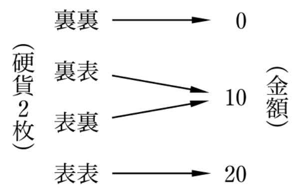
数学 B　Standard　P.112

1 節　確率分布

❶　確率変数と確率分布

数学 A では，ある試行における個々の事象の確率を求めてきたが，ここではこれらの事象の確率全体のようすについて考えてみよう。

確率変数と確率分布



10 円硬貨 2 枚を同時に投げるとき，表が出る硬貨の合計金額を X とすると，X は 0，10，20 のいずれかの値をとる変数で，どの値をとるかは，試行の結果によって定まる。

このように, 試行の結果によって値が定まる変数を**確率変数**という。

ここで，$X=k$ となる確率を $P(X=k)$ のように表すと，$X=0$ となることは，2 枚とも裏が出ることと同じであるから

$$P(X=0)=\frac{1}{4}$$

である。同様に　$P(X=10)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$P(X=20)=\frac{1}{4}$

となる。ここで，X のとる値とそれぞれの値をとる確率を表にすると，右のようになる。

X の値	0	10	20	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

上の表のように, 確率変数のとる値にその値をとる確率を対応させたものを，この確率変数の**確率分布**または単に**分布**といい，確率変数 X は，この分布に**従う**という。

一般に，確率変数 X のとる値が x_1，x_2，⋯，x_n であるとき，$P(X=x_i)$ を p_i とすれば次が成り立つ。

(1)　$p_1 \geqq 0$，$p_2 \geqq 0$，⋯，$p_n \geqq 0$

(2)　$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

また，X の確率分布は右の表のようになる。

X	x_1	x_2	⋯	x_n	計
P	p_1	p_2	⋯	p_n	1

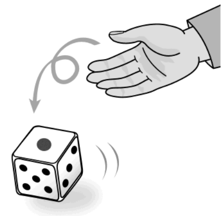
数学 B　Standard　P.113

例 1　1, 2, 5, 10 の数を書いた札が，それぞれ 1 枚，2 枚，3 枚，4 枚ある。この 10 枚の札から 1 枚引き，その札に書いてある数の 100 倍の金額をもらえるとする。この金額を X とすると，X は 100, 200, 500, 1000 の値をとる確率変数であり，X の確率分布は次の表のようになる。

X	100	200	500	1000	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

問 1　2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の差の絶対値を X とする。X の確率分布を求めよ。

例 2　1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とすると，X は確率変数である。このとき, X は 1 から 6 までの 6 通りの値をとり，その確率分布は下の表のようになる。5 の目が出る事象は $X=5$ と表せ，その確率は次のようになる。



$$P(X=5)=\frac{1}{6}$$

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

また, 確率変数 X の値が $a \leqq X \leqq b$ となる確率を $P(a \leqq X \leqq b)$ のように表すと, 例 2 で 3 以上 5 以下の目が出る事象は $3 \leqq X \leqq 5$ と表せ，この事象の確率は次のようになる。

$$P(3 \leqq X \leqq 5)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

問 2　例 2 で，X を用いて次の事象を表し，その確率を求めよ。

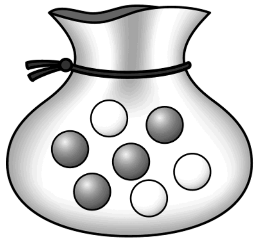
(1)　3 の目が出る事象　　　　(2)　2 以上 5 以下の目が出る事象

数学 B　Standard　P.114

例題 1　確率分布

赤球 4 個と白球 3 個が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出すとき，その中に含まれている赤球の個数 X の確率分布を求めよ。

