

1 章 数列

1 節 数列

1 数列と一般項

教科書 P.6

- 問1 (1) 初項 90, 末項 50, 項数 5
(2) 初項 4, 末項 28, 項数 7

- 問2 (1) 1, 3, $\boxed{5}$, 7, 9, 11, 13, ...
(2) 5, 10, 20, 40, $\boxed{80}$, 160, 320, ...
(3) 1, 4, 9, $\boxed{16}$, 25, 36, ...

教科書 P.7

- 問3 (1) 初項は $a_1 = 3 \times 1 - 2 = 1$
第2項は $a_2 = 3 \times 2 - 2 = 4$
第3項は $a_3 = 3 \times 3 - 2 = 7$
第4項は $a_4 = 3 \times 4 - 2 = 10$
第5項は $a_5 = 3 \times 5 - 2 = 13$
(2) 初項は $a_1 = 2^1 = 2$
第2項は $a_2 = 2^2 = 4$
第3項は $a_3 = 2^3 = 8$
第4項は $a_4 = 2^4 = 16$
第5項は $a_5 = 2^5 = 32$

問4 $a_n = 2n$

2 等差数列

教科書 P.8

- 問5 (1) 等差数列 9, 13, 17, 21, ... の
初項は 9
公差は $13 - 9 = 4$
(2) 等差数列 15, 8, 1, -6, ... の
初項は 15
公差は $8 - 15 = -7$

- 問6 (1) 等差数列 16, $\boxed{\quad}$, 30, 37, ... の公差は
 $37 - 30 = 7$
であるから, $\boxed{\quad}$ にあてはまる数は
 $16 + 7 = 23$
(2) 等差数列 $\boxed{\quad}$, 3, 1, -1, ... の公差は
 $1 - 3 = -2$
であるから, $\boxed{\quad}$ にあてはまる数は
 $3 - (-2) = 5$

教科書 P.9

- 問7 (1) 初項 3, 公差 2 の等差数列の一般項は
 $a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$

また, 第25項は

$$a_{25} = 2 \times 25 + 1 = 51$$

- (2) 初項 8, 公差 -3 の等差数列の一般項は

$$a_n = 8 + (n-1) \times (-3) = -3n + 11$$

また, 第25項は

$$a_{25} = -3 \times 25 + 11 = -64$$

教科書 P.10

- 問8 初項 9, 公差 7 の等差数列の一般項は

$$a_n = 9 + (n-1) \times 7$$

より

$$a_n = 7n + 2$$

また, 121 がこの数列の第 n 項であるとする
と

$$7n + 2 = 121$$

よって $n = 17$

すなわち, 121 は第17項である。

- 問9 初項を a , 公差を d とおくと, 一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

第2項が -17 であるから

$$a + d = -17 \quad \cdots \textcircled{1}$$

第5項が 10 であるから

$$a + 4d = 10 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より } 3d = 27$$

よって $d = 9$

$$\textcircled{1} \text{ に代入すると } a + 9 = -17$$

よって $a = -26$

したがって, 一般項は

$$a_n = -26 + (n-1) \times 9$$

すなわち

$$a_n = 9n - 35$$

教科書 P.12

問10 (1) $S = \frac{1}{2} \times 10 \times (7 + 61) = 340$

- (2) 初項 -11, 末項 13, 項数 7 であるから,
その和 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times (-11 + 13) = 7$$

問11 初項 14, 公差 -6 の等差数列の一般項は

$$a_n = 14 + (n-1) \times (-6)$$

よって, 第 15 項, すなわち, 末項 l は

$$l = 14 + (15-1) \times (-6) = -70$$

したがって

$$S = \frac{1}{2} \times 15 \times \{14 + (-70)\} = -420$$

問12 (1) $S = \frac{1}{2} \times 10 \times \{2 \times 5 + (10-1) \times 7\} = 365$

$$(2) S = \frac{1}{2} \times 9 \times \{2 \times 23 + (9-1) \times (-9)\} \\ = -117$$

教科書 P.13

問13 $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{1}{2} \times 100 \times (100 + 1) \\ = 5050$

問14 2 から始まる n 個の偶数の和は, 初項 2, 末項 $2n$, 項数 n の等差数列の和であるから

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n \\ = \frac{1}{2} n(2 + 2n) = n(n+1)$$

