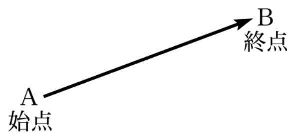
1 節　平面上のベクトル

❶　有向線分とベクトル

有向線分

身長や体重は，170cm や 60kg のように，大きさだけで定まる。これに対して，風の状態は，「風速 10m/s 」のような大きさと，「南西の風」のような向きによって定まる。また，大きさと向きによって定まるものとしてこれ以外にも平面上の点の移動がある。

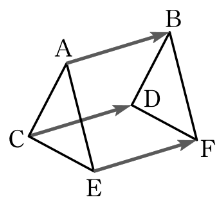
平面上で, 点 A から点 B までの移動は, 右の図のように, 線分 AB に向きを示す矢印をつけて表すことができる。すなわち，線分の長さが移動の大きさを，矢印の向きが移動の向きを表している。



このような向きのついた線分を**有向線分**という。また, 有向線分 AB において, A を**始点**, B を**終点**という。

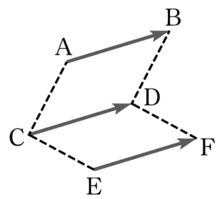
有向線分は，大きさと向きをもつ量を表すときに用いられる。

例 1　右の図のような△ ACE が△ BDF に移る平行移動は有向線分 AB で表される。この移動は有向線分 CD，EF などでも表すことができる。



ベクトル

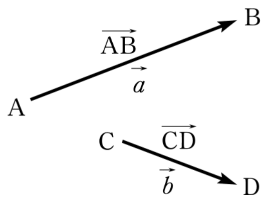
例 1 において，3 つの有向線分 AB，CD，EF の表す移動は，その大きさと向きが一致しているので，同じ移動であるとみなすことができる。



有向線分について，その位置を問題にせず，向きと長さだけに着目したものを**ベクトル**という。

有向線分 AB の表すベクトルを $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ と書く。また，有向線分 AB の長さをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**大きさ**または長さといい，$\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|$ で表す。

ベクトルは始点と終点を用いて, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のように表される。また，ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ のように 1 つの文字に矢印をつけて表すこともある。このとき，$\vec{a}$ の大きさを $|\vec{a}|$ で表す。

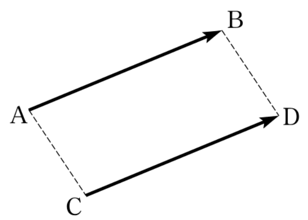


等しいベクトルと逆ベクトル

ベクトルは大きさと向きによって定まるから，大きさが等しく向きが同じである 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は**等しい**といい

$$\vec{a}=\vec{b}$$

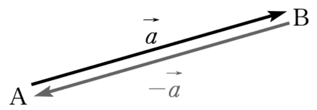
と書く。また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ということは有向線分 AB を平行移動して有向線分 CD に重ねることができるということである。



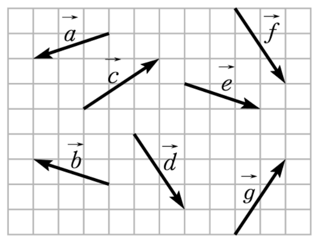
ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが反対のベクトルを $\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\vec{a}$ で表す。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のときは $-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である。



問 1　右の図で，等しいベクトルを答えよ。
また，互いに逆ベクトルであるものを答えよ。



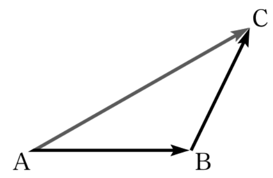
❷　ベクトルの加法・減法・実数倍

ベクトルの加法

2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ に対して，その和を

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

と定める。



問 2　上の図において，次の和を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$　　　(2)　$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

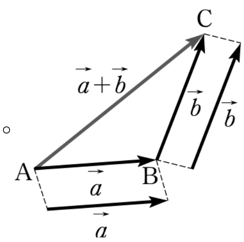
一般に，2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の和は次のようになる。

