差数列の一般項は

$$a_n=6+(n-1)\times 4$$

よって，第 20 項，すなわち，末項 l は

$$l=6+(20-1)\times 4=82$$

したがって　$S=\frac{1}{2}\times 20\times(6+82)=880$

問 11 初項 14，公差 -6 の等差数列の初項から第 15 項までの和 S を求めなさい。 ➔p.19 復習問題4

一般に，初項 a，公差 d，項数 n のとき，11 ページの等差数列の和 S を表す式は，次のようになる。

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}}$$

◀ $S=\frac{1}{2}n(a+l)$ の l に
$l=a+(n-1)d$
を代入する。

●等差数列の和を求めてみよう。

例 8 初項 -20，公差 4，項数 13 の等差数列の和 S は

$$S=\frac{1}{2}\times 13\times\{2\times(-20)+(13-1)\times 4\}=52$$

問 12 次の等差数列の和 S を求めなさい。

(1) 初項 5，公差 7，項数 10

(2) 初項 23, 公差 -9, 項数 9

1から n までの自然数 1, 2, 3, $\cdots$, n の和は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから，次のようになる。

$$\boldsymbol{1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)}$$

●自然数の和を求めてみよう。

例 9 $1+2+3+\cdots+10=\dfrac{1}{2}\times10\times(10+1)=55$

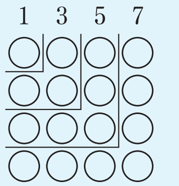
問 13 1から100までの自然数の和を求めなさい。

●自然数のいろいろな和を求めてみよう。

例 10 1から始まる n 個の奇数 1, 3, 5, 7, $\cdots$, $2n-1$ の和は，初項 1，末項 $2n-1$，項数 n の等差数列の和であるから

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=\frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}$$

よって　$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$



$1=1^2$
$1+3=2^2$
$1+3+5=3^2$
$1+3+5+7=4^2$

問 14 2から始まる n 個の偶数の和
$2+4+6+8+\cdots+2n$ を求めなさい。

問 15 3から始まる n 個の3の倍数の和
$3+6+9+12+\cdots+3n$ を求めなさい。

例題 4 次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。

$7,\ 13,\ 19,\ \cdots,\ 91$

解 初項 7，公差 6 であるから，一般項は

$$a_n=7+(n-1)\times6=6n+1$$

末項 91 が第 n 項であるとすると　$6n+1=91$

よって　$n=15$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\times15\times(7+91)=\mathbf{735}$

問 16 次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。 →p.19 復習問題5

$8,\ 15,\ 22,\ \cdots,\ 85$

3 等比数列

ねらい　初項に一定の数を次々にかけて得られる数列について，一般項や和がどのようになるか学びます。

等比数列

日常生活で，数を表すのに用いられる位取りの単位

一，　十，　百，　千，　一万，　$\cdots$

1　10　100　1000　10000

は，「初項 1 から始まり，前の項に 10 をかける」という規則でできている。

このように，初項に一定の数を次々にかけて得られる数列を **等比数列**（とうひすうれつ）といい，かける一定の数を **公比**（こうひ）という。

●等比数列を調べてみよう。

例 11　(1)　等比数列 $4,\ 12,\ 36,\ 108,\ 324,\ \cdots$ の

初項は　4

公比は　$12 \div 4 = 3$

◀ $4,\ 12,\ 36,\ 108,\ \cdots$　$\times 3$　$\times 3$　$\times 3$

(2)　等比数列 $48,\ 24,\ 12,\ 6,\ 3,\ \cdots$ の

初項は　48

公比は　$24 \div 48 = \dfrac{1}{2}$

◀ $48,\ 24,\ 12,\ 6,\ \cdots$　$\times\dfrac{1}{2}$　$\times\dfrac{1}{2}$　$\times\dfrac{1}{2}$

問 17　次の等比数列の初項と公比を求めなさい。

(1)　$5,\ 15,\ 45,\ 135,\ \cdots$　　(2)　$54,\ 18,\ 6,\ 2,\ \cdots$

●等比数列の項を求めてみよう。

例 12　等比数列 $6,\ \boxed{},\ 54,\ 162,\ \cdots$ の公比は

$162 \div 54 = 3$

であるから，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$6 \times 3 = 18$

問 18　次の等比数列の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。

(1)　$14,\ \boxed{},\ 56,\ 112,\ \cdots$　　(2)　$\boxed{},\ 18,\ -54,\ 162,\ \cdots$

