1章 数列

1節 数列

1 数列と一般項

教科書 P.6

問1 (1) 初項 **90**，末項 **50**，項数 **5**

(2) 初項 **4**，末項 **28**，項数 **7**

問2 (1) 1，3，$\boxed{5}$，7，9，11，13，・・・

(2) 5，10，20，40，$\boxed{80}$，160，320，・・・

(3) 1，4，9，$\boxed{16}$，25，36，・・・

教科書 P.7

問3 (1) 初項は　$a_1 = 3\times1-2 = \mathbf{1}$

第 2 項は　$a_2 = 3\times2-2 = \mathbf{4}$

第 3 項は　$a_3 = 3\times3-2 = \mathbf{7}$

第 4 項は　$a_4 = 3\times4-2 = \mathbf{10}$

第 5 項は　$a_5 = 3\times5-2 = \mathbf{13}$

(2) 初項は　$a_1 = 2^1 = \mathbf{2}$

第 2 項は　$a_2 = 2^2 = \mathbf{4}$

第 3 項は　$a_3 = 2^3 = \mathbf{8}$

第 4 項は　$a_4 = 2^4 = \mathbf{16}$

第 5 項は　$a_5 = 2^5 = \mathbf{32}$

問4 $\boldsymbol{a_n = 2n}$

2 等差数列

教科書 P.8

問5 (1) 等差数列 9，13，17，21，・・・ の

初項は　**9**

公差は　$13-9 = \mathbf{4}$

(2) 等差数列 15，8，1，-6，・・・ の

初項は　**15**

公差は　$8-15 = \mathbf{-7}$

問6 (1) 等差数列 16，$\boxed{}$，30，37，・・・ の公差は

$37-30 = 7$

であるから，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$16+7 = \mathbf{23}$

(2) 等差数列 $\boxed{}$，3，1，-1，・・・ の公差は

$1-3 = -2$

であるから，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$3-(-2) = \mathbf{5}$

教科書 P.9

問7 (1) 初項 3，公差 2 の等差数列の一般項は

$\boldsymbol{a_n} = 3+(n-1)\times2 = \mathbf{2n+1}$

また，第 25 項は

$\boldsymbol{a_{25}} = 2\times25+1 = \mathbf{51}$

(2) 初項 8，公差 -3 の等差数列の一般項は

$\boldsymbol{a_n} = 8+(n-1)\times(-3) = \mathbf{-3n+11}$

また，第 25 項は

$\boldsymbol{a_{25}} = -3\times25+11 = \mathbf{-64}$

教科書 P.10

問8 初項 9，公差 7 の等差数列の一般項は

$a_n = 9+(n-1)\times7$

より

$\boldsymbol{a_n = 7n+2}$

また，121 がこの数列の第 n 項であるとすると

$7n+2 = 121$

よって　$n = 17$

すなわち，121 は **第 17 項** である。

問9 初項を a，公差を d とおくと，一般項は

$a_n = a+(n-1)d$

第 2 項が -17 であるから

$a+d = -17$　…… ①

第 5 項が 10 であるから

$a+4d = 10$　…… ②

② − ① より　$3d = 27$

よって　$d = 9$

① に代入すると　$a+9 = -17$

よって　$a = -26$

したがって，一般項は

$a_n = -26+(n-1)\times9$

すなわち

$\boldsymbol{a_n = 9n-35}$

教科書 P.12

問10 (1) $S = \dfrac{1}{2}\times10\times(7+61) = \mathbf{340}$

(2) 初項 -11，末項 13，項数 7 であるから，その和 S は

$$S = \frac{1}{2}\times7\times(-11+13) = \mathbf{7}$$

問11 初項 14，公差 -6 の等差数列の一般項は

$$a_n=14+(n-1)\times(-6)$$

よって，第 15 項，すなわち，末項 l は

$$l=14+(15-1)\times(-6)=-70$$

したがって

$$S=\frac{1}{2}\times15\times\{14+(-70)\}=\mathbf{-420}$$

問12 (1) $S=\dfrac{1}{2}\times10\times\{2\times5+(10-1)\times7\}=\mathbf{365}$

(2) $S=\dfrac{1}{2}\times9\times\{2\times23+(9-1)\times(-9)\}$

$=\mathbf{-117}$

教科書 P.13

