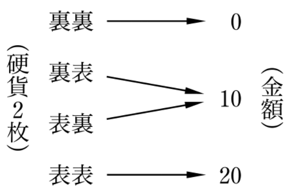
1節 確率分布

❶ 確率変数と確率分布

確率変数と確率分布

（教科書 p.112）



試行の結果によって値が定まる変数を（①　　　　　　　　　　）という。

確率変数のとる値にその値をとる確率を対応させたものを，この確率変数の（②　　　　　　　　　）または単に（③　　　　　　　）といい，確率変数 X は，この分布に（④　　　　　　）という。

一般に，確率変数 X のとる値が x_1，x_2，…，x_n であるとき，$P(X=x_i)$ を p_i とすれば次が成り立つ。

(1)　$p_1 \geqq 0$，$p_2 \geqq 0$，…，$p_n \geqq 0$

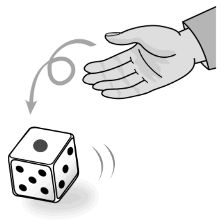
(2)　$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

例1 1，2，5，10 の数を書いた札が，それぞれ 1 枚，2 枚，3 枚，4 枚ある。この 10 枚の札から 1 枚引き，その札に書いてある数の 100 倍の金額をもらえるとする。この金額を X とすると，X は（　　　　　　　　　　　　　　）の値をとる確率変数であり，X の確率分布は次の表のようになる。

X					計
P					

問1 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の差の絶対値を X とする。X の確率分布を求めよ。

例2 1個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とすると，X は確率変数である。このとき，X は（　　　　　　　　　　　　　　）の値をとり，その確率分布は下の表のようになる。5の目が出る事象は（　　　　　　）と表せ，その確率は次のようになる。



X							計
P							

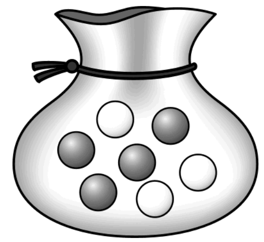
問2 例2で，X を用いて次の事象を表し，その確率を求めよ。

(1)　3の目が出る事象

(2)　2以上5以下の目が出る事象

例題 1 赤球4個と白球3個が入っている袋から同時に2個の球を取り出すとき，その中に含まれている赤球の個数 X の確率分布を求めよ。

解



問3 例題1で，取り出す球の中に含まれている白球の個数 Y の確率分布を求めよ。

問4 1 から 9 までの数を 1 つずつ書いた札が 9 枚ある。ここから同時に 3 枚の札を引くとき，その中に含まれている奇数が書かれた札の枚数 X の確率分布を求めよ。

❷ 確率変数の平均と分散

確率変数の平均

（教科書 p.115）

一般に，確率変数 X が右の表の確率分布に従うとき

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

を確率変数 X の（⑤　　　　　）または（⑥　　　　　）といい，（⑦　　　　　）で表す。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

確率変数の平均
$\boldsymbol{E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}$

注意　$E(X)$ の E は期待値を意味する Expectation の頭文字である。

例3 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とすると

であるから，X の平均は次のようになる。

問5 1 個のさいころを投げて，偶数の目が出れば目の数の 2 倍の点数，奇数の目が出れば目の数と同じ点数をもらうゲームを行う。このとき，もらえる点数 X の平均を求めよ。

例題 2 2 本の当たりくじを含む 10 本のくじがある。この中から同時に 2 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数を X とする。X の確率分布と平均を求めよ。

解

問6 例題 2 で，同時に 3 本のくじを引くときの当たりくじの本数を Y とする。Y の確率分布と平均を求めよ。

問7 10 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げるとき，表の出る硬貨をもらえるという。このとき，もらえる金額 X の平均を求めよ。

確率変数 $aX+b$ の平均

（教科書 p.117）

確率変数 $\boldsymbol{aX+b}$ の平均
a，b を定数とするとき $\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b}$

例4 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数 X の 100 倍から 300 を引いた点数 $100X-300$ の平均は，例 3 より $E(X)=$（　　　　）であるから

$E(100X-300)=$

問8 例 4 の X について，次の確率変数の平均を求めよ。

(1)　$X+10$　　(2)　$-X$　　(3)　$10X-40$

確率変数 X に対して，X の平均を m とするとき，$X-m$ を X の平均からの（⑧　　　　　）という。偏差 $X-m$ の平均 $E(X-m)$ について次の式が成り立つ。

$E(X-m)=E(X)-m=m-m=0$

確率変数の分散

（教科書 p.118）

確率変数 X のとる値を x_1，x_2，…，x_n，確率 $P(X=x_i)$ を p_i，X の平均を m とするとき

（⑨　　　　　　　　　　　　　　　　　　）……①

を確率変数 X の（⑩　　　　　）といい，（⑪　　　　　）で表す。分散は X の平均 m からの偏差の 2 乗 $(X-m)^2$ の平均であるから，次のように表される。

確率変数の分散
$\boldsymbol{V(X)=E((X-m)^2)}$

注意　$V(X)$ の V は分散を意味する Variance の頭文字である。

例5 前ページの X の分散は，$m=3$ より次のようになる。

$V(X)=$

問9 前ページの Y の分散を計算して，例 5 の X の分散と比較せよ。

分散の計算
$\boldsymbol{V(X)=E(X^2)-m^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2}$

