1節 数列

❶ 数列

（教科書 p.8）

数をある規則に従って順に並べたものを(① 　　　　　)といい，それぞれの数を(② 　　　　　)という。

数列を一般的に表すには，1 つの文字に項の番号を添えて

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

のように書く。そして，それぞれの項をこの数列の（③ 　　　　　）(第 1 項)，第 2 項，第 3 項，…といい，n 番目の項 a_n を（④ 　　　　　）という。

また，この数列を簡単に（⑤ 　　　　　）と表す。

問1 次の数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　7 から始めて，次々に 5 を加えて得られる数列

(2)　2 から始めて，次々に 3 を掛けて得られる数列

一般に，数列 $\{a_n\}$ において，a_n を n の式で表したとき，この a_n を数列 $\{a_n\}$ の(⑥ 　　　　　)という。

例1 数列 $\{a_n\}$ の一般項が，$a_n = 3n - 1$ であるとき

初項は

第 2 項は

第 3 項は

第 4 項は

となる。これは，初項 2 に，次々に（ 　　　　　）得られる数列である。

問2 一般項が次のように表される数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　$a_n = 3n + 1$

(2)　$a_n = n^2$

(3)　$a_n = (-2)^n$

例2 正の 5 の倍数を小さい方から順に並べた数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までは

であり，一般項は次のように表される。

問3 次の数列の初項から第 5 項までを書き，一般項を求めよ。

(1)　正の 3 の倍数を小さい方から順に並べた数列 $\{a_n\}$

(2)　正の奇数を小さい方から順に並べた数列 $\{b_n\}$

項の個数が有限である数列を（⑦　　　　　　）といい，項の個数が有限でない数列を（⑧　　　　　　）という。有限数列では，項の個数を（⑨　　　　　），最後の項を（⑩　　　　　）という。

例3 正の 4 の倍数を小さい方から順に 10 個並べた数列

$$4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32,\ 36,\ 40$$

は（　　　　　　）で，初項は（　　　　），末項は（　　　　），項数は（　　　　）である。

❷ 等差数列

等差数列

（教科書 p.10）

初項 a から始めて，一定の数 d を次々に加えて得られる数列を（⑪　　　　　　）といい，d をその等差数列の（⑫　　　　　）という。

例4 (1)　正の奇数を小さい方から順に並べた数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$$

は，初項（　　　　），公差（　　　　）の等差数列である。

(2)　初項 8，公差 -2 の等差数列は，次のようになる。

問4 次の等差数列の初項と公差を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

(1)　$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \cdots$

(2)　$7,\ 1,\ -5,\ -11,\ \cdots$

問5 次の等差数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　初項 5，公差 8

(2)　初項 9，公差 -3

等差数列の一般項

（教科書 p.10）

等差数列の一般項
初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$

例5 初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

また，この数列の第 20 項は

問6 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 25 項を求めよ。

（1） 初項 3，公差 5

（2） 初項 7，公差 -4

例題 1 初項 4，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。また，55 はこの数列の第何項か。

解

問7 初項 6，公差 -5 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。
また，-54 はこの数列の第何項か。

p.22 Training 1

例題 2 第 4 項が 14，第 10 項が 62 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

考え方 初項，公差がわかれば，一般項 $a_n = a + (n-1)d$ を求めることができる。

解

問8 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

p.22 Training 2

（1） 初項が 3，第 15 項が 87

(2) 第 3 項が 6，第 10 項が -29

例題 3 初項 20，公差 -3 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて負となるか。

解

問9 初項 50，公差 -4 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて負となるか。 p.22 Training 3

3 等差数列の和

等差数列の和

（教科書 p.13）

等差数列の和
初項 a，公差 d，項数 n，末項 l の等差数列の和を S_n とすると $$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

例6 (1) 初項 3，末項 19，項数 9 の等差数列の和 S_9 は

(2) 初項 4，公差 3，項数 17 の等差数列の和 S_{17} は

問 10 次の等差数列の和を求めよ。 p.22 Training 4

(1) 初項 7，末項 61，項数 10

(2) 初項 -10，公差 4，項数 13

例7 5 から 31 までの奇数の和 $5+7+9+\cdots+31$ を求めてみよう。

これは，初項 5，公差 2 の等差数列の和である。

末項31 を第 n 項とすると

これより，

よって，求める奇数の和 S_{14} は

問 11 等差数列の和 $(-5)+(-2)+1+\cdots+22$ を求めよ。

例題 4 初項 24，公差 -4 の等差数列において，初項から第何項までの和が -60 となるか。

解

問 12 初項 -21，公差 3 の等差数列において，初項から第何項までの和が 81 となるか。

p.22 Training 5

1 から n までの自然数 1，2，3，…，n の和は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから，次の公式が得られる。

