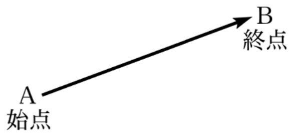
1節 平面上のベクトル

❶ 有向線分とベクトル

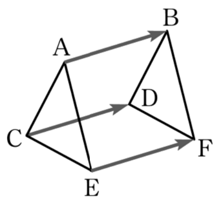
有向線分

（教科書 p.52）

このような向きのついた線分を（① ）という。
また，有向線分 AB において，A を（② ），
B を（③ ）という。



例1 右の図のような△ ACE が△ BDF に移る平行移動は
（ ）で表される。
この移動は（ ）などでも表すことができる。



ベクトル

（教科書 p.52）

有向線分について，その位置を問題にせず，向きと長さだけに着目したものを（④ ）という。

有向線分 AB の表すベクトルを（⑤ ）と書く。また，有向線分 AB の長さをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の（⑥ ）または長さといい，（⑦ ）で表す。

等しいベクトルと逆ベクトル

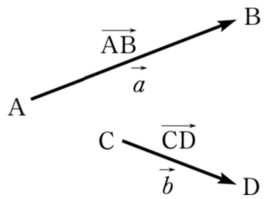
（教科書 p.53）

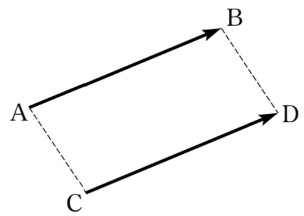
ベクトルは大きさと向きによって定まるから，大きさが等しく
向きが同じである 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は（⑧ ）といい

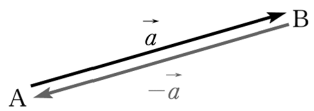
$$\vec{a}=\vec{b}$$

と書く。また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ということは有向線分 AB を平行移動して
有向線分 CD に重ねることができるということである。

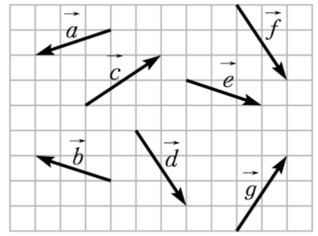
ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが反対のベクトルを
$\vec{a}$ の（⑨ ）といい，（⑩ ）で表す。







問1 右の図で，等しいベクトルを答えよ。
また，互いに逆ベクトルであるものを答えよ。



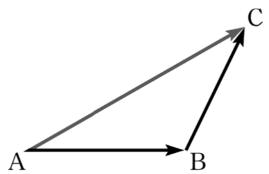
② ベクトルの加法・減法・実数倍

ベクトルの加法

（教科書 p.54）

問2 右の図において，次の和を求めよ。

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$



（2）　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

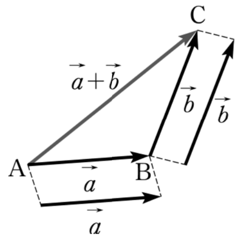
一般に，2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の和は次のようになる。

まず 1 つの点 A をとり，次に

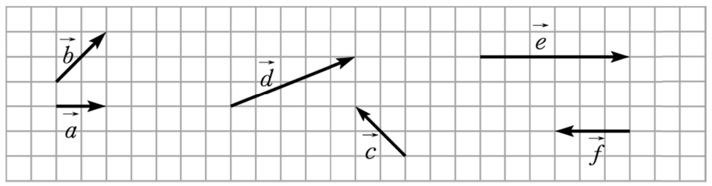
$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

となるように点 B, C をとる。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（⑪　　　　　）を表している。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和を（⑫　　　　　　）と書く。



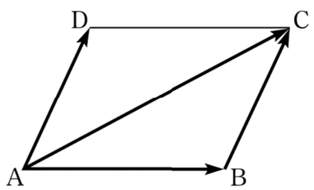
問3 下の図で，$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{e}+\vec{f}$ を図示せよ。



例2 右の図の平行四辺形 ABCD において

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=$

$=$



ベクトルの加法については，次のことが成り立つ。

ベクトルの加法の性質		
（1）	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	交換法則
（2）	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	結合法則

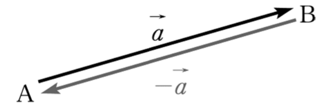
零ベクトル

（教科書 p.55）

$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は始点と終点が一致したベクトルである。これを（⑬　　　　　　　　）といい，（⑭　　　　）で表す。

$\vec{0}$ には次のような性質がある。

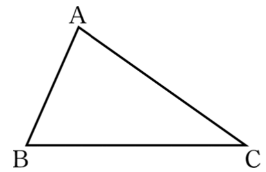
（⑮　　　　　　　　），（⑯　　　　　　　　）



問4 平面上に 3 点 A, B, C がある。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$$

が成り立つことを示せ。



ベクトルの減法

（教科書 p.56）

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，その（⑰　　　　　　　）を

（⑱　　　　　　　　　　　　）

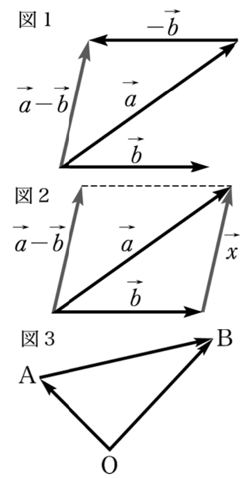
と定める。$\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，差 $\vec{a}-\vec{b}$ は図 1 のようにかくことができる。

また，図 2 からわかるように，$\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ は等式 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ を満たすベクトルである。

図 3 において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

が成り立つ。



問5 問 3 で $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{d}$, $\vec{e}-\vec{f}$ を図示せよ。

ベクトルの実数倍

（教科書 p.56）

ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，（⑲　　　　　）すなわち（⑳　　　　　　　）を次のように定める。

$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$k\vec{a}$ は

(1)　$k>0$ ならば，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが k 倍のベクトル

　　とくに，$1\vec{a}=\vec{a}$

(2)　$k<0$ ならば，$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

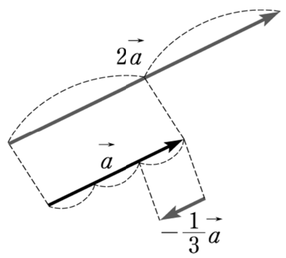
　　とくに，$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

(3)　$k=0$ ならば，$\vec{0}$　すなわち　$0\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{a}=\vec{0}$ のとき，$k\vec{0}=\vec{0}$

例3 ベクトル $\vec{a}$ に対して，$2\vec{a}$ は（　　　　　　　　　　　）のベクトルである。

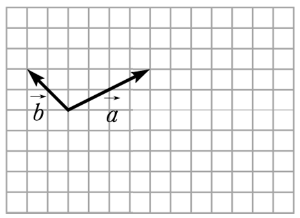
$-\frac{1}{3}\vec{a}$ は（　　　　　　　　　　　　　　　）のベクトルである。



問6 右の図のように $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。

(1)　$2\vec{a}$　　　(2)　$-2\vec{b}$

(3)　$-\frac{1}{2}\vec{a}$　　　(4)　$2\vec{a}-\vec{b}$

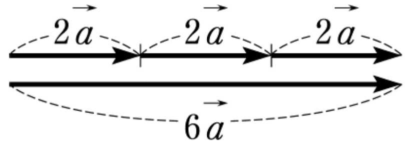


k, l を実数とするとき，次のことが成り立つ。

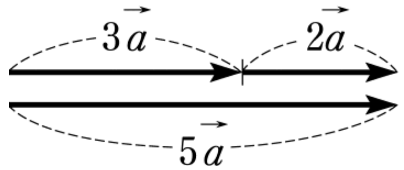
ベクトルの実数倍の性質
(1)　$\boldsymbol{k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}}$
(2)　$\boldsymbol{(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}}$
(3)　$\boldsymbol{k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}}$