例6 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とすると

$E(X^2)=$

また，例 3 より $E(X)=m=\frac{7}{2}$ であるから，X の分散は

$V(X)=$

問 10 硬貨 2 枚を同時に投げるとき，表が出る枚数 X の分散を求めよ。

確率変数の標準偏差

（教科書 p.120）

分散 $V(X)$ の正の平方根 $\sqrt{V(X)}$ を X の（⑫　　　　　　）といい，（⑬　　　　　）で表す。

すなわち　　　　　（⑭　　　　　　　　）

注意　標準偏差は standard deviation といい，$\sigma(X)$ の σ は，この頭文字 s に相当するギリシャ文字である。

例7 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とすると，前ページの例 6 より，

$V(X) =$（　　　　）であるから，X の標準偏差は

$\sigma(X) =$

例題 3 硬貨 3 枚を同時に投げるとき，表が出る枚数 X の標準偏差を求めよ。

解

問 11 10 本のくじの中に，当たりくじは 1 等 500 円が 1 本，2 等 200 円が 3 本入っている。これから 1 本のくじを引くときの賞金額 X の標準偏差を求めよ。

p.131 Training 1　p.154 LevelUp 1

確率変数 $aX+b$ の分散と標準偏差

（教科書 p.121）

確率変数 $\boldsymbol{aX+b}$ の分散と標準偏差
$\boldsymbol{V(aX+b)=a^2V(X)}$ $\boldsymbol{\sigma(aX+b)=\lvert a\rvert\sigma(X)}$

例8 1個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とする。このとき，$4X+5$ の分散と標準偏差を求めてみよう。

例6，例7より，$V(X)=$（　　　　），$\sigma(X)=$（　　　　）であるから

$V(4X+5)=$

$\sigma(4X+5)=$

問12 例8の X について，次の確率変数の分散と標準偏差を求めよ。

(1)　$3X+1$　　(2)　$-X$　　(3)　$5-6X$

p.131 Training 2

③ 確率変数の和と積

確率変数の和の平均

（教科書 p.122）

一般に，2つの確率変数 X，Y に対して，次の式が成り立つ。

確率変数の和の平均
$\boldsymbol{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$

上の式は，3つ以上の確率変数の和に対しても成り立つ。

たとえば，3つの確率変数 X，Y，Z に対して，次の式が成り立つ。

（⑮　　　　　　　　　　　　　　　）

例9 2個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X，Y とする。このとき，和 $X+Y$ の平均は次のようになる。

$E(X+Y)=$　　　　←p.116 例3

問13 2つの確率変数 X，Y のとる値と，X，Y の値の組に対する確率が右の表で与えられているとき，X，Y および $X+Y$ の平均をそれぞれ求めよ。

X \ Y	0	1	計
0	0.3	0.4	0.7
1	0.1	0.2	0.3
計	0.4	0.6	1

独立な確率変数

（教科書 p.124）

2つの確率変数 X，Y があって，X のとる任意の値 a と Y のとる任意の値 b に対して

（⑯　　　　　　　　　　　　　　　）

が成り立つとき，確率変数 X，Y は（⑰　　　　　）であるという。

例10 2つの確率変数 X，Y のとる値と，X，Y の値の組に対する確率が右の表で与えられているとき，$X=2$，$Y=1$ となる確率は

X \ Y	1	2	計
2	0.28	0.42	0.7
4	0.12	0.18	0.3
計	0.4	0.6	1

$P(X=2,\ Y=1)=$

一方　$P(X=2)\cdot P(Y=1)=$

となるから　$P(X=2,\ Y=1)=$

が成り立つ。

同様の式が，X，Y の他の値のすべての組の確率に対しても成り立つから，2つの確率変数 X，Y は（　　　　）である。

独立な確率変数の積の平均

（教科書 p.125）

独立な確率変数の積の平均
X, Y が独立であるとき　$\boldsymbol{E(XY)=E(X)\cdot E(Y)}$

また，3 つの独立な確率変数 X, Y, Z に対しても同様に，次の式が成り立つ。

（⑱　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

例 11 2 個のさいころ A, B を同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X, Y とする。それぞれのさいころを投げる試行は独立であるから，X, Y は独立であり，2 つの目の数の積 XY の平均は

← p.116 例 3

問 14 1 枚の硬貨を投げて，表が出れば 2 点，裏が出れば 1 点が得られるという。硬貨を 2 回投げるとき，2 回の得点の積の平均を求めよ。

独立な確率変数の和の分散

（教科書 p.126）

独立な確率変数の和の分散
X, Y が独立であるとき　$\boldsymbol{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$

また，3 つの独立な確率変数 X, Y, Z に対しても同様に，次の式が成り立つ。

（⑲　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

例 12 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X, Y とする。X, Y は独立であり，119 ページの例 6 より $V(X)=$（　　　　　　　　）であるから，$X+Y$ の分散，標準偏差は

$V(X+Y)=$

$\sigma(X+Y)=$

問 15 1 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げる試行で，硬貨の表が出るとき 1，裏が出るとき0 を対応させる確率変数を X，さいころの出る目の数を Y とする。このとき，確率変数 $X+Y$ の分散と標準偏差を求めよ。

p.131 Training 3　p.154 Level Up 2,3

❹ 二項分布

二項分布 $B(n,\ p)$

（教科書 p.127）

一般に，ある試行で，事象 A が起こる確率を p とし，A が起こらない確率を $q=1-p$ とおく。これを n 回くり返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすれば，X は確率変数であり，そのとる値は 0 から n までの整数である。また，$X=r$ となる確率は