〔別解〕

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n \\ = 2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) \\ = 2 \times \frac{1}{2} n(n+1) = n(n+1)$$

問15 3 から始まる n 個の 3 の倍数の和は, 初項 3, 末項 $3n$, 項数 n の等差数列の和であるから

$$3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 3n \\ = \frac{1}{2} n(3 + 3n) = \frac{3}{2} n(n+1)$$

〔別解〕

$$3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 3n \\ = 3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) \\ = 3 \times \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{3}{2} n(n+1)$$

問16 初項 8, 公差 7 であるから, 一般項は

$$a_n = 8 + (n-1) \times 7 = 7n + 1$$

末項 85 が第 n 項であるとする

$$7n + 1 = 85$$

よって $n = 12$

したがって

$$S = \frac{1}{2} \times 12 \times (8 + 85) = 558$$

3 等比数列

教科書 P.14

問17 (1) 等比数列 5, 15, 45, 135, \dots の

初項は 5

公比は $15 \div 5 = 3$

(2) 等比数列 54, 18, 6, 2, \dots の

初項は 54

公比は $18 \div 54 = \frac{1}{3}$

問18 (1) 等比数列 14, \square , 56, 112, \dots の公比は

$$112 \div 56 = 2$$

であるから, \square にあてはまる数は

$$14 \times 2 = 28$$

(2) 等比数列 \square , 18, -54 , 162, \dots の

公比は

$$(-54) \div 18 = -3$$

であるから, \square にあてはまる数は

$$18 \div (-3) = -6$$

教科書 P.15

問19 (1) 初項 4, 公比 5 の等比数列の一般項は

$$a_n = 4 \times 5^{n-1}$$

また, 第 4 項は

$$a_4 = 4 \times 5^{4-1} = 500$$

(2) 初項 48, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列の一般項

は

$$a_n = 48 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

また, 第 4 項は

$$a_4 = 48 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{4-1} = -6$$

教科書 P.16

問20 初項 3, 公比 4 の等比数列の一般項は

$$a_n = 3 \times 4^{n-1}$$

よって, 768 がこの数列の第 n 項であるとする

$$3 \times 4^{n-1} = 768$$

$$4^{n-1} = 256$$

$$4^4 = 256 \text{ であるから } 4^{n-1} = 4^4$$

よって, $n-1 = 4$ より $n = 5$

したがって, 768 は第 5 項である。

問21 初項を a , 公比を r とおくと, 一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

第3項が36であるから

$$ar^2 = 36 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

第5項が324であるから

$$ar^4 = 324 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②より $ar^2 \times r^2 = 324$

①を代入すると $36 \times r^2 = 324$

よって $r^2 = 9$

したがって $r = \pm 3$

①より

$r = 3$ のとき $a = 4$

$r = -3$ のとき $a = 4$

したがって、一般項は

$$a_n = 4 \times 3^{n-1} \quad \text{または} \quad a_n = 4 \times (-3)^{n-1}$$

教科書 P.18

問22 (1) 初項4, 公比3, 項数5の等比数列の和Sは

$$\begin{aligned} S &= \frac{4 \times (3^5 - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{4 \times (243 - 1)}{2} \\ &= 484 \end{aligned}$$

(2) 初項1, 公比-2, 項数6の等比数列の和Sは

$$S = \frac{1 \times \{(-2)^6 - 1\}}{(-2) - 1} = \frac{64 - 1}{-3} = -21$$

問23 (1) 等比数列

$$5, 10, 20, 40, \dots$$

の初項から第6項までの和Sは

初項 $a = 5$

公比 $r = 10 \div 5 = 2$

項数 $n = 6$

であるから

$$S = \frac{5 \times (2^6 - 1)}{2 - 1} = 5 \times (64 - 1) = 315$$

(2) 等比数列

$$2, -6, 18, -54, \dots$$

の初項から第5項までの和Sは

初項 $a = 2$

公比 $r = (-6) \div 2 = -3$

項数 $n = 5$

であるから

$$S = \frac{2 \times \{(-3)^5 - 1\}}{(-3) - 1}$$

$$= \frac{2 \times (-243 - 1)}{-4}$$

$$= 122$$

問24 貯金額は、初項100, 公比2の等比数列の初項から第10項までの和であるから

$$\begin{aligned} \frac{100 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} &= 100 \times (1024 - 1) \\ &= 102300 \text{ (円)} \end{aligned}$$