等比数列の一般項について考えてみよう。たとえば，初項３，公比２の等比数列の各項は，次のようになる。

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = a_1 \times 2 = 3 \times 2 = 3 \times 2^1$$
$$a_3 = a_2 \times 2 = (3 \times 2) \times 2 = 3 \times 2^2$$
$$a_4 = a_3 \times 2 = (3 \times 2 \times 2) \times 2 = 3 \times 2^3$$
$$\cdots\cdots$$

このことから，$n \geqq 2$ のとき，第 n 項 a_n は，次のようになることがわかる。

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

＋解説

$$\begin{array}{ll} 3 = a_1 & \\ & \times 2 \\ a_2 & \\ & \times 2 \\ a_3 & \\ & \times 2 \\ a_4 & \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \\ & \times 2 \\ a_n & \end{array} \quad \left.\right\} (n-1) \text{ 個}$$

一般に，$n \geqq 2$ のとき，初項 a，公比 r の等比数列の第 n 項は，次のようになる。

$$a_n = ar^{n-1}$$

ここで $r^0 = 1$ とすると，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$$

●等比数列の一般項を求めてみよう。

例 13 (1)　初項２，公比３の等比数列の一般項は

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

また，第５項は

$$a_5 = 2 \times 3^{5-1} = 2 \times 3^4 = 162$$

(2)　初項５，公比 -2 の等比数列の一般項は

$$a_n = 5 \times (-2)^{n-1}$$

また，第４項は

$$a_4 = 5 \times (-2)^{4-1} = 5 \times (-2)^3 = -40$$

問 19 次の等比数列の一般項を求めなさい。また，第４項を求めなさい。

(1)　初項４，公比５　　　　(2)　初項48，公比 $-\dfrac{1}{2}$

例題 5

初項 5，公比 3 の等比数列において，135 はこの数列の第何項ですか。

解 初項 5，公比 3 の等比数列の一般項は

$$a_n = 5 \times 3^{n-1}$$

よって，135 がこの数列の第 n 項であるとすると

$$5 \times 3^{n-1} = 135$$

$$3^{n-1} = 27$$

$3^3 = 27$ であるから　$3^{n-1} = 3^3$

よって，$n - 1 = 3$ より　$n = 4$

したがって，135 は **第 4 項** である。

問 20 初項 3，公比 4 の等比数列において，768 はこの数列の第何項ですか。

→p.19 復習問題6

例題 6

第 2 項が 6，第 4 項が 24 の等比数列の一般項を求めなさい。

解 初項を a，公比を r とおくと，一般項は　$a_n = ar^{n-1}$

◀はじめに初項と公比を求める。

第 2 項が 6 であるから　$ar = 6$　……①

第 4 項が 24 であるから　$ar^3 = 24$　……②

② より　$ar \times r^2 = 24$

① を代入すると　$6 \times r^2 = 24$

よって　$r^2 = 4$

したがって　$r = \pm 2$

① より

$r = 2$ のとき　$a = 3$

$r = -2$ のとき　$a = -3$

したがって，一般項は

$$\boldsymbol{a_n = 3 \times 2^{n-1}} \quad \textbf{または} \quad \boldsymbol{a_n = -3 \times (-2)^{n-1}}$$

問 21 第 3 項が 36，第 5 項が 324 の等比数列の一般項を求めなさい。

→p.19 復習問題7

等比数列の和

初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 5 項までの和

$$S = 2+6+18+54+162 \qquad \cdots\cdots ①$$

を求めてみよう。

① の両辺に，公比の 3 をかけると

$$3S = \quad 6+18+54+162+486 \qquad \cdots\cdots ②$$

②－① を計算すると

$$\begin{array}{rrl} & 3S = & \quad\;\; 6+18+54+162+486 \\ -) & S = & 2+6+18+54+162 \\ \hline & 2S = & -2 \qquad\qquad\qquad\qquad +486 \end{array}$$