（㉚　　　　　　　　　　　　　）$(r=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$

である。したがって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	$\cdots$	r	$\cdots$	n	計
P	${}_nC_0q^n$	${}_nC_1pq^{n-1}$	$\cdots$	${}_nC_rp^rq^{n-r}$	$\cdots$	${}_nC_np^n$	1

確率変数 X の確率分布が上の表のようになるとき，この確率分布を確率 p に対する次数 n の（㉑　　　　　　　　）といい，（㉒　　　　　　　　）で表す。

注意　B は二項分布を意味する Binomial distribution の頭文字である。

二項分布 $\boldsymbol{B(n,\ p)}$ の確率
$\boldsymbol{P(X=r)={}_nC_rp^rq^{n-r}}$　　$\begin{pmatrix} r=0,\ 1,\ \cdots,\ n \\ q=1-p \end{pmatrix}$

例 13 1 枚の硬貨をくり返し 10 回投げるとき，表の出る回数を確率変数 X とすると，X は二項分布

（　　　　　　　　）に従う。

問 16 次の確率変数は二項分布に従う。それぞれの二項分布 $B(n,\ p)$ における $n,\ p$ の値を求めよ。

(1)　2 個のさいころを同時に投げる試行を 8 回くり返すとき，2 個とも 6 の目が出る回数 X

(2)　3 個のさいころを同時に投げる試行を 10 回くり返すとき，3 個とも同じ目が出る回数 Y

例 14 1 個のさいころを 4 回くり返し投げるとき，3 の倍数の目が出る回数を確率変数 X とすると，

$n=$（　　　　），$p=$（　　　　　）より，X は二項分布（　　　　　）に従う。

したがって，$X=r$ となる確率は

であり，確率分布は右の表のようになる。

X						計
P						

問 17 確率変数 X が二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(X=1)$

(2)　$P(X=3)$

問 18 1 枚の硬貨を 3 回くり返し投げるとき，表が出る回数を X とする。X の確率分布を求めよ。

二項分布の平均と分散

（教科書 p.129）

二項分布の平均と分散
確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき $\boldsymbol{E(X)=np},\ \boldsymbol{V(X)=npq}$　　ただし，$q=1-p$

例 15 確率変数 X が二項分布 $B\left(10,\ \frac{1}{4}\right)$ に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めてみよう。

$E(X)=$

$V(X)=$

$\sigma(X)=$

問 19 確率変数 X が次の二項分布に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

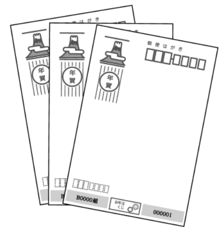
p.131 Training 4

⑴　$B\left(30,\ \frac{1}{6}\right)$

⑵　$B\left(50,\ \frac{1}{2}\right)$

⑶　$B(100,\ 0.36)$

例 16 お年玉つき年賀はがきの 3 等に当たる確率が 0.02 であるとする。100 枚の年賀はがきのうち 3 等に当たる枚数を X とすると，確率変数 X は二項分布（　　　　　　　　　）に従う。X の平均と標準偏差は



$E(X)=$

$\sigma(X)=$

問 20 1 個のさいころを投げる試行を 60 回くり返すとき，6 の目が出る回数 X の平均と標準偏差を求めよ。

問 21 ある製品を製造する際，不良品が生じる確率は 0.04 であることがわかっている。この製品を 600 個製造するとき，その中に含まれる不良品の個数 X の平均と標準偏差を求めよ。

p.131 Training 5　p.154-155 LevelUp 4-6

Training

（教科書 p.131）

1 6 本のくじの中に，当たりくじは 1 等 1000 円が 1 本，2 等 500 円が 2 本入っている。このくじを同時に 2 本引くときのもらえる賞金額を X とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) X の確率分布を求めよ。

(2) X の平均を求めよ。

(3) X の分散と標準偏差を求めよ。

2 確率変数 X の分散が 3 のとき，次の確率変数の分散と標準偏差を求めよ。

(1) $5X+2$

(2) $4-2X$

3 独立な確率変数 X, Y の分布がそれぞれ下の表で与えられている。このとき，次の確率変数の平均と分散を求めよ。ただし，(3)は平均のみでよい。

(1) $25-10X$　　(2) $X+Y$　　(3) XY

X	0	1	2	計
P	0.1	0.6	0.3	1

Y	0	1	2	計
P	0.2	0.6	0.2	1

4 確率変数 X が二項分布 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$ に従うとき，次の確率変数の平均と分散を求めよ。

(1) $2X+30$

(2) $-X$

(3) $\frac{X-20}{4}$

5 袋の中に赤球 3 個と白球 2 個が入っている。この袋の中から球を 1 個取り出し，色を調べてもとに戻す。これを 50 回くり返すとき，赤球を取り出す回数 X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

1 節 確率分布

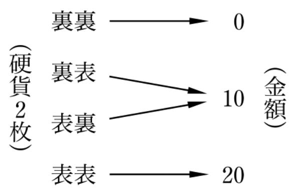
❶ 確率変数と確率分布

確率変数と確率分布

（教科書 p.112）

試行の結果によって値が定まる変数を（① 確率変数 ）という。

確率変数のとる値にその値をとる確率を対応させたものを，この確率変数の（② 確率分布 ）または単に（③ 分布 ）といい，確率変数 X は，この分布に（④ 従う ）という。