これらの性質は，次の図を用いて確かめることができる。

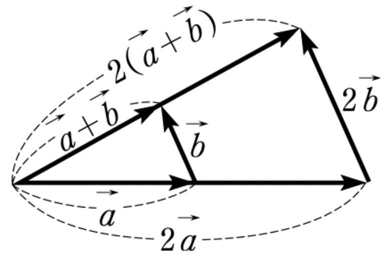
(1)　$3(2\vec{a})=6\vec{a}$



(2)　$3\vec{a}+2\vec{a}=5\vec{a}$



(3)　$2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$



例4 $3(\vec{a}-2\vec{b})+2(3\vec{a}+\vec{b})=$

$=$　　　　　　　$=$

問7 次の計算をせよ。

(1)　$3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a}$

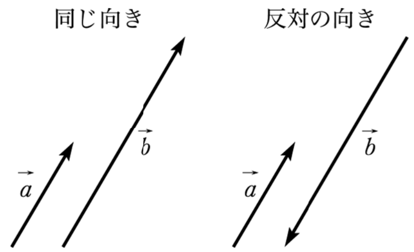
(2)　$3(\vec{a}-2\vec{b})-4(\vec{a}-\vec{b})$

問8 $6\vec{a}-\vec{x}=2\vec{x}+3\vec{b}$ であるとき，$\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

ベクトルの平行

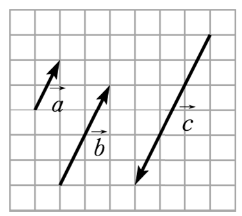
（教科書 p.58）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が同じ向き，または反対の向きであるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㉑　　　　　　）であるといい，
（㉒　　　　　　）と書く。



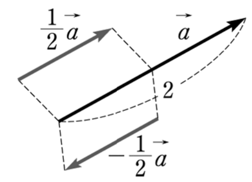
ベクトルの平行条件
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}} \iff \boldsymbol{\vec{b}=k\vec{a}}$ となる実数 $\boldsymbol{k}$ がある

例5 右の図において，$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ であり，（　　　　　　）と表すことができる。



問9 例 5 の図において，$\vec{c}$ を $\vec{a}$ で表せ。また，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を $\vec{c}$ で表せ。

例6 $|\vec{a}|=2$ のとき，$\vec{a}$ と平行で大きさが 1 のベクトルは



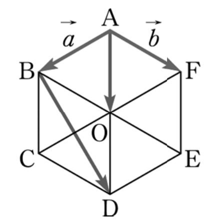
大きさが 1 のベクトルを（㉓　　　　　　）という。

ベクトルの分解

（教科書 p.59）

例題 1 右の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(1)　$\overrightarrow{AO}$　　　　(2)　$\overrightarrow{BD}$



解

問 10 例題 1 において，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。 p.72 Training 1

(1)　$\overrightarrow{BF}$

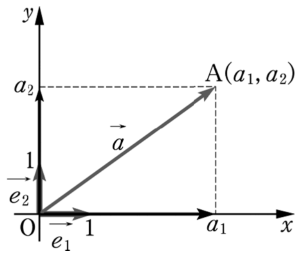
(2)　$\overrightarrow{DF}$

③ ベクトルの成分

座標とベクトル

（教科書 p.60）

O を原点とする座標平面上で，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを（㉔　　　　　　　　）といい，それぞれ（㉕　　　　　　）で表す。



与えられたベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A をとり，その座標を $(a_1,\ a_2)$ とすると，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

と表される。この a_1，a_2 をそれぞれ $\vec{a}$ の（㉖　　　　　　　　）といい，$\vec{a}$ を

（㉗　　　　　　　）

と書き表す。この表し方を $\vec{a}$ の（㉘　　　　　　）という。

とくに，$\vec{0}$，および $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ の成分表示は次のようになる。

$\vec{0}=(0,\ 0)$，　$\vec{e_1}=(1,\ 0)$，　$\vec{e_2}=(0,\ 1)$

また，2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ に対して

（㉙　　　　　　　　　　　　）

$\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は，線分 OA の長さであるから，成分表示されたベクトルの大きさは，次のようになる。

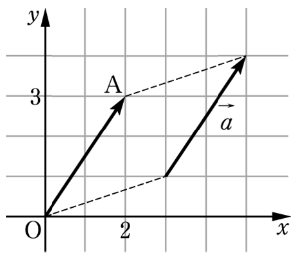
ベクトルの大きさ
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　　$\boldsymbol{|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}}$

例7 右の図の $\vec{a}$ を成分表示し，その大きさを求めてみよう。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標は（　　　　　　）であるから

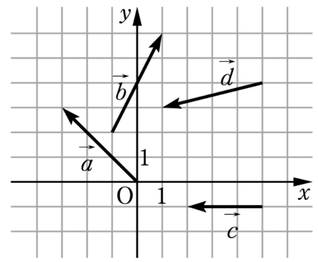
$\vec{a}=$

また　　$|\vec{a}|=$　　　　$=$



（教科書 p.61）

問 11 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を成分表示し，その大きさを求めよ。



成分による計算

（教科書 p.61）

一般に，ベクトルの成分による計算について，次のことが成り立つ。

成分による計算
(1)　$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$
(2)　$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$
(3)　$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　　　k は実数

例8 $\vec{a}=(2,\ 5)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ のとき，$4\vec{a}+3\vec{b}$ を成分表示してみよう。

$4\vec{a}+3\vec{b}=$

$=$

$=$

問 12 $\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。 p.72 Training 2

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$

(2)　$2\vec{a}-5\vec{b}$

⑶ $3(2\vec{a}-6\vec{b})-5(\vec{a}-4\vec{b})$

単位ベクトルと成分表示

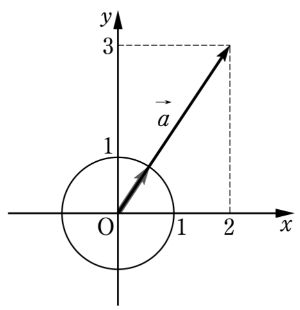
（教科書 p.62）

例9 $\vec{a}=(2,\ 3)$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを成分表示してみよう。

$|\vec{a}|=$ 　　　　$=$

であるから，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは

である。



問 13 次のベクトルと同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。 p.72 Training 3

（1） $\vec{a}=(4,\ -3)$

⑵ $\vec{b}=(-1,\ 2)$

座標と成分表示

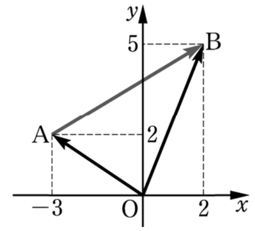
（教科書 p.63）

例 10 $A(-3,\ 2)$，$B(2,\ 5)$ のとき，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，その大きさを求めてみよう。

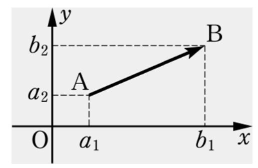
$\overrightarrow{AB}=$ 　　　　$=$

$=$ 　　　　　　$=$

$|\overrightarrow{AB}|=$ 　　　　$=$



一般に，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の成分表示と大きさは次のようになる。

座標と成分表示
$A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ のとき （1） $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(\boldsymbol{b_1-a_1},\ \boldsymbol{b_2-a_2})$ ⑵ $\lvert\overrightarrow{\mathbf{AB}}\rvert=\sqrt{(\boldsymbol{b_1-a_1})^2+(\boldsymbol{b_2-a_2})^2}$ 

問 14 3 点 $A(-2,\ 6)$，$B(3,\ -1)$，$C(3,\ -4)$ について，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$ の成分表示を求めよ。また，その大きさを求めよ。

例題 2 平面上に 3 点 $A(3,\ 2)$，$B(7,\ 3)$，$C(-1,\ 6)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ。

解

問 15 平面上に 3 点 A$(-2,\ -2)$，B$(9,\ 2)$，D$(-9,\ 0)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 C の座標を求めよ。 p.72 Training 4

ベクトルの平行

（教科書 p.64）

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，

（㉚　　　　　　　　　　　　　　）

が成り立つ。

例 11 $\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(-3,\ 6)$ のとき，

（　　　　　　　）となるから

（　　　　　）

である。

例題 3 $\vec{a}=(4,\ -6)$，$\vec{b}=(x,\ 9)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

解

問 16 $\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(-3,\ y)$ が平行になるように，y の値を定めよ。 p.72 Training 5,6