（⑬　　　　　　　　　　　　　　　　）

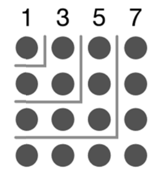
また，1 から始まる n 個の奇数の和

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

は，初項 1，末項 $2n-1$，項数 n の等差数列の和であるから，次のようになる。

$$\frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}=n^2$$

よって　（⑭　　　　　　　　　　　　　　　　）



$1 = 1^2$

$1+3 = 2^2$

$1+3+5 = 3^2$

$1+3+5+7 = 4^2$

問 13 次の数の和を求めよ。

(1)　1 から 100 までの自然数

(2)　1 から 59 までの奇数

例題 5 2 桁の自然数のうち，3 の倍数であるものの和を求めよ。

解

10	11	12
13	14	15
16	17	18
………		…
………		…
97	98	99

問 14 2 桁の自然数のうち，7 の倍数であるものの和を求めよ。 p.22 Training 6 p.46 Level Up 1-3

4 等比数列

等比数列

（教科書 p.16）

初項 a から始めて一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を（⑮　　　　　）といい，r をその等比数列の（⑯　　　　　）という。

例8 (1) 等比数列 $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$ の初項は（　　　　），公比は（　　　　）である。

(2) 初項 2，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列は，次のようになる。

問 15 次の等比数列の初項と公比を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

(1) $6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \cdots$

(2) $2,\ -6,\ 18,\ -54,\ \cdots$

問 16 次の等比数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) 初項 2，公比 3

(2) 初項 9，公比 $\frac{1}{3}$

等比数列の一般項

（教科書 p.16）

等比数列の一般項
初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$

例9 (1) 初項 5，公比 4 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

(2) 初項 -1，公比 -3 の等比数列 $\{b_n\}$ の一般項は

問 17 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 初項 1，公比 5

(2) 3，$-\frac{3}{2}$，$\frac{3}{4}$，$-\frac{3}{8}$，$\cdots$

例題 6 第 2 項が 6，第 4 項が 24 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

考え方 初項，公比がわかれば，一般項 $a_n = ar^{n-1}$ を求めることができる。

解

問 18 第 3 項が 36，第 5 項が 324 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 p.22 Training 7

⑤ 等比数列の和

等比数列の和

（教科書 p.18）

等比数列の和
初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は $r \neq 1$ のとき　$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}}$ $r = 1$ のとき　$\boldsymbol{S_n = na}$

例 10 (1)　初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 5 項までの和 S_5 は

(2)　初項 8，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 6 項までの和 S_6 は

(3)　等比数列 2，-6，18，-54，162，… の初項は 2，公比は -3 であるから，その初項から第 n 項までの和 S_n は

問 19 次の等比数列の和を求めよ。 p.22 Training 8(1)

(1)　初項 6，公比 3，項数 4

(2)　初項 3，公比 -2，項数 6

問 20 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。 p.22 Training 8(2)

(1)　1，3，9，27，…

(2)　2，1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，…

問 21 1 日目に 1 円，2 日目に 2 円，3 日目に 4 円というように，毎日，前日の 2 倍の金額を貯金していくと，10 日目には貯金の総額はいくらになるか。また， 20 日目にはどうか。

例題 7 初項から第 3 項までの和が 21，初項から第 6 項までの和が 189 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解

問 22 初項から第 3 項までの和が 35，初項から第 6 項までの和が 315 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。 p.22 Training 9

参考 等差中項と等比中項

（教科書 p.21）

一般に，3 つの数 a, b, c がこの順で等差数列であるとき

$$b - a = c - b$$

よって　（⑰　　　　　　）が成り立つ。

この b を（⑱　　　　　　）という。

問1 次の 3 つの数がこの順で等差数列であるとき，x の値を求めよ。

(1)　5, x, 13

(2)　$\frac{1}{6}$, x, $\frac{1}{2}$

一般に，0 でない 3 つの数 a, b, c がこの順で等比数列であるとき

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

よって　（⑲　　　　　　）が成り立つ。

この b を（⑳　　　　　　）という。

問2 次の 3 つの数がこの順で等比数列であるとき，x の値を求めよ。

(1)　3, x, 12

(2)　2, x, 3

Training

（教科書 p.22）

1 初項 -41，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。
また，3 はこの数列の第何項か。

2 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 初項が -2，第 5 項が 26

(2) 第 3 項が 41，第 7 項が 29

3 初項 -55，公差 4 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて正となるか。

4 次の等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 -1，末項 43，項数 12

(2) 初項 8，公差 -3，項数 11

5 初項 -40，公差 6 の等差数列において，初項から第何項までの和が初めて正となるか。

6 3 桁の自然数のうち，9 の倍数であるものの和を求めよ。

7 第 2 項が 6，第 5 項が 48 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

8 次の等比数列の和を求めよ。

(1) 初項 6，公比 2，項数 5 の等比数列の和

(2) 等比数列 $\frac{2}{3}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{2}{27}$，$\cdots$ の初項から第 n 項までの和