一般に，確率変数 X のとる値が x_1，x_2，⋯，x_n であるとき，$P(X=x_i)$ を p_i とすれば次が成り立つ。

（1） $p_1 \geqq 0$，$p_2 \geqq 0$，⋯，$p_n \geqq 0$

（2） $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

例1 1，2，5，10 の数を書いた札が，それぞれ 1 枚，2 枚，3 枚，4 枚ある。この 10 枚の札から 1 枚引き，その札に書いてある数の 100 倍の金額をもらえるとする。この金額を X とすると，X は（ 100，200，500，1000 ）の値をとる確率変数であり，X の確率分布は次の表のようになる。

X	100	200	500	1000	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

問1 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の差の絶対値を X とする。X の確率分布を求めよ。

2 個のさいころをそれぞれ A，B とすると，A，B の目の出方は，全部で $6\times6=36$（通り）ある。

A＼B	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

出る目の数の差の絶対値は上の表のようになるから，X は 0，1，2，3，4，5 の値をとる確率変数である。

$$P(X=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=1)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

$$P(X=2)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

$$P(X=3)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

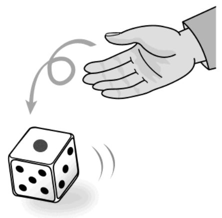
$$P(X=4)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

$$P(X=5)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

となり，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

例2 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とすると，X は確率変数である。このとき，X は（　1 から 6 までの 6 通り　）の値をとり，その確率分布は下の表のようになる。5 の目が出る事象は（　$X=5$　）と表せ，その確率は次のようになる。



$$P(X=5)=\frac{1}{6}$$

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

問2 例 2 で，X を用いて次の事象を表し，その確率を求めよ。

(1)　3 の目が出る事象

3 の目が出る事象は，$\boldsymbol{X=3}$ と表せる。

その確率は　$P(X=3)=\frac{1}{6}$

(2)　2 以上 5 以下の目が出る事象

2 以上 5 以下の目が出る事象は，$\boldsymbol{2\leqq X\leqq 5}$ と表せる。

その確率は　$P(2\leqq X\leqq 5)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

例題 1 赤球 4 個と白球 3 個が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出すとき，その中に含まれている赤球の個数 X の確率分布を求めよ。

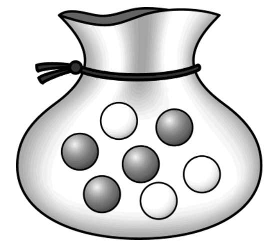
解 X は，0，1，2 の値をとる確率変数である。

$X=0$ は 2 個とも白球である事象

$X=1$ は赤球，白球が 1 個ずつである事象

$X=2$ は 2 個とも赤球である事象

を表す。



したがって，それぞれの確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$$

となり，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

問3 例題 1 で，取り出す球の中に含まれている白球の個数 Y の確率分布を求めよ。

Y は 0，1，2 の値をとる確率変数である。

$$P(Y=0)=\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$$

$$P(Y=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$$

$$P(Y=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$$

となり，Y の確率分布は次の表のようになる。

Y	0	1	2	計
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

問4 1 から 9 までの数を 1 つずつ書いた札が 9 枚ある。ここから同時に 3 枚の札を引くとき，その中に含まれている奇数が書かれた札の枚数 X の確率分布を求めよ。

X は 0，1，2，3 の値をとる確率変数である。
ここで，奇数の札は 5 枚，偶数の札は 4 枚である。したがって，それぞれの確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{1}{21}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_5C_1\times{}_4C_2}{{}_9C_3}=\frac{5}{14}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_5C_2\times{}_4C_1}{{}_9C_3}=\frac{10}{21}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{5}{42}$$

となり，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$	1

❷ 確率変数の平均と分散

確率変数の平均

（教科書 p.115）

一般に，確率変数 X が右の表の確率分布に従うとき

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

を確率変数 X の（⑤ 平均 ）または（⑥ 期待値 ）といい，（⑦ $E(X)$ ）で表す。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

確率変数の平均
$\boldsymbol{E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}$

注意　$E(X)$ の E は期待値を意味する Expectation の頭文字である。

例3 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とすると

$$P(X=1)=P(X=2)=\cdots=P(X=6)=\frac{1}{6}$$

であるから，X の平均は次のようになる。

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\cdots+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

問5 1 個のさいころを投げて，偶数の目が出れば目の数の 2 倍の点数，奇数の目が出れば目の数と同じ点数をもらうゲームを行う。このとき，もらえる点数 X の平均を求めよ。

Xのとる値は，1，3，5，2×2，4×2，6×2，すなわち，1，3，4，5，8，12 であり，それぞれの値をとる確率は，すべて $\frac{1}{6}$ である。よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	1	3	4	5	8	12	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

したがって，X の平均は

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{6}+12\times\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{11}{2}}$$

例題 2 2 本の当たりくじを含む 10 本のくじがある。この中から同時に 2 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数を X とする。X の確率分布と平均を求めよ。

解 X のとる値は，0, 1, 2 であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{28}{45},\ P(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{16}{45},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{45}$$

よって，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$	1

したがって，X の平均は次のようになる。

$$E(X)=0\times\frac{28}{45}+1\times\frac{16}{45}+2\times\frac{1}{45}$$

$$=\frac{18}{45}=\frac{2}{5}$$

問6 例題 2 で，同時に 3 本のくじを引くときの当たりくじの本数を Y とする。Y の確率分布と平均を求めよ。

Yのとる値は，0，1，2 であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(Y=0)=\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7}{15}$$

$$P(Y=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7}{15}$$

$$P(Y=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{15}$$

である。よって，Y の確率分布は次の表のようになる。

Y	0	1	2	計
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

したがって，Y の平均は

$$E(Y)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

問7 10 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げるとき，表の出る硬貨をもらえるという。このとき，もらえる金額 X の平均を求めよ。