例題 4 $\vec{a}=(4,\ 3)$ に平行で，大きさが 10 であるベクトルを求めよ。

解

問 17 $\vec{a}=\left(\sqrt{3},\ -1\right)$ に平行で，大きさが 6 であるベクトルを求めよ。 p.72 Training 7 p.106 Level Up 1

$k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表されるベクトル

（教科書 p.65）

例題 5 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(3,\ 8)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形に表せ。

解

問 18 $\vec{a}=(3,\ 5)$, $\vec{b}=(-2,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(16,\ 0)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形に表せ。 p.72 Training 8

4 ベクトルの内積

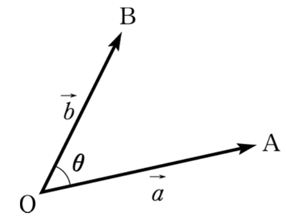
ベクトルの内積

（教科書 p.66）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，点 O を始点として，
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるように点 A, B をとる。このとき

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（㉛　　　　　　）という。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。
このとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（㉜　　　　　　）といい，
（㉝　　　　　　）で表す。



ベクトルの内積
2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

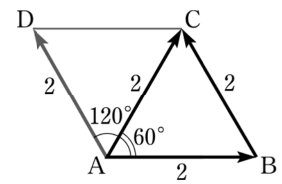
注意　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトルではなく実数である。

例 12 右の図のような平行四辺形 ABCD において，次の内積を求めてみよう。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$　　　　　　$=$

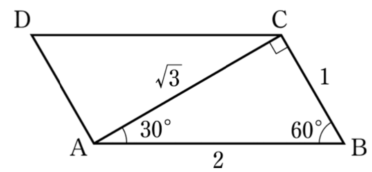
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=$

$=$　　　　　　$=$



問 19 右の図のような平行四辺形ABCD において，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



p.72 Training 9

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

(3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$

(4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

内積と成分

（教科書 p.67）

内積と成分
$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ のとき $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$

例 13 $\vec{a} = (2,\ 3)$, $\vec{b} = (-1,\ 4)$ のとき，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めてみよう。

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ 　　　　　　　　$=$

問 20 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(1) $\vec{a} = (-2,\ 3)$, $\vec{b} = (5,\ 4)$

(2) $\vec{a} = (3,\ 5)$, $\vec{b} = (-4,\ 1)$

(3) $\vec{a} = (7,\ 3)$, $\vec{b} = (-3,\ 7)$

(4) $\vec{a} = \left(3,\ \sqrt{3}\right)$, $\vec{b} = \left(-\sqrt{3},\ 1\right)$

ベクトルのなす角

（教科書 p.68）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると，内積の定義 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2}}} \qquad \text{ただし，} 0° \leqq \theta \leqq 180°$$

例題 6 次の 2 つのベクトルのなす角 θ を求めよ。

$\vec{a} = (2,\ 1)$, 　$\vec{b} = (1,\ 3)$

解

問 21 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。 p.72 Training 10

(1) $\vec{a} = (3,\ 0)$, $\vec{b} = \left(1,\ \sqrt{3}\right)$

(2) $\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$, $\vec{b}=(\sqrt{3},\ 1)$

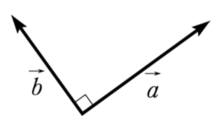
(3) $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(3,-6)$

(4) $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-2,\ 4)$

ベクトルの垂直

（教科書 p.68）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角が 90° であるとき，
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㉞　　　　　　）であるといい，（㉟　　　　　　）で表す。



（教科書 p.69）

ベクトルの垂直条件
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき　$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}} \iff \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

さらに，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のときには，次のように表される。
（㊱　　　　　　　　　　　　　　）

例 14 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-6,\ x)$ が垂直になるような x の値を求めてみよう。
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より　　　　　　$=$
よって　$x=$

問 22 $\vec{a}=(x+2,\ -6)$, $\vec{b}=(9,\ x)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

例題 7 $\vec{a}=(-3,\ 1)$ に垂直で，大きさが 10 であるベクトルを求めよ。

解

問 23 $\vec{a}=(3,\ 4)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

内積の性質

（教科書 p.70）

内積の性質		
(1)	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$	
(2)	$\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2$	
(3)	$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$	k は実数
(4)	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$	
(5)	$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$	

例 15 $|\vec{a}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$\vec{a}\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$ の値を求めてみよう。

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=$

$=$ $=$

問 24 $|\vec{a}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=5,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=-3$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\vec{a}\cdot(2\vec{b}-3\vec{c})$

(2) $2\vec{a}\cdot(\vec{a}+4\vec{c})$

例題 8 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

証明

問 25 次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

例題 9 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ のとき，$|\vec{a}+2\vec{b}|$の値を求めよ。

考え方 内積の性質(2)から，$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$ を利用する。

解

問 26 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|$

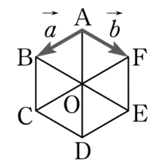
(2) $|2\vec{a}-\vec{b}|$

問 27 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。 p.72 Training 11 p.106 Level Up 2,3

Training

(教科書 p.72)

1 右の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。



(1) $\overrightarrow{CB}$

(2) $\overrightarrow{CF}$

(3) $\overrightarrow{CE}$

(4) $\overrightarrow{EA}$

2 $\vec{a}=(-3,\ 1)$, $\vec{b}=(-4,\ -2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $\vec{b}-\vec{a}$

(2) $-3\vec{a}+2\vec{b}$

(3) $2(\vec{b}-2\vec{a})+5\vec{a}-3\vec{b}$

3 次のベクトルと同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。

(1) $\vec{a} = (-3,\ 2)$

(2) $\vec{b} = (1,\ -7)$

4 平面上に 3 点 A(1, 3), C(−2, −2), D(3, −5) がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 B の座標を求めよ。

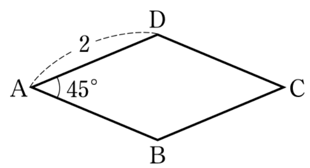
5 $\vec{a} = (x,\ -2)$, $\vec{b} = (-3,\ -4)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

6 $\vec{a} = (3,\ -2)$, $\vec{b} = (1,\ -4)$, $\vec{c} = (-1,\ 2)$ のとき，$\vec{a} + t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるように，実数 t の値を定めよ。

7 $\vec{a} = \left(-2,\ \sqrt{5}\right)$ に平行で，大きさが $\sqrt{3}$ であるベクトルを求めよ。

8 $\vec{a}=(2,\ -5)$, $\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(1,\ -8)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形に表せ。

9 右の図のようなひし形 ABCD において，次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

10 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(-1,\ 4)$, $\vec{b}=(2,\ -8)$

(2) $\vec{a}=\left(1,\ -\sqrt{3}\right)$, $\vec{b}=\left(-\sqrt{3},\ 1\right)$

(3) $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ -2)$

(4) $\vec{a}=\left(1,\ \sqrt{2}\right)$, $\vec{b}=\left(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right)$

11 $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3\sqrt{2},\ |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{13}$ のとき，$\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値および $\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

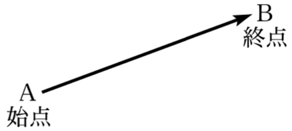
１節 平面上のベクトル

❶ 有向線分とベクトル

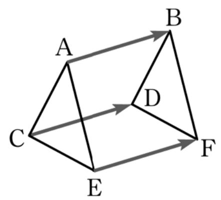
有向線分

（教科書 p.52）

このような向きのついた線分を（① 有向線分 ）という。
また，有向線分 AB において，A を（② 始点 ），
B を（③ 終点 ）という。



例1 右の図のような△ ACE が△ BDF に移る平行移動は
（ 有向線分 AB ）で表される。
この移動は（ 有向線分 CD，EF ）などでも表すことができる。



ベクトル

（教科書 p.52）

有向線分について，その位置を問題にせず，向きと長さだけに着目したものを（④ ベクトル ）という。

有向線分 AB の表すベクトルを（⑤ $\overrightarrow{AB}$ ）と書く。また，有向線分 AB の長さをベクトル $\overrightarrow{AB}$ の（⑥ 大きさ ）または長さといい，（⑦ $|\overrightarrow{AB}|$ ）で表す。