9 初項から第 3 項までの和が 7，初項から第 6 項までの和が -182 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

1節 数列

❶ 数列

（教科書 p.8）

数をある規則に従って順に並べたものを(① 数列)といい, それぞれの数を(② 項)という。

数列を一般的に表すには，1つの文字に項の番号を添えて

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

のように書く。そして，それぞれの項をこの数列の（③ 初項 ）(第1項)，第2項，第3項，…といい，n 番目の項 a_n を（④ 第 n 項 ）という。

また，この数列を簡単に（⑤ $\{a_n\}$ ）と表す。

問1 次の数列の初項から第5項までを求めよ。

(1) 7から始めて，次々に5を加えて得られる数列

初項 **7**

第2項 $7+5=\mathbf{12}$

第3項 $12+5=\mathbf{17}$

第4項 $17+5=\mathbf{22}$

第5項 $22+5=\mathbf{27}$

(2) 2から始めて，次々に3を掛けて得られる数列

初項 **2**

第2項 $2\times3=\mathbf{6}$

第3項 $6\times3=\mathbf{18}$

第4項 $18\times3=\mathbf{54}$

第5項 $54\times3=\mathbf{162}$

一般に, 数列 $\{a_n\}$ において, a_n を n の式で表したとき, この a_n を数列 $\{a_n\}$ の(⑥ 一般項)という。

例1 数列 $\{a_n\}$ の一般項が，$a_n=3n-1$ であるとき

初項は $a_1=3\times1-1=2$

第2項は $a_2=3\times2-1=5$

第3項は $a_3=3\times3-1=8$

第4項は $a_4=3\times4-1=11$

……

となる。これは，初項2に，次々に（ 3を加えて ）得られる数列である。

問2 一般項が次のように表される数列 $\{a_n\}$ の初項から第5項までを求めよ。

(1) $a_n=3n+1$

$\boldsymbol{a_1}=3\times1+1=\mathbf{4}$

$\boldsymbol{a_2}=3\times2+1=\mathbf{7}$

$\boldsymbol{a_3}=3\times3+1=\mathbf{10}$

$\boldsymbol{a_4}=3\times4+1=\mathbf{13}$

$\boldsymbol{a_5}=3\times5+1=\mathbf{16}$

(2) $a_n=n^2$

$\boldsymbol{a_1}=1^2=\mathbf{1}$

$\boldsymbol{a_2}=2^2=\mathbf{4}$

$\boldsymbol{a_3}=3^2=\mathbf{9}$

$\boldsymbol{a_4}=4^2=\mathbf{16}$

$\boldsymbol{a_5}=5^2=\mathbf{25}$

(3) $a_n=(-2)^n$

$\boldsymbol{a_1}=(-2)^1=\mathbf{-2}$

$\boldsymbol{a_2}=(-2)^2=\mathbf{4}$

$\boldsymbol{a_3}=(-2)^3=\mathbf{-8}$

$\boldsymbol{a_4}=(-2)^4=\mathbf{16}$

$\boldsymbol{a_5}=(-2)^5=\mathbf{-32}$

例2 正の 5 の倍数を小さい方から順に並べた数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までは

$a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 15$, $a_4 = 20$, $a_5 = 25$

であり，一般項は次のように表される。

$a_n = 5n$

問3 次の数列の初項から第 5 項までを書き，一般項を求めよ。

(1) 正の 3 の倍数を小さい方から順に並べた数列 $\{a_n\}$

$\boldsymbol{a_1 = 3}$, $\boldsymbol{a_2 = 6}$, $\boldsymbol{a_3 = 9}$, $\boldsymbol{a_4 = 12}$, $\boldsymbol{a_5 = 15}$

$\boldsymbol{a_n = 3n}$

(2) 正の奇数を小さい方から順に並べた数列 $\{b_n\}$

$\boldsymbol{b_1 = 1}$, $\boldsymbol{b_2 = 3}$, $\boldsymbol{b_3 = 5}$, $\boldsymbol{b_4 = 7}$, $\boldsymbol{b_5 = 9}$