X のとる値は，0，10，20，100，110，120 である。

$X=0$ となる事象は，10 円硬貨が 2 枚とも裏，100 円硬貨が裏の場合であるから

$$P(X=0)={}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

同様に

$$P(X=10)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{2}{8}$$

$$P(X=20)={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=100)={}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=110)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{2}{8}$$

$$P(X=120)={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

である。よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	10	20	100	110	120	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

したがって，X の平均は

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+10\times\frac{2}{8}+20\times\frac{1}{8}+100\times\frac{1}{8}+110\times\frac{2}{8}+120\times\frac{1}{8}$$

$$=\mathbf{60}$$

確率変数 $aX+b$ の平均

（教科書 p.117）

確率変数 $\boldsymbol{aX+b}$ の平均
a，b を定数とするとき $\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b}$

例4 1個のさいころを投げるとき，出る目の数 X の100倍から300を引いた点数 $100X-300$ の平均は，例3より $E(X)=$（ $\frac{7}{2}$ ）であるから

$E(100X-300)=100E(X)-300=100\times\frac{7}{2}-300=50$

問8 例4の X について，次の確率変数の平均を求めよ。

(1) $X+10$　(2) $-X$　(3) $10X-40$

$E(X)=\frac{7}{2}$ を用いる。

(1) $E(X+10)=E(X)+10=\frac{7}{2}+10=\frac{27}{2}$

(2) $E(-X)=-E(X)=-\frac{7}{2}$

(3) $E(10X-40)=10E(X)-40$

$=10\times\frac{7}{2}-40=-5$

確率変数 X に対して，X の平均を m とするとき，$X-m$ を X の平均からの（⑧ 偏差 ）という。偏差 $X-m$ の平均 $E(X-m)$ について次の式が成り立つ。

$E(X-m)=E(X)-m=m-m=0$

確率変数の分散

（教科書 p.118）

確率変数 X のとる値を x_1, x_2, $\cdots$, x_n，確率 $P(X=x_i)$ を p_i，X の平均を m とするとき

（⑨ $(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$ ）……①

を確率変数 X の（⑩ 分散 ）といい，（⑪ $V(X)$ ）で表す。分散は X の平均 m からの偏差の2乗 $(X-m)^2$ の平均であるから，次のように表される。

確率変数の分散
$V(X)=E((X-m)^2)$

$\boxed{\text{注意}}$ $V(X)$ の V は分散を意味する Variance の頭文字である。

例5 前ページの X の分散は，$m=3$ より次のようになる。

$$V(X)=(2-3)^2\times\frac{3}{10}+(3-3)^2\times\frac{4}{10}+(4-3)^2\times\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$$

問9 前ページの Y の分散を計算して，例5の X の分散と比較せよ。

$$V(Y)=(1-3)^2\times\frac{2}{10}+(2-3)^2\times\frac{2}{10}+(3-3)^2\times\frac{2}{10}+(4-3)^2\times\frac{2}{10}+(5-3)^2\times\frac{2}{10}$$

$=2$

したがって　$V(Y)>V(X)$

分散の計算
$V(X)=E(X^2)-m^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

例6 1個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とすると

$$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+\cdots+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

また，例3より $E(X)=m=\frac{7}{2}$ であるから，X の分散は

$$V(X)=E(X^2)-m^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$$

問 10 硬貨 2 枚を同時に投げるとき，表が出る枚数 X の分散を求めよ。

X のとる値は，0，1，2 である。$X=0$ となる事象は，硬貨が 2 枚とも裏の場合であるから

$$P(X=0)={}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

同様に

$$P(X=1)={}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{4}$$

$$P(X=2)={}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

である。よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

よって

$$E(X)=m=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{2}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

したがって，X の分散は

$$V(X)=E(X^2)-m^2=\frac{3}{2}-1^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

確率変数の標準偏差

（教科書 p.120）

分散 $V(X)$ の正の平方根 $\sqrt{V(X)}$ を X の（⑫　標準偏差　）といい，（⑬　$\sigma(X)$　）で表す。

すなわち　（⑭　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$　）

注意　標準偏差は standard deviation といい，$\sigma(X)$ の σ は，この頭文字 s に相当するギリシャ文字である。

例7 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とすると，前ページの例 6 より，

$V(X)=$（　$\frac{35}{12}$　）であるから，X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{35}{12}}=\frac{\sqrt{105}}{6}$$

例題 3 硬貨 3 枚を同時に投げるとき，表が出る枚数 X の標準偏差を求めよ。

解 X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

よって，X の平均と分散は次のようになる。

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=3$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

したがって，X の標準偏差は次のようになる。

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

問 11 10 本のくじの中に，当たりくじは 1 等 500 円が 1 本，2 等 200 円が 3 本入っている。これから 1 本のくじを引くときの賞金額 X の標準偏差を求めよ。 p.131 Training 1　p.154 LevelUp 1

X の確率分布は次の表のようになる。

X	500	200	0	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

よって，X の平均と分散は

$$E(X)=500\times\frac{1}{10}+200\times\frac{3}{10}+0\times\frac{6}{10}$$
$$=110$$

$$E(X^2)=500^2\times\frac{1}{10}+200^2\times\frac{3}{10}+0^2\times\frac{6}{10}$$
$$=37000$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=37000-110^2$$
$$=24900$$

したがって，X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{24900}=\boldsymbol{10\sqrt{249}}$$