等しいベクトルと逆ベクトル

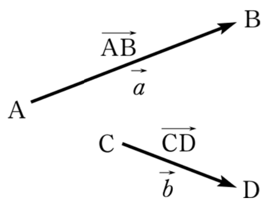
（教科書 p.53）

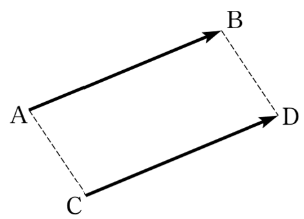
ベクトルは大きさと向きによって定まるから，大きさが等しく向きが同じである 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は（⑧ 等しい ）といい

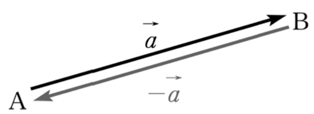
$$\vec{a}=\vec{b}$$

と書く。また，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ということは有向線分 AB を平行移動して有向線分 CD に重ねることができるということである。

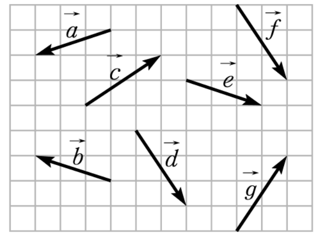
ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが反対のベクトルを $\vec{a}$ の（⑨ 逆ベクトル ）といい，（⑩ $-\vec{a}$ ）で表す。



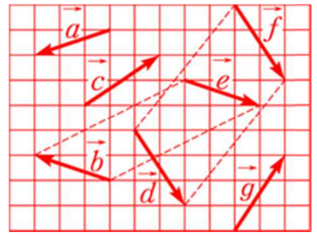




問1 右の図で，等しいベクトルを答えよ。
また，互いに逆ベクトルであるものを答えよ。



右の図より
$\vec{d}=\vec{f}$，$\vec{b}=-\vec{e}$
よって
等しいベクトルは
$\vec{d}$ と $\vec{f}$
互いに逆ベクトルであるものは　$\vec{b}$ と $\vec{e}$



② ベクトルの加法・減法・実数倍

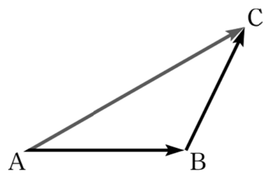
ベクトルの加法

（教科書 p.54）

問2 右の図において，次の和を求めよ。

（1） $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{\mathbf{AB}}$



（2） $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{\mathbf{BA}}$

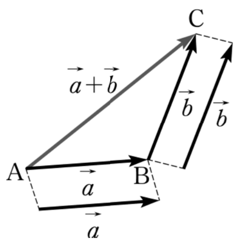
一般に，2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の和は次のようになる。

まず 1 つの点 A をとり，次に

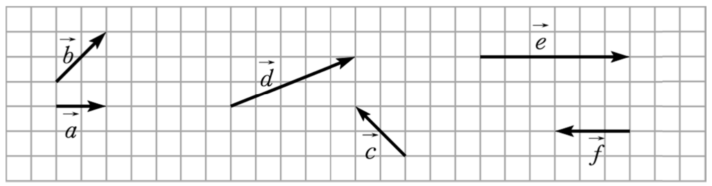
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\quad\vec{b}=\overrightarrow{BC}$

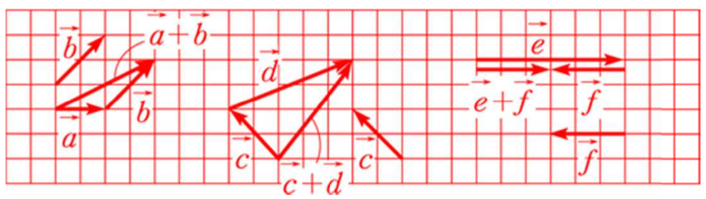
となるように点 B, C をとる。このとき，$\overrightarrow{AC}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（⑪　和　）を表している。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和を（⑫　$\vec{a}+\vec{b}$　）と書く。



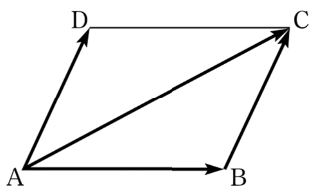
問3 下の図で，$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{e}+\vec{f}$ を図示せよ。





例2 右の図の平行四辺形 ABCD において

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$
$$=\overrightarrow{AC}$$



ベクトルの加法については，次のことが成り立つ。

ベクトルの加法の性質		
（1）	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	交換法則
（2）	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	結合法則

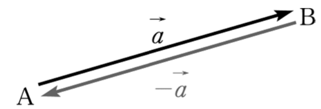
零ベクトル

（教科書 p.55）

$\overrightarrow{AA}$ は始点と終点が一致したベクトルである。これを（⑬　零ベクトル　）といい，（⑭　$\vec{0}$　）で表す。

$\vec{0}$ には次のような性質がある。

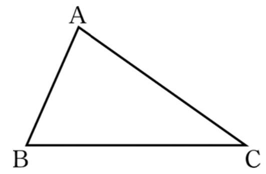
（⑮　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$　），（⑯　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$　）



問4 平面上に 3 点 A, B, C がある。このとき

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$

が成り立つことを示せ。



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AA}$

$=\vec{0}$

ベクトルの減法

（教科書 p.56）

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，その（⑰　差 $\vec{a}-\vec{b}$　）を

（⑱　$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$　）

と定める。$\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，差 $\vec{a}-\vec{b}$ は図 1 のようにかくことができる。

また，図 2 からわかるように，$\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ は等式 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ を満たすベクトルである。

図 1

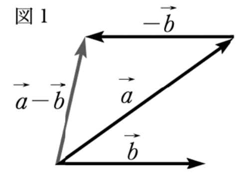


図 2

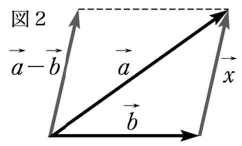
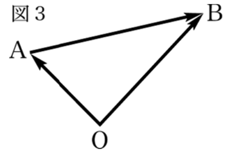


図 3 において，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ であるから

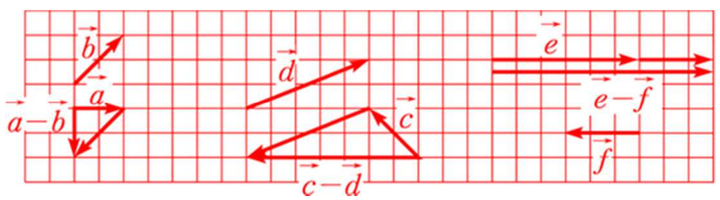
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

が成り立つ。

図 3



問5 問 3 で $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{d}$, $\vec{e}-\vec{f}$ を図示せよ。



ベクトルの実数倍

（教科書 p.56）

ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，（⑲ $k\vec{a}$ ）すなわち（⑳ $\vec{a}$ の k 倍 ）を次のように定める。

$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$k\vec{a}$ は

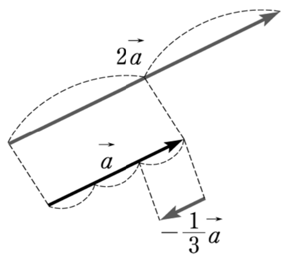
(1) $k>0$ ならば，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが k 倍のベクトル
　とくに，$1\vec{a}=\vec{a}$

(2) $k<0$ ならば，$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが $|k|$ 倍のベクトル
　とくに，$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

(3) $k=0$ ならば，$\vec{0}$ すなわち $0\vec{a}=\vec{0}$

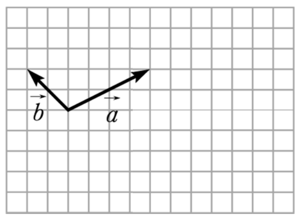
$\vec{a}=\vec{0}$ のとき，$k\vec{0}=\vec{0}$

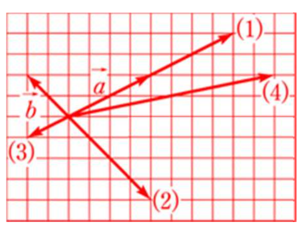
例3 ベクトル $\vec{a}$ に対して，$2\vec{a}$ は（ $\vec{a}$ と同じ向きで大きさが 2 倍 ）のベクトルである。
$-\frac{1}{3}\vec{a}$ は（ $\vec{a}$ と反対の向きで大きさが $\frac{1}{3}$ 倍 ）のベクトルである。