解　X は，0，1，2 の値をとる確率変数である。



$X=0$ は 2 個とも白球である事象
$X=1$ は赤球，白球が 1 個ずつである事象
$X=2$ は 2 個とも赤球である事象

を表す。

したがって，それぞれの確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

となり，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

問 3　例題 1 で，取り出す球の中に含まれている白球の個数 Y の確率分布を求めよ。

問 4　1 から 9 までの数を 1 つずつ書いた札が 9 枚ある。ここから同時に 3 枚の札を引くとき，その中に含まれている奇数が書かれた札の枚数 X の確率分布を求めよ。

❷　確率変数の平均と分散

確率変数の平均

	賞金	本数
1 等	1000 円	1 本
2 等	500 円	2 本
3 等	100 円	7 本

　右の表のような賞金がもらえる 10 本のくじがある。このくじを 1 本引くとき，賞金の額は偶然によって決まるが，平均すると賞金はいくらになるか考えてみよう。

　このくじを 1 本引いて得られる賞金の平均は，賞金総額をくじの本数で割ったものであるから

$$\frac{1000\times1+500\times2+100\times7}{10}=270\quad(\text{円})$$

となる。これは

$$1000\times\frac{1}{10}+500\times\frac{2}{10}+100\times\frac{7}{10}=270\quad(\text{円})\qquad\cdots\cdots①$$

とも考えることができる。ここで，賞金の額を X とすると，X は確率変数であり，その確率分布は右の表のようになる。したがって，①の左辺は

X	1000	500	100	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

$$1000\times P(X=1000)+500\times P(X=500)+100\times P(X=100)$$

を計算したものになっている。これはこのくじを 1 本引いたときに期待できる金額である。

　一般に，確率変数 X が右の表の確率分布に従うとき

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

を確率変数 X の**平均**または**期待値**といい，$\boldsymbol{E(X)}$ で表す。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

確率変数の平均
$\boldsymbol{E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}$

注意　$E(X)$ の E は期待値を意味する Expectation の頭文字である。

例 3　1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とすると

$$P(X=1)=P(X=2)=\cdots=P(X=6)=\frac{1}{6}$$

であるから，X の平均は次のようになる。

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\cdots+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

問 5　1 個のさいころを投げて，偶数の目が出れば目の数の 2 倍の点数，奇数の目が出れば目の数と同じ点数をもらうゲームを行う。このとき，もらえる点数 X の平均を求めよ。

例題 2　確率変数の平均

2 本の当たりくじを含む 10 本のくじがある。この中から同時に 2 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数を X とする。X の確率分布と平均を求めよ。

解　X のとる値は，0，1，2 であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{28}{45},\ P(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{16}{45},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{45}$$

よって，X の確率分布は右の表のようになる。
したがって，X の平均は次のようになる。

$$E(X)=0\times\frac{28}{45}+1\times\frac{16}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{18}{45}=\frac{2}{5}$$

X	0	1	2	計
P	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$	1

問 6　例題 2 で，同時に 3 本のくじを引くときの当たりくじの本数を Y とする。Y の確率分布と平均を求めよ。

問 7　10 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げるとき，表の出る硬貨をもらえるという。このとき，もらえる金額 X の平均を求めよ。

確率変数 $aX+b$ の平均

2 枚の硬貨を同時に投げるとき，出る表の枚数 X の 10 倍に 5 を加えた得点 $10X+5$ の平均を考えてみよう。

X	0	1	2	計
$10X+5$	5	15	25	
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

このとき，$10X+5$ が値 $10k+5$ をとる事象の確率と X が値 k をとる事象の確率は同じであるから，
$P(10X+5=10k+5)=P(X=k)$ である。X の平均 $E(X)$ は

$$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$$

また，得点の平均 $E(10X+5)$ は次のように計算できる。

$$E(10X+5)=5\times\frac{1}{4}+15\times\frac{2}{4}+25\times\frac{1}{4}=15$$

ここで，$E(10X+5)$ を $E(X)$ を用いて表してみよう。

$$\begin{aligned}E(10X+5)&=(10\times0+5)\times\frac{1}{4}+(10\times1+5)\times\frac{2}{4}+(10\times2+5)\times\frac{1}{4}\\&=10\times\left(0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}\right)+5\times\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)\\&=10E(X)+5\end{aligned}$$