確率変数 $aX+b$ の分散と標準偏差

（教科書 p.121）

確率変数 $\boldsymbol{aX+b}$ の分散と標準偏差

$$\boldsymbol{V(aX+b)=a^2V(X)}$$

$$\boldsymbol{\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)}$$

例8 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とする。このとき，$4X+5$ の分散と標準偏差を求めてみよう。

例 6，例 7 より，$V(X)=$（ $\frac{35}{12}$ ），$\sigma(X)=$（ $\frac{\sqrt{105}}{6}$ ）であるから

$$V(4X+5)=4^2V(X)=16\times\frac{35}{12}=\frac{140}{3}$$

$$\sigma(4X+5)=|4|\sigma(X)=4\times\frac{\sqrt{105}}{6}=\frac{2\sqrt{105}}{3}$$

問 12 例 8 の X について，次の確率変数の分散と標準偏差を求めよ。

(1) $3X+1$　　(2) $-X$　　(3) $5-6X$

p.131 Training 2

$V(X)=\frac{35}{12}$，$\sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}$ である。

(1) $\boldsymbol{V(3X+1)}=3^2V(X)=\boldsymbol{\frac{105}{4}}$

$\boldsymbol{\sigma(3X+1)}=|3|\sigma(X)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{105}}{2}}$

(2) $\boldsymbol{V(-X)}=(-1)^2V(X)=\boldsymbol{\frac{35}{12}}$

$\boldsymbol{\sigma(-X)}=|-1|\sigma(X)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{105}}{6}}$

(3) $\boldsymbol{V(5-6X)}=(-6)^2V(X)=\boldsymbol{105}$

$\boldsymbol{\sigma(5-6X)}=|-6|\sigma(X)=\boldsymbol{\sqrt{105}}$

3 確率変数の和と積

確率変数の和の平均

（教科書 p.122）

一般に，2 つの確率変数 X，Y に対して，次の式が成り立つ。

確率変数の和の平均

$$\boldsymbol{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$$

上の式は，3 つ以上の確率変数の和に対しても成り立つ。

たとえば，3 つの確率変数 X，Y，Z に対して，次の式が成り立つ。

（⑮　$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$　）

例9 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X，Y とする。このとき，和 $X+Y$ の平均は次のようになる。

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$　←― p.116 例 3

問 13 2 つの確率変数 X，Y のとる値と，X，Y の値の組に対する確率が右の表で与えられているとき，X，Y および $X+Y$ の平均をそれぞれ求めよ。

X \ Y	0	1	計
0	0.3	0.4	0.7
1	0.1	0.2	0.3
計	0.4	0.6	1

$\boldsymbol{E(X)}=0\times0.7+1\times0.3=\boldsymbol{0.3}$

$\boldsymbol{E(Y)}=0\times0.4+1\times0.6=\boldsymbol{0.6}$

$\boldsymbol{E(X+Y)}=E(X)+E(Y)=0.3+0.6=\boldsymbol{0.9}$

独立な確率変数

（教科書 p.124）

2 つの確率変数 X，Y があって，X のとる任意の値 a と Y のとる任意の値 b に対して

（⑯　$P(X=a,\ Y=b)=P(X=a)\cdot P(Y=b)$　）

が成り立つとき，確率変数 X，Y は（⑰　独立　）であるという。

例 10 2 つの確率変数 X，Y のとる値と，X，Y の値の組に対する確率が右の表で与えられているとき，$X=2$，$Y=1$ となる確率は

X \ Y	1	2	計
2	0.28	0.42	0.7
4	0.12	0.18	0.3
計	0.4	0.6	1

$P(X=2,\ Y=1)=0.28$

一方　$P(X=2)\cdot P(Y=1)=0.7\times0.4=0.28$

となるから　$P(X=2,\ Y=1)=P(X=2)\cdot P(Y=1)$

が成り立つ。

同様の式が，X，Y の他の値のすべての組の確率に対しても成り立つから，2 つの確率変数 X，Y は（　独立　）である。

独立な確率変数の積の平均

（教科書 p.125）

独立な確率変数の積の平均
X，Y が独立であるとき　$\boldsymbol{E(XY)=E(X)\cdot E(Y)}$

また，3 つの独立な確率変数 X，Y，Z に対しても同様に，次の式が成り立つ。

（⑱　$E(XYZ)=E(X)\cdot E(Y)\cdot E(Z)$　）

例 11 2 個のさいころ A，B を同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X，Y とする。それぞれのさいころを投げる試行は独立であるから，X，Y は独立であり，2 つの目の数の積 XY の平均は

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{49}{4}$$

←― p.116 例 3

問 14 1 枚の硬貨を投げて，表が出れば 2 点，裏が出れば 1 点が得られるという。硬貨を 2 回投げるとき，2 回の得点の積の平均を求めよ。

1 回目の硬貨投げの得点を X，2 回目の得点を Y とすると

X	2	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X)=E(Y)=2\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

X，Y は独立であるから

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

独立な確率変数の和の分散

（教科書 p.126）

独立な確率変数の和の分散
X，Y が独立であるとき　$\boldsymbol{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$