$\boldsymbol{b_n = 2n - 1}$

項の個数が有限である数列を（⑦ 有限数列 ）といい，項の個数が有限でない数列を（⑧ 無限数列 ）という。有限数列では，項の個数を（⑨ 項数 ），最後の項を（⑩ 末項 ）という。

例3 正の 4 の倍数を小さい方から順に 10 個並べた数列

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40

は（ 有限数列 ）で，初項は（ 4 ），末項は（ 40 ），項数は（ 10 ）である。

❷ 等差数列

等差数列

（教科書 p.10）

初項 a から始めて，一定の数 d を次々に加えて得られる数列を（⑪ 等差数列 ）といい，d をその等差数列の（⑫ 公差 ）という。

例4 (1) 正の奇数を小さい方から順に並べた数列

1, 3, 5, 7, 9, …

は，初項（ 1 ），公差（ 2 ）の等差数列である。

(2) 初項 8，公差 −2 の等差数列は，次のようになる。

8, 6, 4, 2, 0, −2, …

問4 次の等差数列の初項と公差を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

(1) 3, 7, 11, 15, …

初項 3，公差 4，第 5 項 19

(2) 7, 1, −5, −11, …

初項 7，公差 −6，第 5 項 −17

問5 次の等差数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) 初項 5，公差 8

初項 **5**

第 2 項 $5 + 8 = \boldsymbol{13}$

第 3 項 $13 + 8 = \boldsymbol{21}$

第 4 項 $21 + 8 = \boldsymbol{29}$

第 5 項 $29 + 8 = \boldsymbol{37}$

(2) 初項 9，公差 −3

初項 **9**

第 2 項 $9 + (-3) = \boldsymbol{6}$

第 3 項 $6 + (-3) = \boldsymbol{3}$

第 4 項 $3 + (-3) = \boldsymbol{0}$

第 5 項 $0 + (-3) = \boldsymbol{-3}$

等差数列の一般項

（教科書 p.10）

等差数列の一般項
初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$$

例5 初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$$
$$= 3n - 1$$

また，この数列の第 20 項は

$$a_{20} = 3\cdot 20 - 1$$
$$= 59$$

問6 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 25 項を求めよ。

(1) 初項 3，公差 5

$$\boldsymbol{a_n} = 3 + (n-1)\cdot 5$$
$$= \boldsymbol{5n - 2}$$
$$\boldsymbol{a_{25}} = 5\cdot 25 - 2$$
$$= \boldsymbol{123}$$

(2) 初項 7，公差 −4

$$\boldsymbol{a_n} = 7 + (n-1)\cdot(-4)$$
$$= \boldsymbol{-4n + 11}$$
$$\boldsymbol{a_{25}} = -4\cdot 25 + 11$$
$$= \boldsymbol{-89}$$

例題 1 初項 4，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。また，55 はこの数列の第何項か。

解 初項 4，公差 3 の等差数列の一般項は

$$a_n = 4 + (n-1)\cdot 3$$
$$= 3n + 1$$

55 がこの数列の第 n 項であるとすると

$$3n + 1 = 55$$

よって　$n = 18$

すなわち，55 は第 18 項である。

問7 初項 6，公差 −5 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。また，−54 はこの数列の第何項か。