問13 $1+2+3+\cdots+100=\dfrac{1}{2}\times100\times(100+1)$

$=\mathbf{5050}$

問14 2 から始まる n 個の偶数の和は，初項 2，末項 $2n$，項数 n の等差数列の和であるから

$2+4+6+8+\cdots+2n$

$=\dfrac{1}{2}n(2+2n)=\boldsymbol{n(n+1)}$

〔別解〕

$2+4+6+8+\cdots+2n$

$=2\times(1+2+3+4+\cdots+n)$

$=2\times\dfrac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{n(n+1)}$

問15 3 から始まる n 個の 3 の倍数の和は，初項 3，末項 $3n$，項数 n の等差数列の和であるから

$3+6+9+12+\cdots+3n$

$=\dfrac{1}{2}n(3+3n)=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}n(n+1)}$

〔別解〕

$3+6+9+12+\cdots+3n$

$=3\times(1+2+3+4+\cdots+n)$

$=3\times\dfrac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}n(n+1)}$

問16 初項 8，公差 7 であるから，一般項は

$$a_n=8+(n-1)\times7=7n+1$$

末項 85 が第 n 項であるとすると

$$7n+1=85$$

よって　$n=12$

したがって

$$S=\frac{1}{2}\times12\times(8+85)=\mathbf{558}$$

3 等比数列

教科書 P.14

問17 (1) 等比数列 5，15，45，135，$\cdots$ の

初項は　**5**

公比は　$15\div5=\mathbf{3}$

(2) 等比数列 54，18，6，2，$\cdots$ の

初項は　**54**

公比は　$18\div54=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

問18 (1) 等比数列 14，$\boxed{}$，56，112，$\cdots$ の公比は

$$112\div56=2$$

であるから，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$$14\times2=\mathbf{28}$$

(2) 等比数列 $\boxed{}$，18，-54，162，$\cdots$ の公比は

$$(-54)\div18=-3$$

であるから，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$$18\div(-3)=\mathbf{-6}$$

教科書 P.15

問19 (1) 初項 4，公比 5 の等比数列の一般項は

$$\boldsymbol{a_n=4\times5^{n-1}}$$

また，第 4 項は

$$\boldsymbol{a_4}=4\times5^{4-1}=\mathbf{500}$$

(2) 初項 48，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列の一般項は

$$\boldsymbol{a_n=48\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

また，第 4 項は

$$\boldsymbol{a_4}=48\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{4-1}=\mathbf{-6}$$

教科書 P.16

問20 初項 3，公比 4 の等比数列の一般項は

$$a_n=3\times4^{n-1}$$

よって，768 がこの数列の第 n 項であるとすると

$$3\times4^{n-1}=768$$

$$4^{n-1}=256$$

$4^4=256$ であるから　$4^{n-1}=4^4$

よって，$n-1=4$ より　$n=5$

したがって，768 は **第 5 項** である。

問21 初項を a，公比を r とおくと，一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

第 3 項が 36 であるから

$$ar^2 = 36 \quad \cdots\cdots ①$$

第 5 項が 324 であるから

$$ar^4 = 324 \quad \cdots\cdots ②$$

② より　$ar^2 \times r^2 = 324$

① を代入すると　$36 \times r^2 = 324$

よって　$r^2 = 9$

したがって　$r = \pm 3$

① より

$r = 3$ のとき　$a = 4$

$r = -3$ のとき　$a = 4$

したがって，一般項は

$\boldsymbol{a_n = 4 \times 3^{n-1}}$　**または**　$\boldsymbol{a_n = 4 \times (-3)^{n-1}}$