したがって　$S = \dfrac{486-2}{2} = 242$

同じように考えると, 初項 a, 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S は

$$S = a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \qquad \cdots\cdots ①$$

① の両辺に，公比 r をかけると

$$rS = \quad ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \qquad \cdots\cdots ②$$

②－① を計算すると

$$\begin{array}{rrl} & rS = & \quad\;\; ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \\ -) & S = & a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \\ \hline & rS-S = & -a \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +ar^n \end{array}$$

よって　$(r-1)S = a(r^n-1)$

したがって，$r \neq 1$ のとき，両辺を $r-1$ でわって

$$S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S は

$$\boldsymbol{S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}} \qquad \text{ただし} \quad r \neq 1$$

$r = 1$ のときは，次のようになる。

$$S = \underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{ 個}} = na$$

1 数列

●等比数列の和を求めてみよう。

例 14 (1) 初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 5 項までの和 S は

◀$S=3+6+12+24+48$

$$S=\frac{3\times(2^5-1)}{2-1}=3\times(32-1)=93$$

(2) 初項 1，公比 -3 の等比数列の初項から第 4 項までの和 S は

$$S=\frac{1\times\{(-3)^4-1\}}{(-3)-1}=\frac{81-1}{-3-1}=\frac{80}{-4}=-20$$

問 22 次の等比数列の和 S を求めなさい。 →p.19 復習問題8

(1) 初項 4，公比 3，項数 5

(2) 初項 1，公比 -2，項数 6

例 15 等比数列

$4,\ -12,\ 36,\ -108,\ \cdots$

の初項から第 6 項までの和 S は

初項　$a=4$

公比　$r=(-12)\div 4=-3$

項数　$n=6$

であるから

$$\begin{aligned}S&=\frac{4\times\{(-3)^6-1\}}{(-3)-1}\\&=\frac{4\times(729-1)}{-3-1}\\&=\frac{4\times 728}{-4}\\&=-728\end{aligned}$$

問 23 次の等比数列の和 S を求めなさい。 →p.19 復習問題9

(1) $5,\ 10,\ 20,\ 40,\ \cdots$ の初項から第 6 項まで

(2) $2,\ -6,\ 18,\ -54,\ \cdots$ の初項から第 5 項まで

問 24 1 日目に 100 円，2 日目に 200 円，3 日目に 400 円というように，毎日，前日の 2 倍の金額を貯金していくと，10 日目には貯金額は全部で何円になるか求めなさい。

復 習 問 題

□**1** 初項 9，公差 4 の等差数列の一般項を求めなさい。また，57 はこの数列の第何項ですか。

等差数列の一般項 ↩p.10 例題 1

□**2** 第 7 項が 16，第 12 項が 41 の等差数列の一般項を求めなさい。

等差数列の一般項 ↩p.10 例題 2

□**3** 次の等差数列の和 S を求めなさい。

(1) 初項 -4，末項 41，項数 16

(2) -15，-8，-1，6，13，20

等差数列の和 ↩p.12 例 7

□**4** 初項 -13，公差 4 の等差数列の初項から第 11 項までの和 S を求めなさい。

等差数列の和 ↩p.12 例題 3

□**5** 次の等差数列の初項から末項までの和 S を求めなさい。

17，13，9，・・・，-39

等差数列の和 ↩p.13 例題 4

□**6** 初項 7，公比 -3 の等比数列において，-189 はこの数列の第何項ですか。

等比数列の一般項 ↩p.16 例題 5

□**7** 第 2 項が 12，第 4 項が 192 の等比数列の一般項を求めなさい。

等比数列の一般項 ↩p.16 例題 6

□**8** 次の等比数列の和 S を求めなさい。

(1) 初項 3，公比 4，項数 5

(2) 初項 4，公比 -5，項数 4

等比数列の和 ↩p.18 例 14

□**9** 次の等比数列の和 S を求めなさい。

(1) 4，-8，16，-32，・・・の初項から第 6 項まで

(2) 6，18，54，162，・・・の初項から第 5 項まで

等比数列の和 ↩p.18 例 15