復習問題

教科書 P.19

1 初項9, 公差4の等差数列の一般項は

$$a_n = 9 + (n-1) \times 4$$

より

$$a_n = 4n + 5$$

また、57がこの数列の第n項であるとする

$$4n + 5 = 57$$

よって $n = 13$

すなわち、57は第13項である。

2 初項をa, 公差をdとおくと、一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

第7項が16であるから

$$a + 6d = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

第12項が41であるから

$$a + 11d = 41 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②-①より $5d = 25$

よって $d = 5$

①に代入すると $a + 6 \times 5 = 16$

よって $a = -14$

したがって、一般項は

$$a_n = -14 + (n-1) \times 5$$

すなわち

$$a_n = 5n - 19$$

3 (1) $S = \frac{1}{2} \times 16 \times (-4 + 41) = 296$

(2) 初項-15, 末項20, 項数6の等差数列であるから、その和Sは

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times (-15 + 20) = 15$$

4 初項-13, 公差4の等差数列の一般項は

$$a_n = -13 + (n-1) \times 4$$

よって、第11項, すなわち, 末項lは

$$l = -13 + (11-1) \times 4 = 27$$

したがって

$$S = \frac{1}{2} \times 11 \times (-13 + 27) = 77$$

- 5 初項 17, 公差 -4 であるから, 一般項は

$$a_n = 17 + (n-1) \times (-4) = -4n + 21$$

末項 -39 が第 n 項であるとする

$$-4n + 21 = -39$$

よって $n = 15$

したがって

$$S = \frac{1}{2} \times 15 \times \{17 + (-39)\} = -165$$

- 6 初項 7, 公比 -3 の等比数列の一般項は

$$a_n = 7 \times (-3)^{n-1}$$

よって, -189 がこの数列の第 n 項であるとすると

$$7 \times (-3)^{n-1} = -189$$

$$(-3)^{n-1} = -27$$

$(-3)^3 = -27$ であるから

$$(-3)^{n-1} = (-3)^3$$

よって, $n-1 = 3$ より $n = 4$

したがって, -189 は第 4 項である。

- 7 初項を a , 公比を r とおくと, 一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

第 2 項が 12 であるから

$$ar = 12 \quad \dots\dots ①$$

第 4 項が 192 であるから

$$ar^3 = 192 \quad \dots\dots ②$$

②より $ar \times r^2 = 192$

①を代入すると $12 \times r^2 = 192$

よって $r^2 = 16$

したがって $r = \pm 4$

①より

$$r = 4 \text{ のとき} \quad a = 3$$

$$r = -4 \text{ のとき} \quad a = -3$$

したがって, 一般項は

$$a_n = 3 \times 4^{n-1} \quad \text{または} \quad a_n = -3 \times (-4)^{n-1}$$

- 8 (1) $S = \frac{3 \times (4^5 - 1)}{4 - 1} = \frac{3 \times (1024 - 1)}{3} = 1023$

$$(2) S = \frac{4 \times \{(-5)^4 - 1\}}{(-5) - 1} = \frac{4 \times (625 - 1)}{-6} = -416$$

- 9 (1) 等比数列

4, -8 , 16, -32 , \dots

の初項から第 6 項までの和 S は

初項 $a = 4$

公比 $r = (-8) \div 4 = -2$

項数 $n = 6$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{4 \times \{(-2)^6 - 1\}}{(-2) - 1} \\ &= \frac{4 \times (64 - 1)}{-3} \\ &= -84 \end{aligned}$$

- (2) 等比数列

6, 18, 54, 162, \dots

の初項から第 5 項までの和 S は

初項 $a = 6$

公比 $r = 18 \div 6 = 3$

項数 $n = 5$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{6 \times (3^5 - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{6 \times (243 - 1)}{2} \\ &= 726 \end{aligned}$$

2 節 いろいろな数列

1 いろいろな数列の和

教科書 P.20

問1 (1) $\sum_{k=1}^6 6k = 6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 4 + 6 \times 5 + 6 \times 6$

(2) $\sum_{k=1}^4 10^k = 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4$

問2 (1) $5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 = \sum_{k=1}^6 5k$