問6 右の図のように $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。

(1) $2\vec{a}$ (2) $-2\vec{b}$
(3) $-\frac{1}{2}\vec{a}$ (4) $2\vec{a}-\vec{b}$



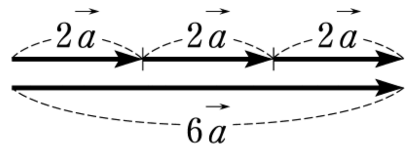


k, l を実数とするとき，次のことが成り立つ。

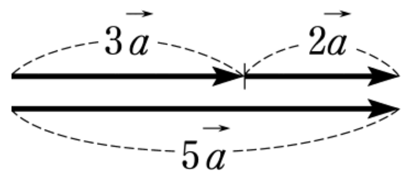
ベクトルの実数倍の性質	
(1)	$\boldsymbol{k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}}$
(2)	$\boldsymbol{(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}}$
(3)	$\boldsymbol{k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}}$

これらの性質は，次の図を用いて確かめることができる。

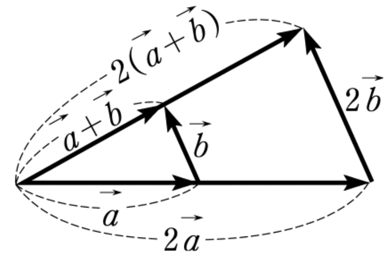
(1) $3(2\vec{a})=6\vec{a}$



(2) $3\vec{a}+2\vec{a}=5\vec{a}$



(3) $2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$



例4 $3(\vec{a}-2\vec{b})+2(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}-6\vec{b}+6\vec{a}+2\vec{b}$
$=(3+6)\vec{a}+(-6+2)\vec{b}=9\vec{a}-4\vec{b}$

問7 次の計算をせよ。

(1) $3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a}$
$=(3+4-2)\vec{a}$
$=\boldsymbol{5\vec{a}}$

(2) $3(\vec{a}-2\vec{b})-4(\vec{a}-\vec{b})$
$=3\vec{a}-6\vec{b}-4\vec{a}+4\vec{b}$
$=(3-4)\vec{a}+(-6+4)\vec{b}$
$=\boldsymbol{-\vec{a}-2\vec{b}}$

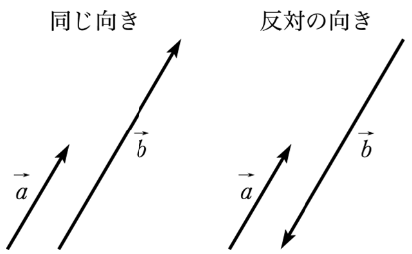
問8 $6\vec{a}-\vec{x}=2\vec{x}+3\vec{b}$ であるとき，$\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

$$6\vec{a}-\vec{x}=2\vec{x}+3\vec{b}$$
$$(-1-2)\vec{x}=-6\vec{a}+3\vec{b}$$
$$-3\vec{x}=-6\vec{a}+3\vec{b}$$
$$\boldsymbol{\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}}$$

ベクトルの平行

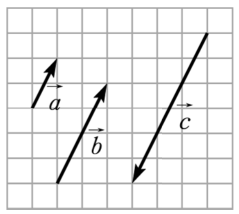
（教科書 p.58）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が同じ向き，または反対の向きであるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㉑　平行　）であるといい，（㉒　$\vec{a}\parallel\vec{b}$　）と書く。



ベクトルの平行条件
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\parallel\vec{b}}\iff\boldsymbol{\vec{b}=k\vec{a}}$ となる実数 $\boldsymbol{k}$ がある

例5 右の図において，$\vec{a}\parallel\vec{b}$ であり，（　$\vec{b}=2\vec{a}$　）と表すことができる。



問9 例 5 の図において，$\vec{c}$ を $\vec{a}$ で表せ。また，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を $\vec{c}$ で表せ。

$\boldsymbol{\vec{c}=-3\vec{a}}$

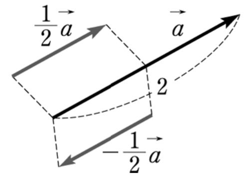
$\vec{c}=-3\vec{a}$ より　$\boldsymbol{\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{c}}$

$\vec{b}=2\vec{a}$，$\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{c}$ より

$$\boldsymbol{\vec{b}}=2\vec{a}=2\left(-\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\vec{c}}$$

例6 $|\vec{a}|=2$ のとき，$\vec{a}$ と平行で大きさが 1 のベクトルは

$\frac{1}{2}\vec{a}$　と　$-\frac{1}{2}\vec{a}$



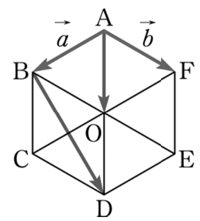
大きさが 1 のベクトルを（㉓　単位ベクトル　）という。

ベクトルの分解

（教科書 p.59）

例題 1 右の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(1)　$\overrightarrow{AO}$　　　(2)　$\overrightarrow{BD}$



解 (1)　$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}$
$=\vec{a}+2\vec{b}$

問 10 例題 1 において，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。 p.72 Training 1

(1)　$\overrightarrow{BF}$

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$$
$$=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$$
$$\boldsymbol{=-\vec{a}+\vec{b}}$$

(2)　$\overrightarrow{DF}$

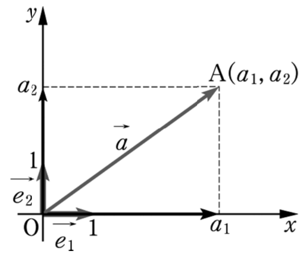
$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$$
$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OA}$$
$$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$$
$$=-\vec{a}-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$
$$\boldsymbol{=-2\vec{a}-\vec{b}}$$

③ ベクトルの成分

座標とベクトル

（教科書 p.60）

O を原点とする座標平面上で，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを（㉔　基本ベクトル　）といい，それぞれ（㉕　$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$　）で表す。



与えられたベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A をとり，その座標を $(a_1,\ a_2)$ とすると，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

と表される。この a_1，a_2 をそれぞれ $\vec{a}$ の（㉖　x 成分，y 成分　）といい，$\vec{a}$ を

（㉗　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$　）

と書き表す。この表し方を $\vec{a}$ の（㉘　成分表示　）という。

とくに，$\vec{0}$，および $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ の成分表示は次のようになる。

$$\vec{0}=(0,\ 0),\quad \vec{e_1}=(1,\ 0),\quad \vec{e_2}=(0,\ 1)$$

また，2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ に対して

（㉙　$\vec{a}=\vec{b}\iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$　）

$\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は，線分 OA の長さであるから，成分表示されたベクトルの大きさは，次のようになる。

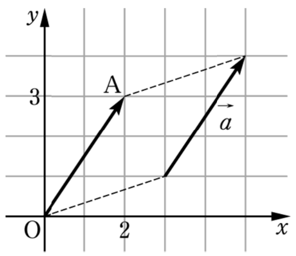
ベクトルの大きさ
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

例7 右の図の $\vec{a}$ を成分表示し，その大きさを求めてみよう。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標は（　$(2,\ 3)$　）であるから

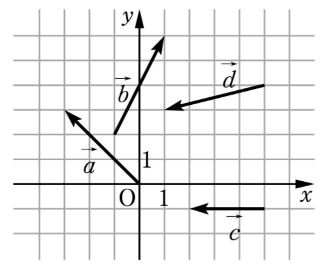
$\vec{a}=(2,\ 3)$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$



（教科書 p.61）

問 11 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を成分表示し，その大きさを求めよ。



$\vec{a}=(-3,\ 3)$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\vec{b}=(2,\ 4)$

$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\vec{c}=(-3,\ 0)$

$|\vec{c}|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$

$\vec{d}=(-4,\ -1)$

$|\vec{d}|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$

成分による計算

（教科書 p.61）

一般に，ベクトルの成分による計算について，次のことが成り立つ。

成分による計算
(1)　$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$
(2)　$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$
(3)　$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　　k は実数