p.22 Training 1

初項 6，公差 −5 の等差数列の一般項は

$$\boldsymbol{a_n} = 6 + (n-1)\cdot(-5) = \boldsymbol{-5n + 11}$$

−54 がこの数列の第 n 項であるとすると

$$-5n + 11 = -54$$

よって　$n = 13$

すなわち，−54 は**第 13 項**である。

例題 2 第 4 項が 14，第 10 項が 62 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

考え方 初項，公差がわかれば，一般項 $a_n = a + (n-1)d$ を求めることができる。

解 初項を a，公差を d とおくと $a_n = a + (n-1)d$ より

$a_4 = 14$ であるから　$a + 3d = 14$　……①

$a_{10} = 62$ であるから　$a + 9d = 62$　……②

①，②を解くと

$$a = -10,\ d = 8$$

よって，一般項は

$$a_n = -10 + (n-1)\cdot 8 = 8n - 18$$

問8 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

p.22 Training 2

(1) 初項が 3，第 15 項が 87

初項を a，公差を d とおくと初項が 3 であるから

$a = 3$　……①

$a_n = a + (n-1)d$ より　$a_{15} = 87$

であるから

$a + 14d = 87$　……②

①，②を解くと

$$a = 3,\ d = 6$$

よって，一般項は

$$\boldsymbol{a_n} = 3 + (n-1)\cdot 6$$
$$= \boldsymbol{6n - 3}$$

(2) 第 3 項が 6，第 10 項が -29

初項を a，公差を d とおくと

$a_n = a + (n-1)d$ より $a_3 = 6$

であるから

$a + 2d = 6$ ……①

$a_{10} = -29$ であるから

$a + 9d = -29$ ……②

①，②を解くと

$a = 16$，$d = -5$

よって，一般項は

$$\boldsymbol{a_n} = 16 + (n-1)\cdot(-5)$$
$$= \boldsymbol{-5n + 21}$$

例題 3 初項 20，公差 -3 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて負となるか。

解 一般項は

$$a_n = 20 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 23$$

$a_n < 0$ となるとき，$-3n + 23 < 0$ であるから

$$n > \frac{23}{3} = 7.6\cdots$$

n は自然数であるから $n \geqq 8$

よって，この等差数列の第 8 項が初めて負となる。

問9 初項 50，公差 -4 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて負となるか。 p.22 Training 3

一般項は

$$a_n = 50 + (n-1)\cdot(-4) = -4n + 54$$

$a_n < 0$ となるとき，$-4n + 54 < 0$ であるから

$$n > \frac{54}{4} = 13.5$$

n は自然数であるから $n \geqq 14$

よって，この等差数列の第 **14** 項が初めて負となる。

3 等差数列の和

等差数列の和

（教科書 p.13）

等差数列の和
初項 a，公差 d，項数 n，末項 l の等差数列の和を S_n とすると $$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n(a+l) = \frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}}$$

例6 (1) 初項 3，末項 19，項数 9 の等差数列の和 S_9 は

$$S_9 = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot(3+19) = 99$$

(2) 初項 4，公差 3，項数 17 の等差数列の和 S_{17} は

$$S_{17} = \frac{1}{2}\cdot 17\cdot\{2\cdot 4 + (17-1)\cdot 3\} = 476$$

問 10 次の等差数列の和を求めよ。 p.22 Training 4

(1) 初項 7，末項 61，項数 10

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(7+61) = \boldsymbol{340}$$

(2) 初項 -10，公差 4，項数 13

$$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot\{2\cdot(-10) + (13-1)\cdot 4\} = \boldsymbol{182}$$

例7 5 から 31 までの奇数の和 $5 + 7 + 9 + \cdots + 31$ を求めてみよう。

これは，初項 5，公差 2 の等差数列の和である。

末項31 を第 n 項とすると $31 = 5 + 2(n-1)$

これより，$n = 14$ となり，項数は 14 である。

よって，求める奇数の和 S_{14} は $S_{14} = \frac{1}{2}\cdot 14\cdot(5+31) = 252$

問 11 等差数列の和 $(-5)+(-2)+1+\cdots+22$ を求めよ。

初項 -5，公差 3 の等差数列の和である。

末項 22 を第 n 項とすると

$$22=-5+3(n-1)$$

これより，$n=10$ となり，項数は 10 である。

よって，求める等差数列の和 S_{10} は

$$S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(-5+22)=\mathbf{85}$$

例題 4 初項 24，公差 -4 の等差数列において，初項から第何項までの和が -60 となるか。

解 初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 24+(n-1)\cdot(-4)\}=-2n^2+26n$$

$S_n=-60$ とすると　　$-2n^2+26n=-60$

$$n^2-13n-30=0$$

$$(n+2)(n-15)=0$$

よって　　$n=-2,\ 15$

n は自然数であるから　　$n=15$

ゆえに，第 15 項までの和が -60 となる。

問 12 初項 -21，公差 3 の等差数列において，初項から第何項までの和が 81 となるか。

p.22 Training 5

初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot(-21)+(n-1)\cdot 3\}$$

$$=\frac{3}{2}n^2-\frac{45}{2}n$$

$S_n=81$ とすると

$$\frac{3}{2}n^2-\frac{45}{2}n=81$$

すなわち　　$n^2-15n-54=0$

$$(n+3)(n-18)=0$$

ゆえに　　$n=-3,\ 18$

n は自然数であるから，**第 18 項までの和が 81 となる。**

1 から n までの自然数 1，2，3，…，n の和は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから，次の公式が得られる。