(2) $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = \sum_{k=1}^4 7^k$

教科書 P.21

問3 (1) $\sum_{k=1}^8 5 = 8 \times 5 = 40$

(2) $\sum_{k=1}^5 (-2) = 5 \times (-2) = -10$

教科書 P.23

問4 (1) $\sum_{k=1}^{15} k = \frac{1}{2} \times 15 \times (15 + 1) = 120$

(2) $\sum_{k=1}^{40} k = \frac{1}{2} \times 40 \times (40 + 1) = 820$

$$(3) \sum_{k=1}^{25} k^2 = \frac{1}{6} \times 25 \times (25+1) \times (2 \times 25 + 1)$$

$$= 5525$$

$$(4) \sum_{k=1}^{30} k^2 = \frac{1}{6} \times 30 \times (30+1) \times (2 \times 30 + 1)$$

$$= 9455$$

教科書 P.24

問5

$$(1) \sum_{k=1}^8 (5k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^8 5k + \sum_{k=1}^8 (-1)$$

$$= 5 \sum_{k=1}^8 k + \sum_{k=1}^8 (-1)$$

$$= 5 \times \frac{1}{2} \times 8 \times (8+1) + 8 \times (-1)$$

$$= 180 - 8$$

$$= 172$$

$$(2) \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2$$

$$= \frac{1}{6} \times 10 \times (10+1) \times (2 \times 10 + 1) + 10 \times 2$$

$$= 385 + 20$$

$$= 405$$

$$(3) \sum_{k=1}^6 (3k^2 + k + 5)$$

$$= \sum_{k=1}^6 3k^2 + \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 5$$

$$= 3 \sum_{k=1}^6 k^2 + \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 5$$

$$= 3 \times \frac{1}{6} \times 6 \times (6+1) \times (2 \times 6 + 1)$$

$$+ \frac{1}{2} \times 6 \times (6+1) + 6 \times 5$$

$$= 273 + 21 + 30$$

$$= 324$$

教科書 P.25

問6

$$\sum_{k=1}^8 (k+5)(k-2)$$

$$= \sum_{k=1}^8 (k^2 + 3k - 10)$$

$$= \sum_{k=1}^8 k^2 + 3 \sum_{k=1}^8 k + \sum_{k=1}^8 (-10)$$

$$= \frac{1}{6} \times 8 \times 9 \times 17 + 3 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 9 + 8 \times (-10)$$

$$= 204 + 108 - 80$$

$$= 232$$

問7

この数列の第 k 項は $(2k-1)(2k+1)$ と表されるから、求める和は

$$\sum_{k=1}^{15} (2k-1)(2k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{15} (4k^2 - 1)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{15} k^2 + \sum_{k=1}^{15} (-1)$$

$$= 4 \times \frac{1}{6} \times 15 \times 16 \times 31 + 15 \times (-1)$$

$$= 4960 - 15$$

$$= 4945$$

2 階差数列

教科書 P.26

問8

(1) 数列 5, 16, 33, 56, 85, ... の階差数列は

$$11, 17, 23, 29, \dots$$

となり

初項 11, 公差 6 の等差数列

である。

(2) 数列 2, 50, 74, 86, 92, ... の階差数列は

は

$$48, 24, 12, 6, \dots$$

となり

初項 48, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

である。

教科書 P.28

問9

階差数列は

$$5, 7, 9, 11, \dots$$

これは、初項 5, 公差 2 の等差数列であるから、階差数列の一般項を b_n とすると

$$b_n = 5 + (n-1) \times 2 = 2n + 3$$

よって

$$b_{n-1} = 2(n-1) + 3 = 2n + 1$$

したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \{5 + 7 + 9 + \dots + (2n+1)\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(n-1)\{5 + (2n+1)\}$$

$$= 1 + n^2 + 2n - 3$$

$$= n^2 + 2n - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①に $n=1$ を代入すると

$$1^2 + 2 \times 1 - 2 = 1$$

となり、与えられた数列の初項と一致する。

したがって、一般項 a_n は

$$a_n = n^2 + 2n - 2$$

復習問題

教科書 P.29

1 (1) $7 + 14 + 21 + 28 + 35 + 42 = \sum_{k=1}^6 7k$

(2) $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 = \sum_{k=1}^6 5^k$

2 (1) $\sum_{k=1}^{20} k = \frac{1}{2} \times 20 \times (20 + 1) = 210$

(2) $\sum_{k=1}^{17} k^2 = \frac{1}{6} \times 17 \times (17 + 1) \times (2 \times 17 + 1)$
 $= 1785$