教科書 P.18

問22　(1)　初項 4，公比 3，項数 5 の等比数列の和 S は

$$S = \frac{4 \times (3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{4 \times (243 - 1)}{2} = \mathbf{484}$$

(2)　初項 1，公比 -2，項数 6 の等比数列の和 S は

$$S = \frac{1 \times \{(-2)^6 - 1\}}{(-2) - 1} = \frac{64 - 1}{-3} = \mathbf{-21}$$

問23　(1)　等比数列

5，10，20，40，・・・

の初項から第 6 項までの和 S は

初項　$a = 5$

公比　$r = 10 \div 5 = 2$

項数　$n = 6$

であるから

$$S = \frac{5 \times (2^6 - 1)}{2 - 1} = 5 \times (64 - 1) = \mathbf{315}$$

(2)　等比数列

2，-6，18，-54，・・・

の初項から第 5 項までの和 S は

初項　$a = 2$

公比　$r = (-6) \div 2 = -3$

項数　$n = 5$

であるから

$$S = \frac{2 \times \{(-3)^5 - 1\}}{(-3) - 1} = \frac{2 \times (-243 - 1)}{-4} = \mathbf{122}$$

問24　貯金額は，初項 100，公比 2 の等比数列の初項から第 10 項までの和であるから

$$\frac{100 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 100 \times (1024 - 1) = \mathbf{102300}\ \textbf{(円)}$$

復習問題

教科書 P.19

1　初項 9，公差 4 の等差数列の一般項は

$$a_n = 9 + (n-1) \times 4$$

より

$$\boldsymbol{a_n = 4n + 5}$$

また，57 がこの数列の第 n 項であるとすると

$$4n + 5 = 57$$

よって　$n = 13$

すなわち，57 は **第 13 項** である。

2　初項を a，公差を d とおくと，一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

第 7 項が 16 であるから

$$a + 6d = 16 \quad \cdots\cdots ①$$

第 12 項が 41 であるから

$$a + 11d = 41 \quad \cdots\cdots ②$$

② − ① より　$5d = 25$

よって　$d = 5$

① に代入すると　$a + 6 \times 5 = 16$

よって　$a = -14$

したがって，一般項は

$$a_n = -14 + (n-1) \times 5$$

すなわち

$$\boldsymbol{a_n = 5n - 19}$$

3　(1)　$S = \dfrac{1}{2} \times 16 \times (-4 + 41) = \mathbf{296}$

(2)　初項 -15，末項 20，項数 6 の等差数列であるから，その和 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times (-15 + 20) = \mathbf{15}$$