（⑬　$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$　）

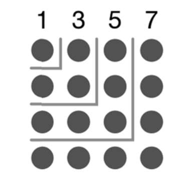
また，1 から始まる n 個の奇数の和

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

は，初項 1，末項 $2n-1$，項数 n の等差数列の和であるから，次のようになる。

$$\frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}=n^2$$

よって　　（⑭　$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$　）



$1=1^2$
$1+3=2^2$
$1+3+5=3^2$
$1+3+5+7=4^2$

問 13 次の数の和を求めよ。

(1)　1 から 100 までの自然数

$$\frac{1}{2}\cdot 100\cdot(100+1)=\mathbf{5050}$$

(2)　1 から 59 までの奇数

$$\mathbf{1+3+5+\cdots+59}$$
$$\mathbf{=1+3+5+\cdots+(2\cdot 30-1)}$$
$$\mathbf{=30^2}$$
$$\mathbf{=900}$$

例題 5 2 桁の自然数のうち，3 の倍数であるものの和を求めよ。

解 3 の倍数である 2 桁の自然数を小さい方から順に並べると，初項 12，公差 3の等差数列となり，末項は 99 である。

よって，項数を n とすると

$99=12+3(n-1)$ より　　$n=30$

ゆえに，これらの数の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 30\cdot(12+99)=1665$$

10	11	12
13	14	15
16	17	18
………		…
………		…
97	98	99

問 14 2 桁の自然数のうち，7 の倍数であるものの和を求めよ。 p.22 Training 6 p.46 Level Up 1-3

7 の倍数である 2 桁の自然数を小さい方から順に並べると，初項 14，公差 7 の等差数列となり，末項は 98 である。

よって，項数を n とすると

$98 = 14 + 7(n-1)$ より　$n = 13$

ゆえに，これらの数の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot(14+98) = \mathbf{728}$$

4 等比数列

等比数列

（教科書 p.16）

初項 a から始めて一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を（⑮ 等比数列 ）といい，r をその等比数列の（⑯ 公比 ）という。

例8 (1) 等比数列 1，2，4，8，16，… の初項は（ 1 ），公比は（ 2 ）である。

(2) 初項 2，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列は，次のようになる。

$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$

問 15 次の等比数列の初項と公比を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

(1) $6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \cdots$

初項 **6**，公比 $\frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

第 5 項　$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{8}}$

(2) $2,\ -6,\ 18,\ -54,\ \cdots$

初項 **2**，公比 $\frac{-6}{2} = \mathbf{-3}$

第 5 項　$(-54)\cdot(-3) = \mathbf{162}$

問 16 次の等比数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) 初項 2，公比 3

2，6，18，54，162

(2) 初項 9，公比 $\frac{1}{3}$

$\mathbf{9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9}}$

等比数列の一般項

（教科書 p.16）

等比数列の一般項
初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$

例9 (1)　初項 5，公比 4 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n = 5\cdot 4^{n-1}$

(2)　初項 -1，公比 -3 の等比数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$b_n = (-1)\cdot(-3)^{n-1} = -(-3)^{n-1}$

問 17 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　初項 1，公比 5

$a_n = 1\cdot 5^{n-1} = \boldsymbol{5^{n-1}}$

(2)　$3,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ -\frac{3}{8},\ \cdots$

初項は 3，公比は$\left(-\frac{3}{2}\right)\div 3 = -\frac{1}{2}$

であるから，一般項は

$$\boldsymbol{a_n = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

例題 6　第 2 項が 6，第 4 項が 24 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

考え方　初項，公比がわかれば，一般項 $a_n = ar^{n-1}$ を求めることができる。

解　初項を a，公比を r とおくと　$a_n = ar^{n-1}$ より

$a_2 = 6$ であるから　　$ar = 6$　　……①

$a_4 = 24$ であるから　　$ar^3 = 24$　　……②

②÷①より　　$r^2 = 4$ ← $\frac{ar^3}{ar} = \frac{24}{6}$

$r = \pm 2$

①より，$r = 2$ のとき　　$a = 3$

$r = -2$ のとき　　$a = -3$

したがって，一般項は

$a_n = 3\cdot 2^{n-1}$　または　$a_n = -3\cdot(-2)^{n-1}$

問 18 第 3 項が 36，第 5 項が 324 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　p.22 Training 7

初項を a，公比を r とおくと $a_n = ar^{n-1}$ より

$a_3 = 36$ であるから

$ar^2 = 36$　　……①

$a_5 = 324$ であるから

$ar^4 = 324$　　……②

②÷①より　　$r^2 = 9$

$r = \pm 3$

①より，$r = 3$ のとき　　$a = 4$

$r = -3$ のとき　　$a = 4$

したがって，一般項は

$\boldsymbol{a_n = 4\cdot 3^{n-1}}$　または　$\boldsymbol{a_n = 4\cdot(-3)^{n-1}}$

5 等比数列の和

等比数列の和

（教科書 p.18）

等比数列の和
初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は $r \neq 1$ のとき　$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ $r = 1$ のとき　$S_n = na$