また，3 つの独立な確率変数 X，Y，Z に対しても同様に，次の式が成り立つ。

（⑲　$V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)$　）

例 12 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X，Y とする。X，Y は独立であり，119 ページの例 6 より $V(X)=$（　$V(Y)=\frac{35}{12}$　）であるから，$X+Y$ の分散，標準偏差は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{35}{6}$$

$$\sigma(X+Y)=\sqrt{V(X+Y)}=\sqrt{\frac{35}{6}}=\frac{\sqrt{210}}{6}$$

問 15 1 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げる試行で，硬貨の表が出るとき 1，裏が出るとき0 を対応させる確率変数を X，さいころの出る目の数を Y とする。このとき，確率変数 $X+Y$ の分散と標準偏差を求めよ。

p.131 Training 3　p.154 LevelUp 2,3

X の確率分布は次の表のようになる。

X	1	0	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

よって，X の平均と分散は

$$E(X)=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$V(X)=1^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

また，Y の確率分布は次の表のようになる。

Y	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって，Y の平均と分散は

$$E(Y)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

$$V(Y)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

X と Y は独立であるから

$$\boldsymbol{V(X+Y)}=V(X)+V(Y)=\frac{1}{4}+\frac{35}{12}=\boldsymbol{\frac{19}{6}}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X+Y)}=\sqrt{V(X+Y)}=\sqrt{\boldsymbol{\frac{19}{6}}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{114}}{6}}$$

4 二項分布

二項分布 $B(n,\ p)$

（教科書 p.127）

一般に，ある試行で，事象 A が起こる確率を p とし，A が起こらない確率を $q=1-p$ とおく。これを n 回くり返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすれば，X は確率変数であり，そのとる値は 0 から n までの整数である。また，$X=r$ となる確率は

（⑳ $P(X=r)=\,_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$ ）$(r=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$

である。したがって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	…	r	…	n	計
P	$_n\mathrm{C}_0 q^n$	$_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1}$	…	$_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$	…	$_n\mathrm{C}_n p^n$	1

確率変数 X の確率分布が上の表のようになるとき，この確率分布を確率 p に対する次数 n の（㉑ 二項分布 ）といい，（㉒ $B(n,\ p)$ ）で表す。

注意 B は二項分布を意味する Binomial distribution の頭文字である。

二項分布 $B(n,\ p)$ の確率

$$P(X=r)=\,_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}\qquad \begin{pmatrix} r=0,\ 1,\ \cdots,\ n \\ q=1-p \end{pmatrix}$$

例 13 1 枚の硬貨をくり返し 10 回投げるとき，表の出る回数を確率変数 X とすると，X は二項分布

（ $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$ ）に従う。

問 16 次の確率変数は二項分布に従う。それぞれの二項分布 $B(n,\ p)$ における $n,\ p$ の値を求めよ。

(1) 2 個のさいころを同時に投げる試行を 8 回くり返すとき，2 個とも 6 の目が出る回数 X

$$\boldsymbol{n=8,\ p=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}}$$

(2) 3 個のさいころを同時に投げる試行を 10 回くり返すとき，3 個とも同じ目が出る回数 Y

$$\boldsymbol{n=10,\ p=\,_6\mathrm{C}_1\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}}$$

例 14 1 個のさいころを 4 回くり返し投げるとき，3 の倍数の目が出る回数を確率変数 X とすると，

$n=$（ 4 ），$p=$（ $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ）より，X は二項分布（ $B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$ ）に従う。

したがって，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)=\,_4\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{4-r}\qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

であり，確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

問 17 確率変数 X が二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(X=1)$

$$\boldsymbol{P(X=1)=\,_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}}$$

(2) $P(X=3)$

$$\boldsymbol{P(X=3)=\,_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}}$$

問 18 1 枚の硬貨を 3 回くり返し投げるとき，表が出る回数を X とする。X の確率分布を求めよ。

X は二項分布 $B\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

$$P(X=r)=\,_3\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{3-r}=\frac{_3\mathrm{C}_r}{2^3}\qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

したがって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

二項分布の平均と分散

（教科書 p.129）

二項分布の平均と分散
確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき $\boldsymbol{E(X)=np},\ \boldsymbol{V(X)=npq}$　　ただし，$q=1-p$

例 15 確率変数 X が二項分布 $B\left(10,\ \frac{1}{4}\right)$ に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めてみよう。

$$E(X)=10\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$

$$V(X)=10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{15}{8}}=\frac{\sqrt{30}}{4}$$

問 19 確率変数 X が次の二項分布に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

p.131 Training 4

(1)　$B\left(30,\ \frac{1}{6}\right)$

$$E(X)=30\times\frac{1}{6}=\boldsymbol{5}$$

$$V(X)=30\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{25}{6}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{6}}{6}}$$

(2)　$B\left(50,\ \frac{1}{2}\right)$

$$E(X)=50\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{25}$$

$$V(X)=50\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{25}{2}}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$$

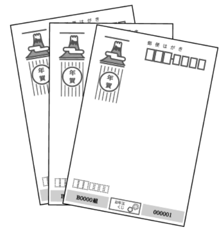
(3)　$B(100,\ 0.36)$

$$E(X)=100\times0.36=\boldsymbol{36}$$

$$V(X)=100\times0.36\times0.64=\boldsymbol{23.04}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\boldsymbol{4.8}$$

例 16 お年玉つき年賀はがきの 3 等に当たる確率が 0.02 であるとする。100 枚の年賀はがきのうち 3 等に当たる枚数を X とすると，確率変数 X は二項分布（　$B(100,\ 0.02)$　）に従う。X の平均と標準偏差は



$$E(X)=100\times0.02=2$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{100\times0.02\times0.98}=\sqrt{1.96}=1.4$$

問 20 1 個のさいころを投げる試行を 60 回くり返すとき，6 の目が出る回数 X の平均と標準偏差を求めよ。

X は二項分布 $B\left(60,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。よって

$$E(X)=60\times\frac{1}{6}=\boldsymbol{10}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{60\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