4　初項 -13，公差 4 の等差数列の一般項は

$$a_n = -13 + (n-1) \times 4$$

よって，第 11 項，すなわち，末項 l は

$$l = -13 + (11-1) \times 4 = 27$$

したがって

$$S=\frac{1}{2}\times 11\times(-13+27)=\mathbf{77}$$

5 初項 17，公差 -4 であるから，一般項は

$$a_n=17+(n-1)\times(-4)=-4n+21$$

末項 -39 が第 n 項であるとすると

$$-4n+21=-39$$

よって　$n=15$

したがって

$$S=\frac{1}{2}\times 15\times\{17+(-39)\}=\mathbf{-165}$$

6 初項 7，公比 -3 の等比数列の一般項は

$$a_n=7\times(-3)^{n-1}$$

よって，-189 がこの数列の第 n 項であるとすると

$$7\times(-3)^{n-1}=-189$$

$$(-3)^{n-1}=-27$$

$(-3)^3=-27$ であるから

$$(-3)^{n-1}=(-3)^3$$

よって，$n-1=3$ より　$n=4$

したがって，-189 は **第 4 項** である。

7 初項を a，公比を r とおくと，一般項は

$$a_n=ar^{n-1}$$

第 2 項が 12 であるから

$$ar=12 \quad \cdots\cdots ①$$

第 4 項が 192 であるから

$$ar^3=192 \quad \cdots\cdots ②$$

② より　$ar\times r^2=192$

① を代入すると　$12\times r^2=192$

よって　$r^2=16$

したがって　$r=\pm 4$

① より

$r=4$ のとき　$a=3$

$r=-4$ のとき　$a=-3$

したがって，一般項は

$$\boldsymbol{a_n=3\times 4^{n-1}} \quad \textbf{または} \quad \boldsymbol{a_n=-3\times(-4)^{n-1}}$$

8 (1) $S=\dfrac{3\times(4^5-1)}{4-1}=\dfrac{3\times(1024-1)}{3}$

$$=\mathbf{1023}$$

(2) $S=\dfrac{4\times\{(-5)^4-1\}}{(-5)-1}=\dfrac{4\times(625-1)}{-6}$

$$=\mathbf{-416}$$

9 (1) 等比数列

4，-8，16，-32，$\cdots$

の初項から第 6 項までの和 S は

初項　$a=4$

公比　$r=(-8)\div 4=-2$

項数　$n=6$

であるから

$$S=\frac{4\times\{(-2)^6-1\}}{(-2)-1}$$

$$=\frac{4\times(64-1)}{-3}$$

$$=\mathbf{-84}$$

(2) 等比数列

6，18，54，162，$\cdots$

の初項から第 5 項までの和 S は

初項　$a=6$

公比　$r=18\div 6=3$

項数　$n=5$

であるから

$$S=\frac{6\times(3^5-1)}{3-1}$$

$$=\frac{6\times(243-1)}{2}$$

$$=\mathbf{726}$$

2 節　いろいろな数列

1　いろいろな数列の和

教科書 P.20

問 1 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}6k=\mathbf{6\times1+6\times2+6\times3+6\times4+6\times5+6\times6}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}10^k=\mathbf{10^1+10^2+10^3+10^4}$

問 2 (1) $5+10+15+20+25+30=\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\boldsymbol{5k}$

(2) $7+7^2+7^3+7^4=\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\boldsymbol{7^k}$

教科書 P.21

問 3 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}5=8\times5=\mathbf{40}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(-2)=5\times(-2)=\mathbf{-10}$

教科書 P.23

問 4 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}k=\frac{1}{2}\times15\times(15+1)=\mathbf{120}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}k=\frac{1}{2}\times40\times(40+1)=\mathbf{820}$

(3) $\sum_{k=1}^{25} k^2 = \frac{1}{6} \times 25 \times (25+1) \times (2 \times 25+1)$

$= \mathbf{5525}$

(4) $\sum_{k=1}^{30} k^2 = \frac{1}{6} \times 30 \times (30+1) \times (2 \times 30+1)$