一般に，次の式が成り立つ。

確率変数 $aX+b$ の平均
$a,\ b$ を定数とするとき $$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b}$$

例 4　1 個のさいころを投げるとき，出る目の数 X の 100 倍から 300 を引いた点数 $100X-300$ の平均は，例 3 より $E(X)=\frac{7}{2}$ であるから

$$E(100X-300)=100E(X)-300=100\times\frac{7}{2}-300=50$$

問 8　例 4 の X について，次の確率変数の平均を求めよ。

(1)　$X+10$　　(2)　$-X$　　(3)　$10X-40$

確率変数 X に対して，X の平均を m とするとき，$X-m$ を X の平均からの**偏差**という。偏差 $X-m$ の平均 $E(X-m)$ について次の式が成り立つ。

$$E(X-m)=E(X)-m=m-m=0$$

確率変数の分散

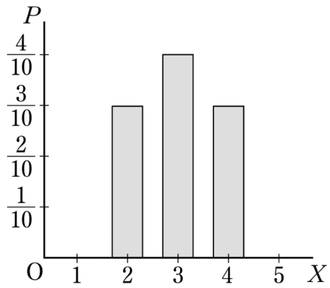
数	1	2	3	4	5	計
A	0	3	4	3	0	10
B	2	2	2	2	2	10

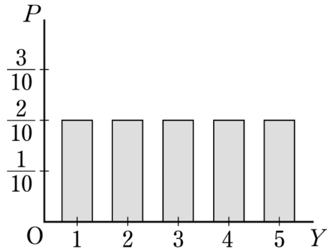
2 つの袋 A，B のそれぞれに，1 から 5 までの数を書いた札が合わせて 10 枚入っている。A，B それぞれの袋の札の構成は上の表のようになっている。

ここで，A，B から 1 枚ずつ札を引き，その札に書かれた数をそれぞれ X，Y で表すと，X，Y の確率分布は次の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	計
P	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	1

Y	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	1





このとき，$E(X)=3$，$E(Y)=3$ であるが，右の図から X の分布より Y の分布の方が散らばっていることがわかる。

このような，確率変数の平均からの散らばり具合いを表す数値について考えてみよう。

$E(X-m)=0$ であるから，偏差の平均ではこの散らばりを表すことはできない。そこで，偏差の 2 乗の平均で，この散らばりを表すことを考える。

確率変数 X のとる値を x_1，x_2，$\cdots$，x_n，確率 $P(X=x_i)$ を p_i，X 平均を m とするとき

$$\boldsymbol{(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n} \quad \cdots\cdots①$$

を確率変数 X の**分散**といい，$\boldsymbol{V(X)}$ で表す。分散は X の平均 m からの偏差の 2 乗 $(X-m)^2$ の平均であるから，次のように表される。

確率変数の分散
$\boldsymbol{V(X)=E((X-m)^2)}$

$\boxed{\text{注意}}$　$V(X)$ の V は分散を意味する Variance の頭文字である。

$\boxed{\text{例 5}}$　前ページの X の分散は，$m=3$ より次のようになる。

$$V(X)=(2-3)^2\times\frac{3}{10}+(3-3)^2\times\frac{4}{10}+(4-3)^2\times\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$$

$\boxed{\text{問 9}}$　前ページの Y の分散を計算して，例5の X の分散と比較せよ。

前ページの①の分散の式を変形してみよう。

$$\begin{aligned}V(X)&=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n\\&=({x_1}^2p_1+{x_2}^2p_2+\cdots+{x_n}^2p_n)-2m(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n)\\&\qquad+m^2(p_1+p_2+\cdots+p_n)\end{aligned}$$