まず 1 つの点 A をとり，次に

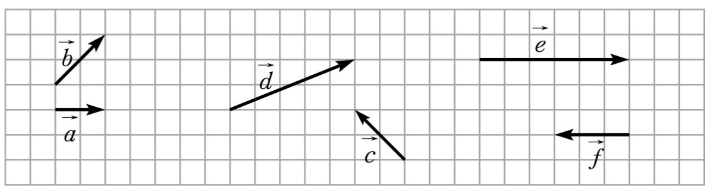
$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\quad \vec{b}=\overrightarrow{BC}$$

となるように点 B, C をとる。このとき，$\overrightarrow{AC}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和**を表している。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和を $\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}$ と書く。

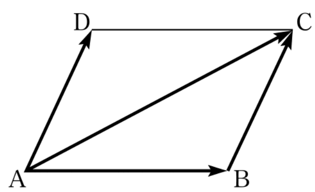


問 3　下の図で，$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{e}+\vec{f}$ を図示せよ。



例 2　右の図の平行四辺形 ABCD において

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$
$$=\overrightarrow{AC}$$



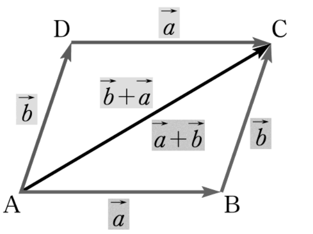
例 2 のように，平行四辺形を用いてベクトルの和を表すこともできる。

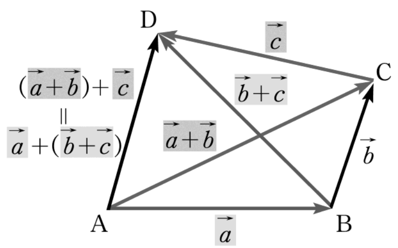
数学 B　Standard　P.055

ベクトルの加法については，次のことが成り立つ。

ベクトルの加法の性質		
(1)	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	**交換法則**
(2)	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	**結合法則**

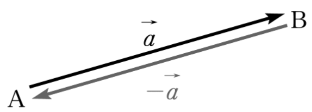
交換法則，結合法則は，次の図を利用して確かめることができる。





結合法則により，$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ と $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ は等しいから，かっこを省略して，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書くことができる。

$\boxed{\text{零ベクトル}}$



$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき，$-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ であるから

$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は始点と終点が一致したベクトルである。これを**零ベクトル**といい，$\vec{\mathbf{0}}$ で表す。

$\vec{0}$ の大きさは 0 である。$\vec{0}$ の向きは考えない。

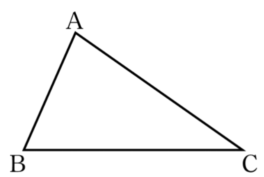
$\vec{0}$ には次のような性質がある。

$$\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\boldsymbol{a}},\qquad \vec{\boldsymbol{a}}+(-\vec{\boldsymbol{a}})=\vec{\mathbf{0}}$$

$\boxed{\text{問 4}}$　平面上に 3 点 A，B，C がある。このとき

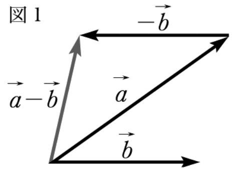
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$$

が成り立つことを示せ。



ベクトルの減法

図 1



ベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ に対して，その**差** $\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$ を

$$\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)}$$

と定める。$\vec{a},\ \vec{b}$ が与えられたとき，差 $\vec{a}-\vec{b}$ は図 1 のようにかくことができる。

また，図 2 からわかるように，$\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ は等式 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ を満たすベクトルである。

図 2

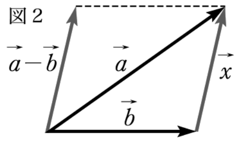


図 3

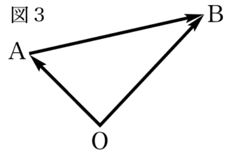


図 3 において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

が成り立つ。

問 5　問 3 で $\vec{a}-\vec{b},\ \vec{c}-\vec{d},\ \vec{e}-\vec{f}$ を図示せよ。

ベクトルの実数倍

ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，$\boldsymbol{k\vec{a}}$ すなわち $\boldsymbol{\vec{a}}$ **の** $\boldsymbol{k}$ **倍**を次のように定める。