$= \mathbf{9455}$

教科書 P.24

問5 (1) $\sum_{k=1}^{8}(5k-1)$

$= \sum_{k=1}^{8} 5k + \sum_{k=1}^{8}(-1)$

$= 5\sum_{k=1}^{8} k + \sum_{k=1}^{8}(-1)$

$= 5 \times \frac{1}{2} \times 8 \times (8+1) + 8 \times (-1)$

$= 180 - 8$

$= \mathbf{172}$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(k^2+2)$

$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2$

$= \frac{1}{6} \times 10 \times (10+1) \times (2 \times 10+1) + 10 \times 2$

$= 385 + 20$

$= \mathbf{405}$

(3) $\sum_{k=1}^{6}(3k^2+k+5)$

$= \sum_{k=1}^{6} 3k^2 + \sum_{k=1}^{6} k + \sum_{k=1}^{6} 5$

$= 3\sum_{k=1}^{6} k^2 + \sum_{k=1}^{6} k + \sum_{k=1}^{6} 5$

$= 3 \times \frac{1}{6} \times 6 \times (6+1) \times (2 \times 6+1)$

$+ \frac{1}{2} \times 6 \times (6+1) + 6 \times 5$

$= 273 + 21 + 30$

$= \mathbf{324}$

教科書 P.25

問6 $\sum_{k=1}^{8}(k+5)(k-2)$

$= \sum_{k=1}^{8}(k^2+3k-10)$

$= \sum_{k=1}^{8} k^2 + 3\sum_{k=1}^{8} k + \sum_{k=1}^{8}(-10)$

$= \frac{1}{6} \times 8 \times 9 \times 17 + 3 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 9 + 8 \times (-10)$

$= 204 + 108 - 80$

$= \mathbf{232}$

問7 この数列の第 k 項は $(2k-1)(2k+1)$ と表されるから，求める和は

$\sum_{k=1}^{15}(2k-1)(2k+1)$

$= \sum_{k=1}^{15}(4k^2-1)$

$= 4\sum_{k=1}^{15} k^2 + \sum_{k=1}^{15}(-1)$

$= 4 \times \frac{1}{6} \times 15 \times 16 \times 31 + 15 \times (-1)$

$= 4960 - 15$

$= \mathbf{4945}$

2 階差数列

教科書 P.26

問8 (1) 数列 5，16，33，56，85，･･･ の階差数列は

11，17，23，29，･･･

となり

初項 11，公差 6 の等差数列

である。

(2) 数列 2，50，74，86，92，･･･ の階差数列は

48，24，12，6，･･･

となり

初項 48，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

である。

教科書 P.28

問9 階差数列は

5，7，9，11，･･･

これは，初項 5，公差 2 の等差数列であるから，階差数列の一般項を b_n とすると

$b_n = 5 + (n-1) \times 2 = 2n+3$

よって

$b_{n-1} = 2(n-1) + 3 = 2n+1$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 1 + \{5+7+9+\cdots+(2n+1)\}$

$= 1 + \frac{1}{2}(n-1)\{5+(2n+1)\}$

$= 1 + n^2 + 2n - 3$

$= n^2 + 2n - 2$ ……①

① に $n=1$ を代入すると

$1^2 + 2 \times 1 - 2 = 1$

となり，与えられた数列の初項と一致する。

したがって，一般項 a_n は

$$\boldsymbol{a_n=n^2+2n-2}$$

復習問題

教科書 P.29

1 (1) $7+14+21+28+35+42=\boldsymbol{\sum_{k=1}^{6}7k}$

(2) $5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6=\boldsymbol{\sum_{k=1}^{6}5^k}$

2 (1) $\sum_{k=1}^{20}k=\frac{1}{2}\times20\times(20+1)=\mathbf{210}$

(2) $\sum_{k=1}^{17}k^2=\frac{1}{6}\times17\times(17+1)\times(2\times17+1)$

$=\mathbf{1785}$

3 (1) $\sum_{k=1}^{12}(3k+5)$

$=\sum_{k=1}^{12}3k+\sum_{k=1}^{12}5$

$=3\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}5$

$=3\times\frac{1}{2}\times12\times(12+1)+12\times5$

$=234+60$

$=\mathbf{294}$

(2) $\sum_{k=1}^{7}(k^2-3)$

$=\sum_{k=1}^{7}k^2+\sum_{k=1}^{7}(-3)$

$=\frac{1}{6}\times7\times(7+1)\times(2\times7+1)+7\times(-3)$

$=140-21$

$=\mathbf{119}$

(3) $\sum_{k=1}^{6}(3k^2+2k-10)$

$=\sum_{k=1}^{6}3k^2+\sum_{k=1}^{6}2k+\sum_{k=1}^{6}(-10)$

$=3\sum_{k=1}^{6}k^2+2\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}(-10)$