例8 $\vec{a}=(2,\ 5)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$ のとき，$4\vec{a}+3\vec{b}$ を成分表示してみよう。

$$\begin{aligned}4\vec{a}+3\vec{b}&=4(2,\ 5)+3(-2,\ 3)\\&=(8,\ 20)+(-6,\ 9)\\&=(2,\ 29)\end{aligned}$$

問 12 $\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

p.72 Training 2

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(2,\ -3)+(-1,\ 2)\\&=(1,\ -1)\end{aligned}$$

(2)　$2\vec{a}-5\vec{b}$

$$\begin{aligned}2\vec{a}-5\vec{b}&=2(2,\ -3)-5(-1,\ 2)\\&=(4,\ -6)+(5,\ -10)\\&=(9,\ -16)\end{aligned}$$

(3)　$3(2\vec{a}-6\vec{b})-5(\vec{a}-4\vec{b})$

$3(2\vec{a}-6\vec{b})-5(\vec{a}-4\vec{b})$
$=6\vec{a}-18\vec{b}-5\vec{a}+20\vec{b}$
$=\vec{a}+2\vec{b}$
$=(2,\ -3)+2(-1,\ 2)$
$=(2,\ -3)+(-2,\ 4)$
$=\mathbf{(0,\ 1)}$

単位ベクトルと成分表示

（教科書 p.62）

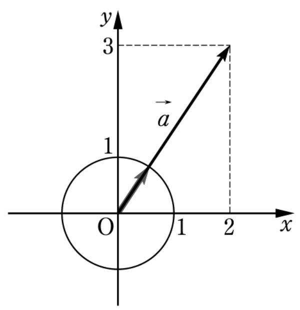
例9 $\vec{a}=(2,3)$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを成分表示してみよう。

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

であるから，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$\frac{1}{\sqrt{13}}\vec{a}=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\ \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

である。



問 13 次のベクトルと同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。

p.72 Training 3

(1)　$\vec{a}=(4,\ -3)$

$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

であるから，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$\frac{1}{5}\vec{a}=\left(\mathbf{\frac{4}{5}},\ -\mathbf{\frac{3}{5}}\right)$

(2)　$\vec{b}=(-1,\ 2)$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

であるから，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{b}=\left(-\mathbf{\frac{1}{\sqrt{5}}},\ \mathbf{\frac{2}{\sqrt{5}}}\right)$

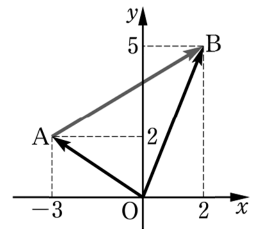
座標と成分表示

（教科書 p.63）

例 10 A$(-3,\ 2)$，B$(2,\ 5)$ のとき，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，その大きさを求めてみよう。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,\ 5)-(-3,\ 2)$
$=(2-(-3),\ 5-2)=(5,\ 3)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$



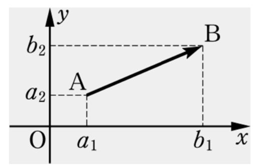
一般に，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の成分表示と大きさは次のようになる。

座標と成分表示

A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ のとき

(1)　$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(\boldsymbol{b_1-a_1},\ \boldsymbol{b_2-a_2})$

(2)　$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{(\boldsymbol{b_1-a_1})^2+(\boldsymbol{b_2-a_2})^2}$



問 14 3 点 A$(-2,\ 6)$，B$(3,\ -1)$，C$(3,\ -4)$ について，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$ の成分表示を求めよ。また，その大きさを求めよ。

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(3-(-2),\ -1-6)=\mathbf{(5,\ -7)}$

$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{5^2+(-7)^2}=\mathbf{\sqrt{74}}$

$\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\left(3-3,\ -4-(-1)\right)=\mathbf{(0,\ -3)}$

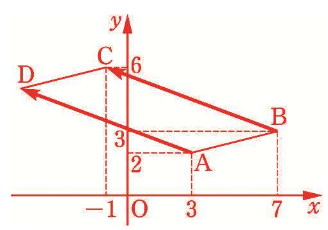
$|\overrightarrow{\mathbf{BC}}|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{9}=\mathbf{3}$

$\overrightarrow{\mathbf{CA}}=\left(-2-3,\ 6-(-4)\right)=\mathbf{(-5,\ 10)}$

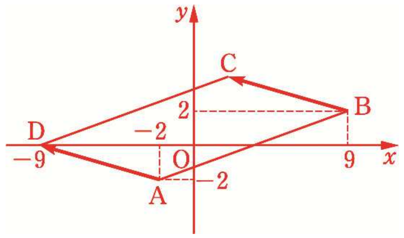
$|\overrightarrow{\mathbf{CA}}|=\sqrt{(-5)^2+10^2}=\sqrt{125}=\mathbf{5\sqrt{5}}$

例題 2 平面上に 3 点 A$(3,\ 2)$，B$(7,\ 3)$，C$(-1,\ 6)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ。

解　点 D の座標を $(x,\ y)$ とすると，
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ であるから
$(x-3,\ y-2)=(-1-7,\ 6-3)$
よって
$x-3=-8,\ y-2=3$
ゆえに　$x=-5,\ y=5$　　したがって　　D$(-5,\ 5)$



問 15 平面上に 3 点 A$(-2,\ -2)$, B$(9,\ 2)$, D$(-9,\ 0)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 C の座標を求めよ。 p.72 Training 4



点 C の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ であるから

$$\bigl(-9-(-2),\ 0-(-2)\bigr)$$

$$= (x-9,\ y-2)$$

よって

$$x-9=-7,\ y-2=2$$

したがって　$x=2,\ y=4$

ゆえに　**C$(2,\ 4)$**

ベクトルの平行

（教科書 p.64）

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき,

（[30]　$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff (b_1,\ b_2) = k(a_1,\ a_2)$ となる実数 k がある　）

が成り立つ。

例 11 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-3,\ 6)$ のとき,

（　$\vec{b}=-3\vec{a}$　）となるから

（　$\vec{a} \parallel \vec{b}$　）

である。

例題 3 $\vec{a}=(4,\ -6)$, $\vec{b}=(x,\ 9)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

解 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ であるから，実数 k を用いると

$$\vec{b}=k\vec{a}$$

よって

$$(x,\ 9)=k(4,\ -6)=(4k,\ -6k)$$

ゆえに

$$\begin{cases} x=4k & \cdots\cdots ① \\ 9=-6k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より　$k=-\frac{3}{2}$

これを①に代入すると

$$x=-6$$

問 16 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-3,\ y)$ が平行になるように，y の値を定めよ。 p.72 Training 5,6

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ であるから，実数 k を用いると

$$\vec{b}=k\vec{a}$$

よって　$(-3,\ y)=k(1,\ -2)$

$$=(k,\ -2k)$$

したがって　$\begin{cases} -3=k & \cdots\cdots ① \\ y=-2k & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①を②に代入すると

$$\boldsymbol{y=6}$$

例題 4 $\vec{a}=(4,\ 3)$ に平行で，大きさが 10 であるベクトルを求めよ。

解 求めるベクトルを $\vec{b}$ とする。

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ であるから，実数 k を用いると

$$\vec{b}=k\vec{a}=k(4,\ 3)=(4k,\ 3k) \quad \cdots\cdots ①$$

$|\vec{b}|=10$ より　$(4k)^2+(3k)^2=10^2$

$$k^2=4$$

よって　$k=\pm 2$

ゆえに，①より求めるベクトルは　$(8,\ 6)$, $(-8,\ -6)$

問 17 $\vec{a}=(\sqrt{3},\ -1)$ に平行で，大きさが 6 であるベクトルを求めよ。 p.72 Training 7 p.106 Level Up 1

求めるベクトルを $\vec{b}$ とする。

$\vec{a}\mathbin{/\!/}\vec{b}$ であるから，実数 k を用いると

$$\vec{b}=k\vec{a}$$
$$=k(\sqrt{3},\ -1)$$
$$=(\sqrt{3}k,\ -k) \quad \cdots\cdots ①$$