3 (1) $\sum_{k=1}^{12} (3k + 5)$

$$= \sum_{k=1}^{12} 3k + \sum_{k=1}^{12} 5$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=1}^{12} 5$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} \times 12 \times (12 + 1) + 12 \times 5$$

$$= 234 + 60$$

$$= 294$$

(2) $\sum_{k=1}^7 (k^2 - 3)$

$$= \sum_{k=1}^7 k^2 + \sum_{k=1}^7 (-3)$$

$$= \frac{1}{6} \times 7 \times (7 + 1) \times (2 \times 7 + 1) + 7 \times (-3)$$

$$= 140 - 21$$

$$= 119$$

(3) $\sum_{k=1}^6 (3k^2 + 2k - 10)$

$$= \sum_{k=1}^6 3k^2 + \sum_{k=1}^6 2k + \sum_{k=1}^6 (-10)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^6 k^2 + 2 \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 (-10)$$

$$= 3 \times \frac{1}{6} \times 6 \times (6 + 1) \times (2 \times 6 + 1)$$

$$+ 2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times (6 + 1) + 6 \times (-10)$$

$$= 273 + 42 - 60$$

$$= 255$$

4 $\sum_{k=1}^6 (k + 6)(k - 4)$

$$= \sum_{k=1}^6 (k^2 + 2k - 24)$$

$$= \sum_{k=1}^6 k^2 + 2 \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 (-24)$$

$$= \frac{1}{6} \times 6 \times 7 \times 13 + 2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 7 + 6 \times (-24)$$

$$= 91 + 42 - 144$$

$$= -11$$

5 この数列の第 k 項は $2k(k + 3)$ と表されるから、求める和は

$$\sum_{k=1}^{15} 2k(k + 3)$$

$$= \sum_{k=1}^{15} (2k^2 + 6k)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{15} k^2 + 6 \sum_{k=1}^{15} k$$

$$= 2 \times \frac{1}{6} \times 15 \times 16 \times 31 + 6 \times \frac{1}{2} \times 15 \times 16$$

$$= 2480 + 720$$

$$= 3200$$

6 (1) 数列 40, 27, 22, 25, 36, … の階差数列は

$$-13, -5, 3, 11, \dots$$

となり

初項 -13 、公差 8 の等差数列

である。

(2) 数列 10, 64, 82, 88, 90, … の階差数列は

$$54, 18, 6, 2, \dots$$

となり

初項 54 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列

である。

7 階差数列は

$$2, 5, 8, 11, \dots$$

これは、初項 2 、公差 3 の等差数列であるから、階差数列の一般項を b_n とすると

$$b_n = 2 + (n - 1) \times 3 = 3n - 1$$

よって

$$b_{n-1} = 3(n - 1) - 1 = 3n - 4$$

したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 5 + \{2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 4)\}$$

$$= 5 + \frac{1}{2} (n - 1) \{2 + (3n - 4)\}$$

$$= 5 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 1$$

$$= \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①に $n=1$ を代入すると

$$\frac{3}{2} \times 1^2 - \frac{5}{2} \times 1 + 6 = 5$$

となり、与えられた数列の初項と一致する。

したがって、一般項 a_n は

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 6$$

3 節 漸化式と数学的帰納法

1 漸化式

教科書 P.31

問1 (1) $a_1 = 18$

$$a_2 = a_1 + 6 = 18 + 6 = 24$$

$$a_3 = a_2 + 6 = 24 + 6 = 30$$

$$a_4 = a_3 + 6 = 30 + 6 = 36$$

(2) $a_1 = 7$

$$a_2 = -2a_1 = -2 \times 7 = -14$$

$$a_3 = -2a_2 = -2 \times (-14) = 28$$

$$a_4 = -2a_3 = -2 \times 28 = -56$$

(3) $a_1 = 4$

$$a_2 = 2a_1 - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5$$

$$a_3 = 2a_2 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$$

$$a_4 = 2a_3 - 3 = 2 \times 7 - 3 = 11$$

問2 (1) $a_1 = 8, a_{n+1} = a_n + 3$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められた数列は、初項 8、公差 3 の等差数列であるから、一般項は