ここで，${x_1}^2p_1+{x_2}^2p_2+\cdots+{x_n}^2p_n$ は確率変数 X^2 の平均 $E(X^2)$ であり

$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=E(X)=m,\ p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

であるから　　$V(X)=E(X^2)-2m\times m+m^2\times 1=E(X^2)-m^2$

したがって，次の式により分散が計算できる。

分散の計算
$\boldsymbol{V(X)=E(X^2)-m^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2}$

$\boxed{\text{例 6}}$　1個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とすると

$$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+\cdots+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

また，例3より $E(X)=m=\frac{7}{2}$ であるから，X の分散は

$$V(X)=E(X^2)-m^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$$

$\boxed{\text{問 10}}$　硬貨2枚を同時に投げるとき，表が出る枚数 X の分散を求めよ。

確率変数の標準偏差

分散 $V(X)$ の正の平方根 $\sqrt{V(X)}$ を X の**標準偏差**といい，$\boldsymbol{\sigma(X)}$ で表す。

すなわち　　$\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$

注意　標準偏差は standard deviation といい，$\sigma(X)$ の σ は，この頭文字 s に相当するギリシャ文字である。

例 7　1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とすると，前ページの例 6 より，$V(X)=\frac{35}{12}$ であるから，X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{35}{12}}=\frac{\sqrt{105}}{6}$$

例題 3　平均と分散・標準偏差

硬貨 3 枚を同時に投げるとき，表が出る枚数 X の標準偏差を求めよ。

解　X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

よって，X の平均と分散は次のようになる。

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=3$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

したがって，X の標準偏差は次のようになる。

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

問 11　10 本のくじの中に，当たりくじは 1 等 500 円が 1 本，2 等 200 円が 3 本入っている。これから 1 本のくじを引くときの賞金額 X の標準偏差を求めよ。

p.131 Training 1　p.154 Level Up 1

確率変数 $aX+b$ の分散と標準偏差

確率変数 X の平均を m とするとき，X の 1 次式で表される確率変数 $aX+b$ の平均は

$$E(aX+b)=aE(X)+b=am+b$$

である。確率変数 $aX+b$ の分散と標準偏差を考えてみよう。

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= E(\{(aX+b)-(am+b)\}^2) \quad \longleftarrow V(X)=E((X-m)^2) \\ &= E((aX-am)^2) \\ &= E(a^2(X-m)^2) \\ &= a^2E((X-m)^2) \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(aX+b) &= \sqrt{V(aX+b)}=\sqrt{a^2V(X)} \\ &= |\,a\,|\sqrt{V(X)}=|\,a\,|\sigma(X) \quad \longleftarrow \sqrt{a^2}=|a| \end{aligned}$$

したがって，確率変数 $aX+b$ の分散と標準偏差は次のようになる。

確率変数 $aX+b$ の分散と標準偏差
$\boldsymbol{V(aX+b)=a^2V(X)}$ $\boldsymbol{\sigma(aX+b)=|\,a\,|\sigma(X)}$

例 8　1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とする。このとき，$4X+5$ の分散と標準偏差を求めてみよう。

例 6，例 7 より，$V(X)=\frac{35}{12}$，$\sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}$ であるから

$$V(4X+5)=4^2V(X)=16\times\frac{35}{12}=\frac{140}{3}$$

$$\sigma(4X+5)=|\,4\,|\sigma(X)=4\times\frac{\sqrt{105}}{6}=\frac{2\sqrt{105}}{3}$$