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$k\vec{a}$ は

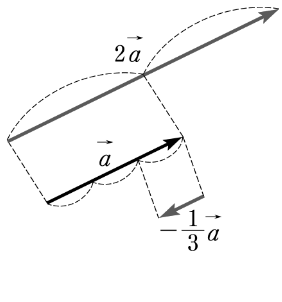
(1)　$k>0$ ならば，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが k 倍のベクトル
　　とくに，$1\vec{a}=\vec{a}$

(2)　$k<0$ ならば，$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが $|\,k\,|$ 倍のベクトル
　　とくに，$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

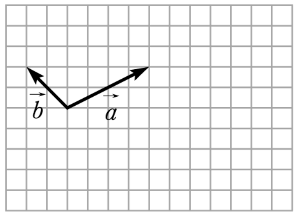
(3)　$k=0$ ならば，$\vec{0}$　すなわち　$0\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{a}=\vec{0}$ のとき，$k\vec{0}=\vec{0}$

例 3　ベクトル $\vec{a}$ に対して, $2\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで大きさが 2 倍のベクトルである。$-\frac{1}{3}\vec{a}$ は $\vec{a}$ と反対の向きで大きさが $\frac{1}{3}$ 倍のベクトルである。



$\boxed{\text{問 6}}$ 右の図のように $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。



(1)　$2\vec{a}$　　　　(2)　$-2\vec{b}$

(3)　$-\frac{1}{2}\vec{a}$　　　　(4)　$2\vec{a}-\vec{b}$

k, l を実数とするとき，次のことが成り立つ。

ベクトルの実数倍の性質

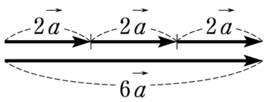
(1)　$\boldsymbol{k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}}$

(2)　$\boldsymbol{(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}}$

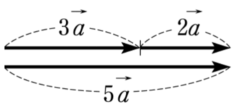
(3)　$\boldsymbol{k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}}$

これらの性質は，次の図を用いて確かめることができる。

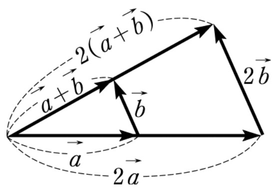
(1)　$3(2\vec{a})=6\vec{a}$



(2)　$3\vec{a}+2\vec{a}=5\vec{a}$



(3)　$2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$



ベクトルの加法，減法，実数倍の計算は，これまでの性質により整式の計算と同様に行うことができる。

$\boxed{\text{例 4}}$ $3(\vec{a}-2\vec{b})+2(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}-6\vec{b}+6\vec{a}+2\vec{b}$

$$=(3+6)\vec{a}+(-6+2)\vec{b}=9\vec{a}-4\vec{b}$$

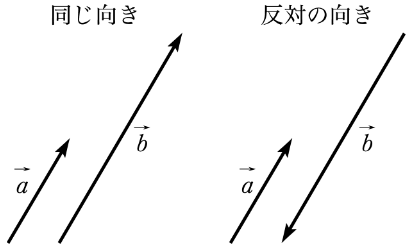
$\boxed{\text{問 7}}$ 次の計算をせよ。

(1)　$3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a}$　　　　(2)　$3(\vec{a}-2\vec{b})-4(\vec{a}-\vec{b})$

$\boxed{\text{問 8}}$ $6\vec{a}-\vec{x}=2\vec{x}+3\vec{b}$ であるとき，$\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

ベクトルの平行

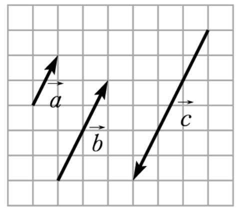
$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が同じ向き，または反対の向きであるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行**であるといい，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ と書く。



$\vec{a} \parallel \vec{b}$ となるのは，一方が他方の実数倍になるときである。すなわち，次のことが成り立つ。

ベクトルの平行条件
$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$ **となる実数** k **がある**

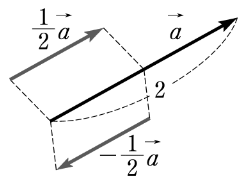
例 5　右の図において，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ であり，$\vec{b} = 2\vec{a}$ と表すことができる。



問 9　例 5 の図において，$\vec{c}$ を $\vec{a}$ で表せ。また，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を $\vec{c}$ で表せ。