$$a_n = 8 + (n-1) \times 3$$

よって $a_n = 3n + 5$

(2) $a_1 = 5, a_{n+1} = 4a_n$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められた数列は、初項 5、公比 4 の等比数列であるから、一般項は

$$a_n = 5 \times 4^{n-1}$$

教科書 P.32

問3 $\alpha = 2\alpha - 1$ の解は $\alpha = 1$

各項から $\alpha = 1$ をひいた数列の一般項を b_n とすると

$$3, 6, 12, 24, \dots, b_n, \dots$$

これは、初項 3、公比 2 の等比数列であるから

$$b_n = 3 \times 2^{n-1}$$

したがって

$$a_n = b_n + 1 = 3 \times 2^{n-1} + 1$$

2 数学的帰納法

教科書 P.36

問4 [1] $n = 1$ のとき

$$(\text{左辺}) = 2$$

$$(\text{右辺}) = 1 \times (1+1) = 2$$

よって、等式①は $n=1$ のとき成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k+1)$$

が成り立つと仮定すると、 $n = k+1$ のとき

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1)$$

$$= k(k+1) + 2(k+1)$$

$$= (k+1)(k+2)$$

$$= (k+1)\{(k+1)+1\}$$

よって、等式①は $n = k+1$ のとき成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について等式①が成り立つ。

復習問題

1 (1) $a_1 = 10, a_{n+1} = a_n + 5$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められた数列は、初項 10、公差 5 の等差数列であるから、一般項は

$$a_n = 10 + (n-1) \times 5$$

よって $a_n = 5n + 5$

(2) $a_1 = 4, a_{n+1} = -3a_n$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められた数列は、初項 4、公比 -3 の等比数列であるから、一般項は

$$a_n = 4 \times (-3)^{n-1}$$

2 $\alpha = 4\alpha - 3$ の解は $\alpha = 1$

各項から $\alpha = 1$ をひいた数列の一般項を b_n とすると

$$1, 4, 16, 64, \dots, b_n, \dots$$

これは、初項 1、公比 4 の等比数列であるから

$$b_n = 1 \times 4^{n-1} = 4^{n-1}$$

したがって

$$a_n = b_n + 1 = 4^{n-1} + 1$$

3 [1] $n = 1$ のとき

$$(\text{左辺}) = 1^3 = 1$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{4} \times 1^2 \times (1+1)^2 = 1$$

よって、等式①は $n = 1$ のとき成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{1}{4} k^2 (k+1)^2$$

が成り立つと仮定すると、 $n = k+1$ のとき

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3$$

$$= \frac{1}{4} k^2 (k+1)^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{1}{4} (k+1)^2 \{k^2 + 4 \times (k+1)\}$$

$$= \frac{1}{4} (k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)$$

$$= \frac{1}{4} (k+1)^2 (k+2)^2$$

$$= \frac{1}{4} (k+1)^2 \{(k+1) + 1\}^2$$

よって、等式①は $n = k+1$ のとき成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について等式①が成り立つ。

(3) 初項 a 、公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S は

$$r \neq 1 \text{ のとき } S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1},$$

$$r = 1 \text{ のとき } S = na$$

$$3 \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{ただし, } c \text{ は定数})$$

$$4 \quad \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

5 数列 a_1, a_2, a_3, \dots の階差数列が b_1, b_2, b_3, \dots であるとする

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1})$$

6 数列で、前の項からその次の項を求める式を漸化式という。

7 [1] $n = 1$ のとき成り立つことを示す

[2] $n = k$ のとき成り立つことを仮定して、

$$n = k+1 \text{ で成り立つことを示す}$$

章のまとめ

教科書 P.37

1 (1) 初項に一定の数を次々にたして得られる数列を等差数列といい、たす一定の数を公差という。

(2) 初項 a 、公差 d の等差数列の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

(3) 初項 a 、末項 l 、項数 n の等差数列の和 S は

$$S = \frac{1}{2} n(a+l)$$

2 (1) 初項に一定の数を次々にかけて得られる数列を等比数列といい、かける一定の数を公比という。

(2) 初項 a 、公比 r の等比数列の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$