$=3\times\frac{1}{6}\times6\times(6+1)\times(2\times6+1)$

$+2\times\frac{1}{2}\times6\times(6+1)+6\times(-10)$

$=273+42-60$

$=\mathbf{255}$

4 $\sum_{k=1}^{6}(k+6)(k-4)$

$=\sum_{k=1}^{6}(k^2+2k-24)$

$=\sum_{k=1}^{6}k^2+2\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}(-24)$

$=\frac{1}{6}\times6\times7\times13+2\times\frac{1}{2}\times6\times7+6\times(-24)$

$=91+42-144$

$=\mathbf{-11}$

5 この数列の第 k 項は $2k(k+3)$ と表されるから，求める和は

$\sum_{k=1}^{15}2k(k+3)$

$=\sum_{k=1}^{15}(2k^2+6k)$

$=2\sum_{k=1}^{15}k^2+6\sum_{k=1}^{15}k$

$=2\times\frac{1}{6}\times15\times16\times31+6\times\frac{1}{2}\times15\times16$

$=2480+720$

$=\mathbf{3200}$

6 (1) 数列 40，27，22，25，36，・・・ の階差数列は

$-13,\ -5,\ 3,\ 11,\ \cdots$

となり

初項 -13，公差 8 の等差数列

である。

(2) 数列 10，64，82，88，90，・・・ の階差数列は

$54,\ 18,\ 6,\ 2,\ \cdots$

となり

初項 54，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列

である。

7 階差数列は

$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots$

これは，初項 2，公差 3 の等差数列であるから，階差数列の一般項を b_n とすると

$b_n=2+(n-1)\times3=3n-1$

よって

$b_{n-1}=3(n-1)-1=3n-4$

したがって，$n\geqq2$ のとき

$a_n=5+\{2+5+8+\cdots+(3n-4)\}$

$=5+\frac{1}{2}(n-1)\{2+(3n-4)\}$

$= 5 + \dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{5}{2}n + 1$

$= \dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{5}{2}n + 6$ ……①

① に $n = 1$ を代入すると

$\dfrac{3}{2} \times 1^2 - \dfrac{5}{2} \times 1 + 6 = 5$

となり，与えられた数列の初項と一致する。

したがって，一般項 a_n は

$\boldsymbol{a_n = \dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{5}{2}n + 6}$

3節 漸化式と数学的帰納法

1 漸化式

教科書 P.31

問1 (1) $a_1 = 18$

$a_2 = a_1 + 6 = 18 + 6 = 24$

$a_3 = a_2 + 6 = 24 + 6 = 30$

$a_4 = a_3 + 6 = 30 + 6 = \mathbf{36}$

(2) $a_1 = 7$

$a_2 = -2a_1 = -2 \times 7 = -14$

$a_3 = -2a_2 = -2 \times (-14) = 28$

$a_4 = -2a_3 = -2 \times 28 = \mathbf{-56}$

(3) $a_1 = 4$

$a_2 = 2a_1 - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5$

$a_3 = 2a_2 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$

$a_4 = 2a_3 - 3 = 2 \times 7 - 3 = \mathbf{11}$

問2 (1) $a_1 = 8,\ a_{n+1} = a_n + 3$

$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定められた数列は，初項 8，公差 3 の等差数列であるから，一般項は

$a_n = 8 + (n-1) \times 3$

よって　$\boldsymbol{a_n = 3n + 5}$

(2) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 4a_n$

$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定められた数列は，初項 5，公比 4 の等比数列であるから，一般項は