問 12　例 8 の X について，次の確率変数の分散と標準偏差を求めよ。

(1)　$3X+1$　　(2)　$-X$　　(3)　$5-6X$

p.131 Training 2

❸　確率変数の和と積

確率変数 X, Y に対して，X が値 a をとり，かつ Y が値 b をとる確率を $P(X=a,\ Y=b)$ と書くことにする。

このように 2 つの確率変数 X, Y があるとき，それらの和 $X+Y$ の平均や分散，さらに積 XY の平均について考えてみよう。

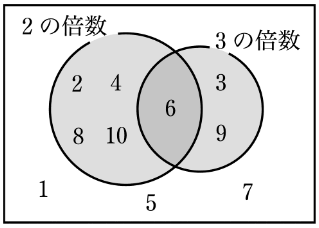
確率変数の和の平均

1 から 10 までの数を 1 つずつ書いた 10 枚の札から 1 枚の札を引くとき，その札に書かれている数が 2 の倍数なら 2 点，2 の倍数でなければ 0 点とする。この得点を X とする。また，3 の倍数なら 3 点，3 の倍数でなければ 0 点とする。この得点を Y とする。

それらの確率分布は次の表のようになる。

X	0	2	計
P	$\dfrac{5}{10}$	$\dfrac{5}{10}$	1

Y	0	3	計
P	$\dfrac{7}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	1



たとえば，$X=2,\ Y=0$ となる確率 $P(X=2,\ Y=0)$ は，札の数が 2 の倍数で，かつ 3 の倍数ではない事象の確率であるから

$$P(X=2,\ Y=0)=\frac{4}{10}$$

と求めることができる。同様に，X と Y のとる値のすべての組と対応する確率は右の表のようになる。

X ＼ Y	0	3	計
0	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{5}{10}$
2	$\dfrac{4}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{5}{10}$
計	$\dfrac{7}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	1

このとき，X と Y の和 $Z=X+Y$ を考えよう。

Z は確率変数で，そのとる値は 0，2，3，5 である。このうち，$Z=3$ となるのは，$X=0$, $Y=3$ の場合であるから

$$P(Z=3)=P(X=0,\ Y=3)=\frac{2}{10}$$

である。同様に計算すると右の表が得られる。

Z	0	2	3	5	計
P	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{4}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	1

以上より，Z の平均は

$$E(Z)=0\times\frac{3}{10}+2\times\frac{4}{10}+3\times\frac{2}{10}+5\times\frac{1}{10}=\frac{19}{10}$$

である。したがって

$$E(X+Y)=E(Z)=\frac{19}{10} \qquad \cdots\cdots①$$

一方，X と Y の平均は

$$E(X)=0\times\frac{5}{10}+2\times\frac{5}{10}=1 \qquad \cdots\cdots②$$

$$E(Y)=0\times\frac{7}{10}+3\times\frac{3}{10}=\frac{9}{10} \qquad \cdots\cdots③$$

であり，①，②，③より，次の等式が成り立つ。

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

一般に，2つの確率変数 X, Y に対して，次の式が成り立つ。

確率変数の和の平均
$\boldsymbol{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$

上の式は，3つ以上の確率変数の和に対しても成り立つ。

たとえば，3つの確率変数 X, Y, Z に対して，次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)}$$

例 9　2個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X, Y とする。このとき，和 $X+Y$ の平均は次のようになる。

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$$ ←― p.116 例3

問 13　2つの確率変数 X, Y のとる値と，X, Y の値の組に対する確率が右の表で与えられているとき，X, Y および $X+Y$ の平均をそれぞれ求めよ。