例 10 (1) 初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 5 項までの和 S_5 は

$S_5 = \frac{3(2^5-1)}{2-1} = 93$　←$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) 初項 8，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 6 項までの和 S_6 は

$S_6 = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 16\left(1-\frac{1}{64}\right) = \frac{63}{4}$　←$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

(3) 等比数列 2, −6, 18, −54, 162, … の初項は 2，公比は −3 であるから，その初項から第 n 項までの和 S_n は

$S_n = \frac{2\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)} = \frac{1}{2}\{1-(-3)^n\}$　←$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

問 19 次の等比数列の和を求めよ。　p.22 Training 8(1)

(1) 初項 6，公比 3，項数 4

$\frac{6(3^4-1)}{3-1} = \mathbf{240}$

(2) 初項 3，公比 −2，項数 6

$\frac{3\{1-(-2)^6\}}{1-(-2)} = \mathbf{-63}$

問 20 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。　p.22 Training 8(2)

(1) 1, 3, 9, 27, …

初項 1，公比 3 の等比数列であるから

$$S_n = \frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1} = \frac{1}{2}(3^n-1)$$

(2) 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, …

初項 2，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$S_n = \frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

問 21 1 日目に 1 円，2 日目に 2 円，3 日目に 4 円というように，毎日，前日の 2 倍の金額を貯金していくと，10 日目には貯金の総額はいくらになるか。また， 20 日目にはどうか。

これは，初項 1，公比 2 の等比数列である。

10 日目の貯金の総額は，初項から第 10 項までの和を求めればよいから

$$\frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1} = \mathbf{1023}\ (円)$$

20 日目の貯金の総額は，初項から第 20 項までの和を求めればよいから

$$\frac{1\cdot(2^{20}-1)}{2-1} = \mathbf{1048575}\ (円)$$

例題 7 初項から第 3 項までの和が 21，初項から第 6 項までの和が 189 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解 初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ のとき，$S_3=21$ より　$3a=21$

$S_6=189$ より　$6a=189$

ゆえに，これらを同時に満たす a は存在しない。

よって，$r\neq1$ であるから

$S_3=21$ より　$\frac{a(1-r^3)}{1-r}=21$　……①

$S_6=189$ より　$\frac{a(1-r^6)}{1-r}=189$　……②

②より　$\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=189$

これに①を代入して　$21(1+r^3)=189$

$1+r^3=9$

$r^3=8$

r は実数であるから　$r=2$

これを①に代入して　$a=3$

ゆえに，この等比数列の初項は 3，公比は 2 である。

問 22 初項から第 3 項までの和が 35，初項から第 6 項までの和が 315 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

p.22 Training 9

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$のとき，$S_3=35$ より　$3a=35$

$S_6=315$ より　$6a=315$

ゆえに，これらを同時に満たす a は存在しない。

よって，$r\neq1$ であるから

$S_3=35$ より　$\frac{a(1-r^3)}{1-r}=35$　……①

$S_6=315$ より　$\frac{a(1-r^6)}{1-r}=315$　……②

②より　$\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=315$

これに①を代入して　$35(1+r^3)=315$

$1+r^3=9$

$r^3=8$

r は実数であるから　$r=2$

これを①に代入して $a=5$

ゆえに，この等比数列の初項は **5**，公比は **2**である。

参考 等差中項と等比中項

（教科書 p.21）

一般に，3 つの数 a, b, c がこの順で等差数列であるとき

$$b - a = c - b$$

よって　（⑰　$2b = a + c$　）　が成り立つ。
この b を（⑱　等差中項　）という。

問1 次の 3 つの数がこの順で等差数列であるとき，x の値を求めよ。

(1)　5, x, 13

$2x = 5 + 13$
$\boldsymbol{x = 9}$

(2)　$\frac{1}{6}$, x, $\frac{1}{2}$

$2x = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$
$2x = \frac{2}{3}$
$\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$

一般に，0 でない 3 つの数 a, b, c がこの順で等比数列であるとき

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

よって　（⑲　$b^2 = ac$　）が成り立つ。
この b を（⑳　等比中項　）という。

問2 次の 3 つの数がこの順で等比数列であるとき，x の値を求めよ。

(1)　3, x, 12

$x^2 = 3 \cdot 12$
$x^2 = 36$
$\boldsymbol{x = \pm 6}$

(2)　2, x, 3

$x^2 = 2 \cdot 3$
$x^2 = 6$
$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{6}}$