問 21 ある製品を製造する際，不良品が生じる確率は 0.04 であることがわかっている。この製品を 600 個製造するとき，その中に含まれる不良品の個数 X の平均と標準偏差を求めよ。

p.131 Training 5　p.154-155 LevelUp 4-6

Xは二項分布 $B(600,\ 0.04)$ に従う。よって

$$E(X)=600\times0.04=\boldsymbol{24}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{600\times0.04\times0.96}=\sqrt{23.04}=\boldsymbol{4.8}$$

Training

（教科書 p.131）

1 6 本のくじの中に，当たりくじは 1 等 1000 円が 1 本，2 等 500 円が 2 本入っている。このくじを同時に 2 本引くときのもらえる賞金額を X とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) X の確率分布を求めよ。

X のとる値は，1500，1000，500，0 であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(X=1500)=\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{2}{15}$$

$$P(X=1000)=\frac{{}_1C_1\times{}_3C_1+{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$$

$$P(X=500)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

である。したがって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	1500	1000	500	0	計
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

(2) X の平均を求めよ。

X の平均は

$$E(X)=1500\times\frac{2}{15}+1000\times\frac{4}{15}+500\times\frac{6}{15}+0\times\frac{3}{15}=\mathbf{\frac{2000}{3}}$$

(3) X の分散と標準偏差を求めよ。

X の分散は

$$\boldsymbol{V(X)}=1500^2\times\frac{2}{15}+1000^2\times\frac{4}{15}+500^2\times\frac{6}{15}+0^2\times\frac{3}{15}-\left(\frac{2000}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{2000000}{9}}$$

また，X の標準偏差は

$$\boldsymbol{\sigma(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2000000}{9}}=\mathbf{\frac{1000\sqrt{2}}{3}}$$

2 確率変数 X の分散が 3 のとき，次の確率変数の分散と標準偏差を求めよ。

(1) $5X+2$

(2) $4-2X$

$V(X)=3$，$\sigma(X)=\sqrt{3}$ である。

(1) $\boldsymbol{V(5X+2)}=5^2V(X)=\mathbf{75}$

$\boldsymbol{\sigma(5X+2)}=|5|\sigma(X)=\mathbf{5\sqrt{3}}$

(2) $\boldsymbol{V(4-2X)}=(-2)^2V(X)=\mathbf{12}$

$\boldsymbol{\sigma(4-2X)}=|-2|\sigma(X)=\mathbf{2\sqrt{3}}$

3 独立な確率変数 X, Y の分布がそれぞれ下の表で与えられている。このとき，次の確率変数の平均と分散を求めよ。ただし，(3)は平均のみでよい。

(1) $25-10X$　　(2) $X+Y$　　(3) XY

X	0	1	2	計
P	0.1	0.6	0.3	1

Y	0	1	2	計
P	0.2	0.6	0.2	1

X，Y の平均と分散は

$E(X)=0\times0.1+1\times0.6+2\times0.3=1.2$

$V(X)=0^2\times0.1+1^2\times0.6+2^2\times0.3-1.2^2$

$=0.36$

$E(Y)=0\times0.2+1\times0.6+2\times0.2=1$

$V(Y)=0^2\times0.2+1^2\times0.6+2^2\times0.2-1^2$

$=0.4$

(1) $\boldsymbol{E(25-10X)}=25-10E(X)$

$=25-10\times1.2=\mathbf{13}$

$\boldsymbol{V(25-10X)}=(-10)^2V(X)$

$=100\times0.36=\mathbf{36}$

(2) $\boldsymbol{E(X+Y)}=E(X)+E(Y)=1.2+1$

$=\mathbf{2.2}$

X，Y は独立であるから

$\boldsymbol{V(X+Y)}=V(X)+V(Y)=0.36+0.4$

$=\mathbf{0.76}$

(3) X，Y は独立であるから

$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=1.2\times1=\mathbf{1.2}$

4 確率変数 X が二項分布 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$ に従うとき，次の確率変数の平均と分散を求めよ。

(1) $2X+30$

(2) $-X$

(3) $\frac{X-20}{4}$

Xは二項分布 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$ に従うから

$$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$$

$$V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$$

(1) $\boldsymbol{E(2X+30)}=2E(X)+30=2\times20+30$

$=\mathbf{70}$

$\boldsymbol{V(2X+30)}=2^2V(X)=4\times16=\mathbf{64}$

(2) $\boldsymbol{E(-X)}=-E(X)=\mathbf{-20}$

$\boldsymbol{V(-X)}=(-1)^2V(X)=\mathbf{16}$

(3) $\boldsymbol{E}\left(\frac{X-20}{4}\right)=E\left(\frac{1}{4}X-5\right)$

$=\frac{1}{4}E(X)-5$

$=\frac{1}{4}\times20-5$

$=\mathbf{0}$

$\boldsymbol{V}\left(\frac{\boldsymbol{X-20}}{\mathbf{4}}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2V(X)=\frac{1}{16}\times16$

$=\mathbf{1}$

5 袋の中に赤球 3 個と白球 2 個が入っている。この袋の中から球を 1 個取り出し，色を調べてもとに戻す。これを 50 回くり返すとき，赤球を取り出す回数 X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

X は二項分布 $B\left(50,\ \frac{3}{5}\right)$ に従う。よって

$$\boldsymbol{E(X)}=50\times\frac{3}{5}=\mathbf{30}$$

$$\boldsymbol{V(X)}=50\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\mathbf{12}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{12}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$