X ＼ Y	0	1	計
0	0.3	0.4	0.7
1	0.1	0.2	0.3
計	0.4	0.6	1

数学 B　Standard　P.124

独立な確率変数

2 つの確率変数 X, Y があって，X のとる任意の値 a と Y のとる任意の値 b に対して

$$\boldsymbol{P(X=a,\ Y=b)=P(X=a)\cdot P(Y=b)}$$

が成り立つとき，確率変数 X, Y は**独立**であるという。

例 10　2 つの確率変数 X, Y のとる値と, X, Y の値の組に対する確率が右の表で与えられているとき，$X=2$, $Y=1$ となる確率は

$$P(X=2,\ Y=1)=0.28$$

一方　$P(X=2)\cdot P(Y=1)=0.7\times 0.4=0.28$

となるから　$P(X=2,\ Y=1)=P(X=2)\cdot P(Y=1)$

が成り立つ。

同様の式が，X, Y の他の値のすべての組の確率に対しても成り立つから，2 つの確率変数 X, Y は独立である。

X ＼ Y	1	2	計
2	0.28	0.42	0.7
4	0.12	0.18	0.3
計	0.4	0.6	1

一般に，2 つの独立な試行 T_1, T_2 があるとき，T_1 に関する確率変数 X と T_2 に関する確率変数 Y は独立である。

たとえば，1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目に投げる試行と，2 回目に投げる試行とは独立であるから，1 回目に出る目の数を X, 2 回目に出る目の数を Y とすると，確率変数 X, Y は独立である。

3 つの確率変数 X, Y, Z についても同様に，X のとる任意の値 a と Y のとる任意の値 b と Z のとる任意の値 c に対して

$$P(X=a,\ Y=b,\ Z=c)=P(X=a)\cdot P(Y=b)\cdot P(Z=c)$$

が成り立つとき，確率変数 X, Y, Z は独立であるという。

3 つの独立な試行 T_1, T_2, T_3 があるとき，T_1, T_2, T_3 に関する確率変数を X, Y, Z とすると，確率変数 X, Y, Z は独立である。

独立な確率変数の積の平均

いま，X, Y が独立な確率変数で，確率分布が次のようであるとする。

X	x_1	x_2	計
P	p_1	p_2	1

Y	y_1	y_2	計
P	q_1	q_2	1

このとき，積 XY の確率分布と平均について考えてみよう。

たとえば，$P(X=x_1,\ Y=y_1)$ は，X, Y が独立であるから

$$P(X=x_1,\ Y=y_1)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_1)=p_1q_1$$

となる。同様の計算から，積 XY の確率分布は右の表のようになる。

XY	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2	計
P	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2	1

よって，積 XY の平均は次のようになる。

$$E(XY)=x_1y_1p_1q_1+x_1y_2p_1q_2+x_2y_1p_2q_1+x_2y_2p_2q_2$$
$$=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2)=E(X)\cdot E(Y)$$

したがって，次のことが成り立つ。

独立な確率変数の積の平均
X, Y が独立であるとき　　$\boldsymbol{E(XY)=E(X)\cdot E(Y)}$

また，3 つの独立な確率変数 X, Y, Z に対しても同様に，次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{E(XYZ)=E(X)\cdot E(Y)\cdot E(Z)}$$

$\boxed{\text{例 11}}$　2 個のさいころ A, B を同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X, Y とする。それぞれのさいころを投げる試行は独立であるから，X, Y は独立であり，2 つの目の数の積 XY の平均は

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{49}{4}$$　←── p.116 例 3

$\boxed{\text{問 14}}$　1 枚の硬貨を投げて，表が出れば 2 点，裏が出れば 1 点が得られるという。硬貨を 2 回投げるとき，2 回の得点の積の平均を求めよ。

独立な確率変数の和の分散

確率変数 X, Y が独立であるとき，和 $X+Y$ の分散を求めてみよう。

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - \{E(X+Y)\}^2 \\ &= E(X^2+2XY+Y^2) - \{E(X)+E(Y)\}^2 \\ &= E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2) \\ &\qquad -[\{E(X)\}^2+2E(X)\cdot E(Y)+\{E(Y)\}^2] \end{aligned}$$

ここで X, Y は独立であるから，$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$ となるので

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E(X^2)-\{E(X)\}^2+E(Y^2)-\{E(Y)\}^2 \\ &= V(X)+V(Y) \end{aligned}$$

よって，次の式が成り立つ。

独立な確率変数の和の分散
X, Y が独立であるとき　　$\boldsymbol{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$

また，3 つの独立な確率変数 X, Y, Z に対しても同様に，次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)}$$

例 12　2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X, Y とする。X, Y は独立であり，119 ページの例 6 より