Training

（教科書 p.22）

1 初項 -41，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。
また，3 はこの数列の第何項か。

初項 -41，公差 4 の等差数列の一般項は

$$\boldsymbol{a_n} = -41 + (n-1) \cdot 4 = \boldsymbol{4n - 45}$$

3 がこの数列の第 n 項であるとすると

$$4n - 45 = 3$$
$$n = 12$$

すなわち，3 は第 **12** 項である。

2 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 初項が -2，第 5 項が 26

公差を d とおくと $a_n = -2 + (n-1)d$ より

$a_5 = 26$ であるから　　$-2 + 4d = 26$

$$d = 7$$

よって，一般項は

$$\boldsymbol{a_n} = -2 + (n-1) \cdot 7 = \boldsymbol{7n - 9}$$

(2) 第 3 項が 41，第 7 項が 29

初項を a，公差を d とおくと

$a_n = a + (n-1)d$ より

$a_3 = 41$ であるから

$$a + 2d = 41 \quad \cdots\cdots①$$

$a_7 = 29$ であるから

$$a + 6d = 29 \quad \cdots\cdots②$$

①，②を解くと

$$a = 47,\ d = -3$$

よって，一般項は

$$\boldsymbol{a_n} = 47 + (n-1) \cdot (-3) = \boldsymbol{-3n + 50}$$

3 初項 -55，公差 4 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて正となるか。

一般項は

$$a_n = -55 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 59$$

$a_n > 0$ となるとき，$4n - 59 > 0$ であるから

$$n > \frac{59}{4} = 14.7 \cdots$$

n は自然数であるから　　$n \geqq 15$

よって，この等差数列の第 **15** 項が初めて正となる。

4 次の等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 -1，末項 43，項数 12

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (-1 + 43) = \boldsymbol{252}$$

(2) 初項 8，公差 -3，項数 11

$$\frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \{2 \cdot 8 + (11-1) \cdot (-3)\} = \boldsymbol{-77}$$

5 初項 -40，公差 6 の等差数列において，初項から第何項までの和が初めて正となるか。

初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot (-40) + (n-1) \cdot 6\}$$
$$= 3n^2 - 43n$$

$S_n > 0$ となるとき

$$3n^2 - 43n > 0$$

これを解いて　　$n < 0,\ \frac{43}{3} < n$

n は自然数であるから

$n > \frac{43}{3} = 14.3 \cdots$ より　　$n \geqq 15$

ゆえに，初項から第 **15** 項までの和が初めて正となる。

6 3桁の自然数のうち，9の倍数であるものの和を求めよ。

9の倍数である3桁の自然数を小さい方から順に並べると，

初項108，公差9の等差数列となり，末項は999である。

よって，項数をnとすると

$999 = 108 + 9(n-1)$ より　　$n = 100$

ゆえに，これらの数の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 100\cdot(108+999) = \mathbf{55350}$$

7 第2項が6，第5項が48である等比数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

初項をa，公比をrとおくと$a_n = ar^{n-1}$ より

$a_2 = 6$ であるから　　$ar = 6$　　……①

$a_5 = 48$ であるから　　$ar^4 = 48$　　……②

② ÷ ①より　　$r^3 = 8$

rは実数であるから　　$r = 2$

①より　　$a = 3$

したがって，一般項は

$$\boldsymbol{a_n = 3\cdot 2^{n-1}}$$

8 次の等比数列の和を求めよ。

(1)　初項6，公比2，項数5の等比数列の和

$$\frac{6(2^5-1)}{2-1} = \mathbf{186}$$

(2)　等比数列$\frac{2}{3}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{2}{27}$，… の初項から第n項までの和

初項$\frac{2}{3}$，公比$\frac{1}{3}$の等比数列であるから

$$S_n = \frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \mathbf{1 - \frac{1}{3^n}}$$

9 初項から第3項までの和が7，初項から第6項までの和が -182 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

初項をa，公比をr，初項から第n項までの和をS_nとする。

$r = 1$ のとき，

　　$S_3 = 7$ より　　$3a = 7$

　　$S_6 = -182$ より　　$6a = -182$

ゆえに，これらを同時に満たすa存在しない。

よって，$r \neq 1$ であるから

$S_3 = 7$ より　　$\frac{a(1-r^3)}{1-r} = 7$　　……①

$S_6 = -182$ より　　$\frac{a(1-r^6)}{1-r} = -182$　　……②

②より

$$\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r} = -182$$

これに①を代入して　　$7(1+r^3) = -182$

$1 + r^3 = -26$

$r^3 = -27$

rは実数であるから　　$r = -3$

これを①に代入して　　$a = 1$

ゆえに，この等比数列の初項は**1**，公比は**−3**である。