$|\vec{b}|=6$ より

$$(\sqrt{3}k)^2+(-k)^2=6^2$$

よって　$k=\pm3$

ゆえに，①より求めるベクトルは

$$\boldsymbol{(3\sqrt{3},\ -3),\ (-3\sqrt{3},\ 3)}$$

$k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表されるベクトル

（教科書 p.65）

例題 5 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(3,\ 8)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形に表せ。

解

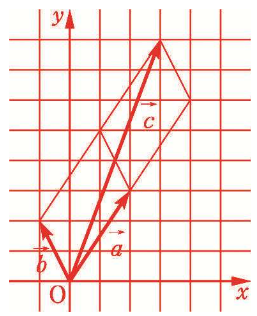
$$k\vec{a}+l\vec{b}=k(2,\ 3)+l(-1,\ 2)$$
$$=(2k-l,\ 3k+2l)$$

これが $\vec{c}=(3,\ 8)$ に等しいから

$$\begin{cases}2k-l=3\\3k+2l=8\end{cases}$$

これを解くと　$k=2,\ l=1$

ゆえに　$\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$



問 18 $\vec{a}=(3,\ 5)$, $\vec{b}=(-2,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(16,\ 0)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形に表せ。 p.72 Training 8

$$k\vec{a}+l\vec{b}=k(3,\ 5)+l(-2,\ 2)$$
$$=(3k-2l,\ 5k+2l)$$

これが $\vec{c}=(16,\ 0)$ に等しいから

$$\begin{cases}3k-2l=16\\5k+2l=0\end{cases}$$

これを解くと　$k=2,\ l=-5$

ゆえに　$\boldsymbol{\vec{c}=2\vec{a}-5\vec{b}}$

4 ベクトルの内積

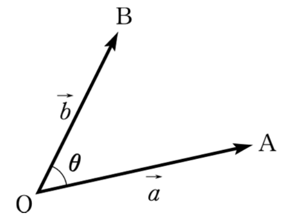
ベクトルの内積

（教科書 p.66）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，点 O を始点として，
$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ となるように点 A, B をとる。このとき

$$\angle AOB=\theta$$

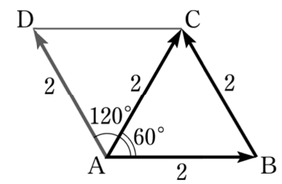
を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（㉛　なす角　）という。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。
このとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（㉜　内積　）といい，
（㉝　$\vec{a}\cdot\vec{b}$　）で表す。



ベクトルの内積
2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta}$

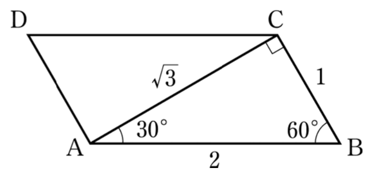
注意　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトルではなく実数である。

例 12 右の図のような平行四辺形 ABCD において，次の内積を求めてみよう。



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\times\cos60^\circ=2$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$$
$$=2\times2\times\cos120^\circ=-2$$

問 19 右の図のような平行四辺形ABCD において，次の内積を求めよ。



p.72 Training 9

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times\sqrt{3}\times\cos30^\circ$$
$$=\boldsymbol{3}$$

(2)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\sqrt{3}\times1\times\cos90^\circ$$
$$=\boldsymbol{0}$$

(3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$

$=1\times 2\times\cos 60^\circ$

$=\mathbf{1}$

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=2\times 1\times\cos 120^\circ$

$=\mathbf{-1}$

内積と成分

（教科書 p.67）

内積と成分
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$

例 13 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 4)$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めてみよう。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+3\times 4=10$

問 20 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(-2,\ 3)$, $\vec{b}=(5,\ 4)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)\times 5+3\times 4$

$=\mathbf{2}$

(2) $\vec{a}=(3,\ 5)$, $\vec{b}=(-4,\ 1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times(-4)+5\times 1$

$=\mathbf{-7}$

(3) $\vec{a}=(7,\ 3)$, $\vec{b}=(-3,\ 7)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=7\times(-3)+3\times 7$

$=\mathbf{0}$

(4) $\vec{a}=\left(3,\ \sqrt{3}\right)$, $\vec{b}=\left(-\sqrt{3},\ 1\right)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times\left(-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\times 1$

$=\mathbf{-2\sqrt{3}}$

ベクトルのなす角

（教科書 p.68）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると，内積の定義 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}}\quad \text{ただし，}0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$$

例題 6 次の 2 つのベクトルのなす角 θ を求めよ。

$\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 3)$

解 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times 1+1\times 3=5$

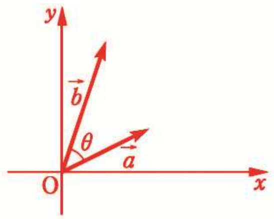
$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=45^\circ$



問 21 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

p.72 Training 10

(1) $\vec{a}=(3,\ 0)$, $\vec{b}=\left(1,\ \sqrt{3}\right)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times 1+0\times\sqrt{3}=3$

$|\vec{a}|=3$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{3\times 2}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$であるから

$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

(2) $\vec{a}=(1,\ \sqrt{3}),\ \vec{b}=(\sqrt{3},\ 1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 1=2\sqrt{3}$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから

$\boldsymbol{\theta=30°}$

(3) $\vec{a}=(2,\ 1),\ \vec{b}=(3,-6)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times 3+1\times(-6)=0$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから

$\boldsymbol{\theta=90°}$

(4) $\vec{a}=(1,\ -2),\ \vec{b}=(-2,\ 4)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+(-2)\times 4=-10$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-10}{\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}=-1$$

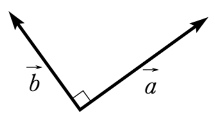
$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから

$\boldsymbol{\theta=180°}$

ベクトルの垂直

(教科書 p.68)

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角が 90° であるとき，
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㉞ 垂直 ）であるといい，（㉟ $\vec{a}\perp\vec{b}$ ）で表す。



(教科書 p.69)

ベクトルの垂直条件
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき　$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}}\iff\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

さらに，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のときには，次のように表される。
（㊱ $\vec{a}\perp\vec{b}\iff a_1b_1+a_2b_2=0$ ）

例 14 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-6,\ x)$ が垂直になるような x の値を求めてみよう。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より　$2\times(-6)+3\times x=0$

よって　$x=4$

問 22 $\vec{a}=(x+2,\ -6)$, $\vec{b}=(9,\ x)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より

$(x+2)\times 9+(-6)\times x=0$

よって　$\boldsymbol{x=-6}$

例題 7 $\vec{a}=(-3,\ 1)$ に垂直で，大きさが 10 であるベクトルを求めよ。

解 求めるベクトルを $\vec{b}=(x,\ y)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるから　$-3x+y=0$　……①

$|\vec{b}|=10$ であるから　$x^2+y^2=10^2$　……②

① より　$y=3x$　……③

②に代入すると　$x^2+(3x)^2=10^2$

$x^2=10$

よって　$x=\pm\sqrt{10}$

③に代入すると，$x=\sqrt{10}$ のとき　$y=3\sqrt{10}$

$x=-\sqrt{10}$ のとき　$y=-3\sqrt{10}$

ゆえに，求めるベクトルは

$(\sqrt{10},\ 3\sqrt{10})$, $(-\sqrt{10},\ -3\sqrt{10})$

問 23 $\vec{a}=(3,\ 4)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

求めるベクトルを $\vec{b}=(x,\ y)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるから　$3x+4y=0$　……①

$|\vec{b}|=1$ であるから　$x^2+y^2=1^2$　……②

① より　$y=-\frac{3}{4}x$　……③

② に代入すると　$x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2=1^2$

これを解くと　$x=\pm\frac{4}{5}$

③ に代入すると　$x=\frac{4}{5}$ のとき　$y=-\frac{3}{5}$

$x=-\frac{4}{5}$ のとき　$y=\frac{3}{5}$

ゆえに　$\left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$，$\left(-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$

内積の性質

（教科書 p.70）

内積の性質		
(1)	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$	
(2)	$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$	
(3)	$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$	k は実数
(4)	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$	
(5)	$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$	

例 15 $|\vec{a}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$\vec{a}\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$ の値を求めてみよう。

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{a}-3\vec{b})&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot(3\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=3^2-3\times(-2)=15\end{aligned}$$