$\boldsymbol{a_n = 5 \times 4^{n-1}}$

教科書 P.32

問3 $\alpha = 2\alpha - 1$ の解は　$\alpha = 1$

各項から $\alpha = 1$ をひいた数列の一般項を b_n とすると

$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots$

これは，初項 3，公比 2 の等比数列であるから

$b_n = 3 \times 2^{n-1}$

したがって

$\boldsymbol{a_n = b_n + 1 = 3 \times 2^{n-1} + 1}$

2 数学的帰納法

教科書 P.36

問4 〔1〕 $n = 1$ のとき

(左辺) $= 2$

(右辺) $= 1 \times (1 + 1) = 2$

よって，等式 ① は $n = 1$ のとき成り立つ。

〔2〕 $n = k$ のとき

$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k+1)$

が成り立つと仮定すると，$n = k + 1$ のとき

$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k+1)$

$= k(k+1) + 2(k+1)$

$= (k+1)(k+2)$

$= (k+1)\{(k+1)+1\}$

よって，等式 ① は $n = k + 1$ のとき成り立つ。

〔1〕,〔2〕から，すべての自然数 n について等式 ① が成り立つ。

復習問題

1 (1) $a_1 = 10,\ a_{n+1} = a_n + 5$

$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定められた数列は，初項 10，公差 5 の等差数列であるから，一般項は

$a_n = 10 + (n-1) \times 5$

よって　$\boldsymbol{a_n = 5n + 5}$

(2) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = -3a_n$

$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定められた数列は，初項 4，公比 -3 の等比数列であるから，一般項は

$\boldsymbol{a_n = 4 \times (-3)^{n-1}}$

2 $\alpha = 4\alpha - 3$ の解は　$\alpha = 1$

各項から $\alpha = 1$ をひいた数列の一般項を b_n とすると

$1,\ 4,\ 16,\ 64,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots$

これは，初項 1，公比 4 の等比数列であるから

$b_n = 1 \times 4^{n-1} = 4^{n-1}$

したがって

$$a_n = b_n + 1 = 4^{n-1} + 1$$

3 〔1〕 $n=1$ のとき

$(左辺) = 1^3 = 1$

$(右辺) = \frac{1}{4} \times 1^2 \times (1+1)^2 = 1$

よって，等式 ① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕 $n=k$ のとき

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\ &= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3\\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4\times(k+1)\}\\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4)\\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2\\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2\end{aligned}$$

よって，等式 ① は $n=k+1$ のとき成り立つ。

〔1〕,〔2〕から，すべての自然数 n について等式 ① が成り立つ。

章のまとめ

教科書 P.37

❶ (1) 初項に一定の数を次々にたして得られる数列を $\boxed{\textbf{等差数列}}$ といい，たす一定の数を $\boxed{\textbf{公差}}$ という。

(2) 初項 a，公差 d の等差数列の一般項は

$$a_n = \boxed{a+(n-1)d}$$

(3) 初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S は

$$S = \frac{1}{2}\boxed{n(a+l)}$$

❷ (1) 初項に一定の数を次々にかけて得られる数列を $\boxed{\textbf{等比数列}}$ といい，かける一定の数を $\boxed{\textbf{公比}}$ という。

(2) 初項 a，公比 r の等比数列の一般項は

$$a_n = \boxed{ar^{n-1}}$$

(3) 初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S は

$r \neq 1$ のとき $S = \dfrac{\boxed{a(r^n-1)}}{\boxed{r-1}}$,

$r = 1$ のとき $S = \boxed{na}$

❸ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n}\boxed{a_k} + \sum_{k=1}^{n}\boxed{b_k}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k = c\sum_{k=1}^{n}\boxed{a_k}$ （ただし，c は定数）

❹ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}\boxed{n(n+1)}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$\displaystyle= \frac{1}{6}\boxed{n(n+1)(2n+1)}$

❺ 数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$ の階差数列が b_1，b_2，b_3，$\cdots$ であるとすると

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = a_1 + (\boxed{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}})$

❻ 数列で，前の項からその次の項を求める式を $\boxed{\textbf{漸化式}}$ という。

❼ 〔1〕 $\boxed{n=1}$ のとき成り立つことを示す

〔2〕 $\boxed{n=k}$ のとき成り立つことを仮定して，$\boxed{n=k+1}$ で成り立つことを示す