$V(X)=V(Y)=\frac{35}{12}$ であるから，$X+Y$ の分散，標準偏差は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{35}{6}$$

$$\sigma(X+Y)=\sqrt{V(X+Y)}=\sqrt{\frac{35}{6}}=\frac{\sqrt{210}}{6}$$

問 15　1 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げる試行で，硬貨の表が出るとき 1，裏が出るとき 0 を対応させる確率変数を X，さいころの出る目の数を Y とする。このとき，確率変数 $X+Y$ の分散と標準偏差を求めよ。

p.131 Training 3　p.154 Level Up 2,3

❹　二項分布

二項分布 $B(n,\ p)$

　1 個のさいころを 4 回くり返し投げる反復試行において，1 の目が出る回数を X とする。このとき，$X=3$ となるのは，4 回のうち 3 回だけ 1 の目が出る場合であり，右の表のように

$${}_4\mathrm{C}_3 = 4 \quad (\text{通り})$$

である。それぞれの起こる確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{5}{6}$ であるから，

1 回目	2 回目	3 回目	4 回目
○	○	○	×
○	○	×	○
○	×	○	○
×	○	○	○

○　1 の目，　×　1 以外の目

$X=3$ となる確率は

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{5}{6}$$

　同様に考えると，確率 $P(X=r)$ は次のようになる。

$$P(X=r) = {}_4\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{4-r} \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

　一般に，ある試行で，事象 A が起こる確率を p とし，A が起こらない確率を $q=1-p$ とおく。これを n 回くり返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすれば，X は確率変数であり，そのとる値は 0 から n までの整数である。また，$X=r$ となる確率は

$$\boldsymbol{P(X=r) = {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}} \qquad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

である。したがって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	$\cdots$	r	$\cdots$	n	計
P	${}_n\mathrm{C}_0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n p^n$	1

　確率変数 X の確率分布が上の表のようになるとき，この確率分布を確率 p に対する次数 n の**二項分布**といい，$\boldsymbol{B(n,\ p)}$ で表す。

注意　B は二項分布を意味する Binomial distribution の頭文字である。

二項分布 $\boldsymbol{B(n,\ p)}$ の確率
$\boldsymbol{P(X=r)=\ {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}}$　　$\begin{pmatrix} r=0,\ 1,\ \cdots,\ n \\ q=1-p \end{pmatrix}$

例 13　1 枚の硬貨をくり返し 10 回投げるとき，表の出る回数を確率変数 X とすると，X は二項分布 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

問 16　次の確率変数は二項分布に従う。それぞれの二項分布 $B(n,\ p)$ における $n,\ p$ の値を求めよ。

(1)　2 個のさいころを同時に投げる試行を 8 回くり返すとき，2 個とも 6 の目が出る回数 X

(2)　3 個のさいころを同時に投げる試行を 10 回くり返すとき，3 個とも同じ目が出る回数 Y

例 14　1 個のさいころを 4 回くり返し投げるとき，3 の倍数の目が出る回数を確率変数 X とすると，$n=4,\ p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ より，X は二項分布 $B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$ に従う。したがって，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)=\ {}_4\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{4-r}\qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

であり，確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

問 17　確率変数 X が二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(X=1)$　　　　(2)　$P(X=3)$

問 18　1 枚の硬貨を 3 回くり返し投げるとき，表が出る回数を X とする。X の確率分布を求めよ。

数学 B　Standard　P.129

二項分布の平均と分散

1 個のさいころを 3 回くり返し投げるとき，1 の目が出る回数を X とすれば，X の確率分布は二項分布 $B\left(3,\ \frac{1}{6}\right)$ である。

k 回目に投げるとき，1 の目が出るときは 1 の値，1 の目が出ないときは0 の値をとる確率変数を X_k とすれば，1 の目が出る回数 X は

$X = X_1 + X_2 + X_3$

と表される。

X_k	0	1	計
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$(k = 1,\ 2,\ 3)$

X	X_1	X_2	X_3
0	0	0	0
1	1	0	0
	0	1	0
	0	0	1
2	1	1	0
	1	0	1
	0	1	1
3	1	1	1

ここで，X_1 の平均と分散を求めると

$E(X_1) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$　……①

$V(X_1) = E\left({X_1}^2\right) - \{E(X_1)\}^2$

$= \left(0^2 \times \frac{5}{6} + 1^2 \times \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)^2$

$= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$　……②

X_2，X_3 についても同様である。

さいころを投げる試行は, 独立な試行であるから, X_1，X_2，X_3 は独立である。したがって，X の平均と分散は次のようになる。

$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$　……③

$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)$　……④

①，③より　$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

②，④より　$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$

一般に，二項分布 $B(n,\ p)$ に対して，次ページのことが成り立つ。

二項分布の平均と分散
確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき $\boldsymbol{E(X)=np,\ V(X)=npq}$　　ただし，$q=1-p$

例 15　確率変数 X が二項分布 $B\left(10,\ \frac{1}{4}\right)$ に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めてみよう。

$$E(X)=10\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$

$$V(X)=10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$$

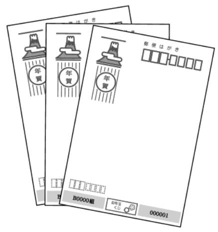
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{15}{8}}=\frac{\sqrt{30}}{4}$$

問 19　確率変数 X が次の二項分布に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

p.131 Training 4

(1)　$B\left(30,\ \frac{1}{6}\right)$　　(2)　$B\left(50,\ \frac{1}{2}\right)$　　(3)　$B(100,\ 0.36)$

例 16　お年玉つき年賀はがきの 3 等に当たる確率が 0.02 であるとする。100 枚の年賀はがきのうち 3 等に当たる枚数を X とすると，確率変数 X は二項分布 $B(100,\ 0.02)$ に従う。X の平均と標準偏差は



$$E(X)=100\times0.02=2$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{100\times0.02\times0.98}=\sqrt{1.96}=1.4$$

問 20　1 個のさいころを投げる試行を 60 回くり返すとき，6 の目が出る回数 X の平均と標準偏差を求めよ。

問 21　ある製品を製造する際，不良品が生じる確率は 0.04 であることがわかっている。この製品を 600 個製造するとき，その中に含まれる不良品の個数 X の平均と標準偏差を求めよ。

p.131 Training 5　p.154-155 Level Up 4-6

数学 B　Standard　P.131

Training

1　6 本のくじの中に，当たりくじは 1 等 1000 円が 1 本，2 等 500 円が 2 本入っている。このくじを同時に 2 本引くときのもらえる賞金額を X とする。このとき，次の問に答えよ。
p.120

(1)　X の確率分布を求めよ。
(2)　X の平均を求めよ。
(3)　X の分散と標準偏差を求めよ。

2　確率変数 X の分散が 3 のとき，次の確率変数の分散と標準偏差を求めよ。
(1)　$5X+2$
(2)　$4-2X$
p.121

3　独立な確率変数 X, Y の分布がそれぞれ下の表で与えられている。このとき，次の確率変数の平均と分散を求めよ。ただし，(3)は平均のみでよい。
p.126
(1)　$25-10X$　　(2)　$X+Y$　　(3)　XY

X	0	1	2	計
P	0.1	0.6	0.3	1

Y	0	1	2	計
P	0.2	0.6	0.2	1

4　確率変数 X が二項分布 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$ に従うとき，次の確率変数の平均と分散を求めよ。
p.130

(1)　$2X+30$
(2)　$-X$
(3)　$\frac{X-20}{4}$

5　袋の中に赤球 3 個と白球 2 個が入っている。この袋の中から球を 1 個取り出し，色を調べてもとに戻す。これを 50 回くり返すとき，赤球を取り出す回数 X の平均，分散，標準偏差を求めよ。
p.130