問 24 $|\vec{a}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-3$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\vec{a}\cdot(2\vec{b}-3\vec{c})$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(2\vec{b}-3\vec{c})&=\vec{a}\cdot(2\vec{b})-\vec{a}\cdot(3\vec{c})\\&=2\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=2\times5-3\times(-3)\\&=\mathbf{19}\end{aligned}$$

(2)　$2\vec{a}\cdot(\vec{a}+4\vec{c})$

$$\begin{aligned}2\vec{a}\cdot(\vec{a}+4\vec{c})&=2\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot(4\vec{c})\\&=2|\vec{a}|^2+8\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=2\times2^2+8\times(-3)\\&=\mathbf{-16}\end{aligned}$$

例題 8 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

証明

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

よって　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

問 25 次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2&=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

よって

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

(2)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

$$\begin{aligned}&(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

よって

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$$

例題 9 $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ のとき，$|\vec{a}+2\vec{b}|$の値を求めよ。

考え方 内積の性質(2)から，$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$ を利用する。

解 $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})+2\vec{b}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot(2\vec{b})+2\vec{b}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot(2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=2^2+4\times(-1)+4\times3^2=36$

$|\vec{a}+2\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{36}=6$

問 26 $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=1^2+2\times2+3^2=14$

$|\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ であるから

$|\vec{a}+\vec{b}|=\boldsymbol{\sqrt{14}}$

(2) $|2\vec{a}-\vec{b}|$

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2$

$=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$

$=2\vec{a}\cdot(2\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$

$=2\vec{a}\cdot(2\vec{a})-2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot(2\vec{a})+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4\times1^2-4\times2+3^2=5$

$|2\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ であるから

$|2\vec{a}-\vec{b}|=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

問 27 $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。 p.72 Training 11　p.106 Level Up 2,3

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$(\sqrt{5})^2=2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2$

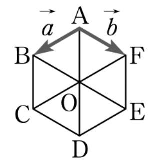
$2\vec{a}\cdot\vec{b}=8$

ゆえに　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=4}$

Training

(教科書 p.72)

1 右の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。次のベクトルを $\vec{a},\ \vec{b}$ で表せ。



(1) $\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AO}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$

$=-(\vec{a}+\vec{b})=\boldsymbol{-\vec{a}-\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{AB}$

$=\boldsymbol{-2\vec{a}}$

(3) $\overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$

$=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}}$

(4) $\overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AE}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})$

$=-(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF})$

$=-(\vec{a}+2\vec{b})=\boldsymbol{-\vec{a}-2\vec{b}}$

2 $\vec{a}=(-3,\ 1),\ \vec{b}=(-4,\ -2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $\vec{b}-\vec{a}$

$\vec{b}-\vec{a}=(-4,\ -2)-(-3,\ 1)$

$=\boldsymbol{(-1,\ -3)}$

(2) $-3\vec{a}+2\vec{b}$

$-3\vec{a}+2\vec{b}=-3(-3,\ 1)+2(-4,\ -2)$

$=(9,\ -3)+(-8,\ -4)$

$=\boldsymbol{(1,\ -7)}$

(3) $2(\vec{b}-2\vec{a})+5\vec{a}-3\vec{b}$

$2(\vec{b}-2\vec{a})+5\vec{a}-3\vec{b}$

$=2\vec{b}-4\vec{a}+5\vec{a}-3\vec{b}$

$=\vec{a}-\vec{b}=(-3,\ 1)-(-4,\ -2)$

$=\boldsymbol{(1,\ 3)}$

3 次のベクトルと同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。

(1) $\vec{a}=(-3,\ 2)$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

であるから，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$\frac{1}{\sqrt{13}}\vec{a}=\left(-\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{13}}},\ \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{13}}}\right)$

(2) $\vec{b}=(1,\ -7)$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-7)^2}=5\sqrt{2}$

であるから，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$\frac{1}{5\sqrt{2}}\vec{b}=\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{2}}},\ -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{2}}}\right)$

4 平面上に 3 点 A(1, 3), C(−2, −2), D(3, −5) がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 B の座標を求めよ。

点 B の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ であるから

$(x-1,\ y-3)=(-2-3,\ -2-(-5))$

よって

$x-1=-5,\ y-3=3$

したがって　$x=-4,\ y=6$

ゆえに　**B(−4, 6)**

5 $\vec{a}=(x,\ -2)$, $\vec{b}=(-3,\ -4)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ であるから，実数 k を用いると

$\vec{b}=k\vec{a}$

よって　$(-3,\ -4)=k(x,\ -2)$

$=(kx,\ -2k)$

したがって　$\begin{cases}-3=kx & \cdots\cdots①\\ -4=-2k & \cdots\cdots②\end{cases}$

②より　$k=2$

これを①に代入すると

$\boldsymbol{x=-\frac{3}{2}}$

6 $\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ -4)$, $\vec{c}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるように，実数 t の値を定めよ。

$(\vec{a}+t\vec{b})\,/\!/\,\vec{c}$ であるから，実数 k を用いると

$\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$

よって

$(3,\ -2)+t(1,\ -4)=k(-1,\ 2)$

$(3+t,\ -2-4t)=(-k,\ 2k)$

したがって　$\begin{cases}3+t=-k & \cdots\cdots①\\ -2-4t=2k & \cdots\cdots②\end{cases}$

①より　$k=-t-3$

これを②に代入すると

$\boldsymbol{t=2}$

7 $\vec{a}=(-2,\ \sqrt{5})$ に平行で，大きさが $\sqrt{3}$ であるベクトルを求めよ。

求めるベクトルを $\vec{b}$ とする。

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ であるから，実数 k を用いると

$\vec{b}=k\vec{a}$

$=k(-2,\ \sqrt{5})$

$=(-2k,\ \sqrt{5}k)$　……①

$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ より

$(-2k)^2+(\sqrt{5}k)^2=(\sqrt{3})^2$

よって　$k=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

ゆえに，①より求めるベクトルは

$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{3}},\ -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)$

すなわち

$\left(-\frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}},\ \frac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{3}}\right),\ \left(\frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}},\ -\frac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{3}}\right)$

8 $\vec{a}=(2,\ -5)$, $\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(1,\ -8)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形に表せ。

$$k\vec{a}+l\vec{b}=k(2,\ -5)+l(-3,\ 2)$$
$$=(2k-3l,\ -5k+2l)$$

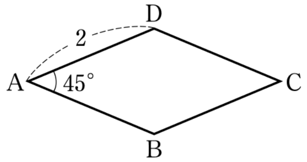
これが $\vec{c}=(1,\ -8)$ に等しいから

$$\begin{cases}2k-3l=1\\-5k+2l=-8\end{cases}$$

これを解くと　$k=2,\ l=1$

ゆえに　$\boldsymbol{\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}}$

9 右の図のようなひし形 ABCD において，次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times2\times\cos45^\circ$$
$$=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

(2) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times2\times\cos180^\circ$$
$$=\boldsymbol{-4}$$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$$
$$=2\times2\times\cos135^\circ$$
$$=-2\sqrt{2}$$

10 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(-1,\ 4)$, $\vec{b}=(2,\ -8)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times2+4\times(-8)=-34$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-8)^2}=2\sqrt{17}$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-34}{\sqrt{17}\times2\sqrt{17}}=-1$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから

$\boldsymbol{\theta=180^\circ}$

(2) $\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$, $\vec{b}=(-\sqrt{3},\ 1)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-\sqrt{3})+(-\sqrt{3})\times1$$
$$=-2\sqrt{3}$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから

$\boldsymbol{\theta=150^\circ}$

(3) $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ -2)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+1\times(-2)=0$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから

$\boldsymbol{\theta=90^\circ}$

(4) $\vec{a}=(1,\ \sqrt{2})$, $\vec{b}=(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}\times(1+\sqrt{2})$$
$$=3$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから

$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$

11 $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3\sqrt{2},\ |\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{13}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値および $\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$(2\sqrt{13})^2=2^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times(3\sqrt{2})^2$

$4\vec{a}\cdot\vec{b}=-24$

よって

$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=-6}$

また

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-6}{2\times3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから

$\boldsymbol{\theta=135°}$