例 6　$|\vec{a}| = 2$ のとき，$\vec{a}$ と平行で大きさが 1 のベクトルは

$$\frac{1}{2}\vec{a} \quad と \quad -\frac{1}{2}\vec{a}$$



大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**という。

一般に，$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{a}$ と反対の向きの単位ベクトルは $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ である。

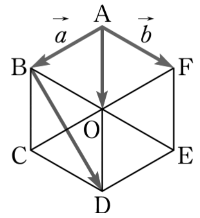
ベクトルの分解

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，他のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表すことを考えてみよう。

例題 1　ベクトルの分解

右の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とする。
次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$　　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$



解　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{a} + \vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{BE}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$= \vec{a} + 2\vec{b}$

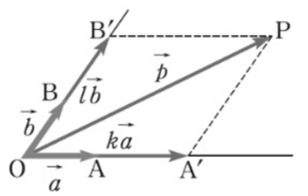
問 10　例題 1 において，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。　p.72 Training 1

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BF}}$　　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$

一般に，$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は，次のように $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いてただ 1 通りに表すことができる。

$$\vec{p} = k\vec{a} + l\vec{b} \quad (k,\ l \text{ は実数})$$

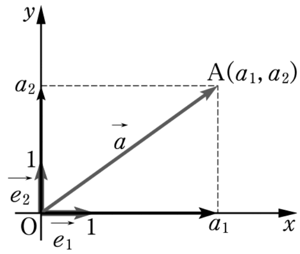
右の図のように 1 点 O をとって，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とする。点 P を通り，直線 OA, OB に平行な直線を引き，直線 OA, OB との交点をそれぞれ A′, B′ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表すことができ，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。



よって，$\vec{p} = k\vec{a} + l\vec{b}$ と表され，この表し方はただ 1 通りである。

❸　ベクトルの成分

座標とベクトル



座標平面上でベクトルを考えてみよう。

O を原点とする座標平面上で，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを**基本ベクトル**といい，それぞれ $\boldsymbol{\overrightarrow{e_1}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{e_2}}$ で表す。

与えられたベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A をとり，その座標を $(a_1,\ a_2)$ とすると，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}$$

と表される。この a_1，a_2 をそれぞれ $\vec{a}$ の **x 成分**，**y 成分**といい，$\vec{a}$ を

$$\boldsymbol{\vec{a}=(a_1,\ a_2)}$$

と書き表す。この表し方を $\vec{a}$ の**成分表示**という。

とくに，$\vec{0}$，および $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ の成分表示は次のようになる。

$$\vec{0}=(0,\ 0),\quad \overrightarrow{e_1}=(1,\ 0),\quad \overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$$

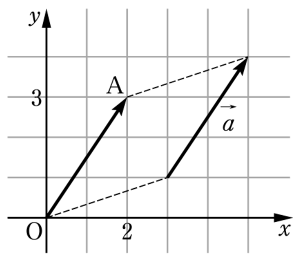
また，2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ に対して

$$\boldsymbol{\vec{a}=\vec{b}\iff a_1=b_1,\ a_2=b_2}$$

$\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は，線分 OA の長さであるから，成分表示されたベクトルの大きさは，次のようになる。

ベクトルの大きさ
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　　$\boldsymbol{|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}}$

例 7　右の図の $\vec{a}$ を成分表示し，その大きさを求めてみよう。

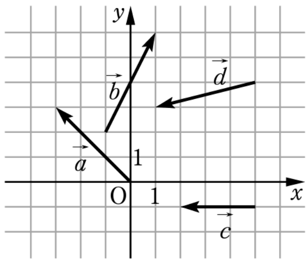


$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標は $(2,\ 3)$ であるから

$\vec{a}=(2,\ 3)$

また　　$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

問 11　右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を成分表示し, その大きさを求めよ。



成分による計算

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の成分が次のように与えられているとする。

$$\vec{a} = (3,\ 1),\quad \vec{b} = (1,\ 2)$$

このとき

$$\vec{a} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2},\quad \vec{b} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$$

であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和，差は

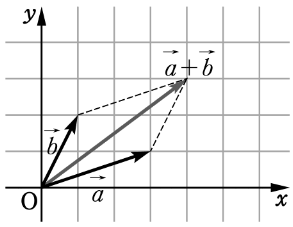
$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) + (\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}) \\ &= (3+1)\overrightarrow{e_1} + (1+2)\overrightarrow{e_2} \\ &= 4\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} \end{aligned}$$

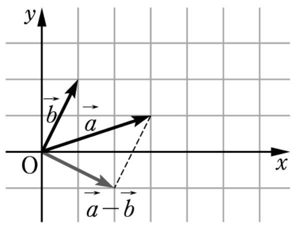
$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= (3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) - (\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}) \\ &= (3-1)\overrightarrow{e_1} + (1-2)\overrightarrow{e_2} \\ &= 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} \end{aligned}$$

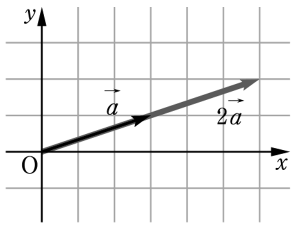
また，実数倍は，たとえば

$$2\vec{a} = 2(3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = 6\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$$

となる。







上の和，差，実数倍の計算を成分を用いて表すと，次のようになる。

和　　$(3,\ 1) + (1,\ 2) = (3+1,\ 1+2) = (4,\ 3)$

差　　$(3,\ 1) - (1,\ 2) = (3-1,\ 1-2) = (2,\ -1)$

実数倍　$2(3,\ 1) = (2 \times 3,\ 2 \times 1) = (6,\ 2)$

一般に，ベクトルの成分による計算について，次のことが成り立つ。

成分による計算

(1)　$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

(2)　$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

(3)　$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　　　k は実数

例 8　$\vec{a}=(2,\ 5)$, $\vec{b}=(-2,\ 3)$ のとき，$4\vec{a}+3\vec{b}$ を成分表示してみよう。

$$\begin{aligned}4\vec{a}+3\vec{b}&=4(2,\ 5)+3(-2,\ 3)\\&=(8,\ 20)+(-6,\ 9)\\&=(2,\ 29)\end{aligned}$$

問 12　$\vec{a}=(2,\ -3)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　　　(2)　$2\vec{a}-5\vec{b}$　　p.72 Training 2

(3)　$3(2\vec{a}-6\vec{b})-5(\vec{a}-4\vec{b})$

単位ベクトルと成分表示

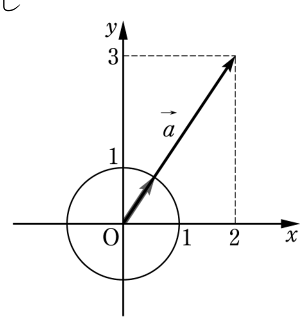
例 9　$\vec{a}=(2,\ 3)$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを成分表示してみよう。

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

であるから，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\vec{a}=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\ \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

である。

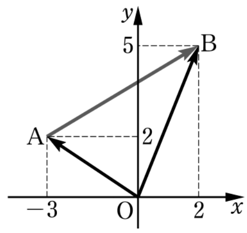


問 13　次のベクトルと同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。　p.72 Training 3

(1)　$\vec{a}=(4,\ -3)$　　　(2)　$\vec{b}=(-1,\ 2)$

座標と成分表示

例 10　A$(-3,\ 2)$, B$(2,\ 5)$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示し，その大きさを求めてみよう。



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2,\ 5) - (-3,\ 2)$$
$$= (2-(-3),\ 5-2) = (5,\ 3)$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$$

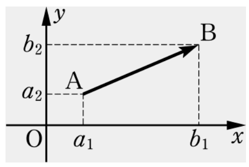
一般に，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示と大きさは次のようになる。

座標と成分表示

A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ のとき

(1)　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)}$

(2)　$\boldsymbol{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$

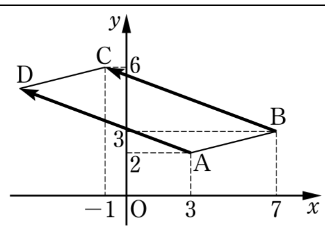


問 14　3 点 A$(-2,\ 6)$, B$(3,\ -1)$, C$(3,\ -4)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ の成分表示を求めよ。また，その大きさを求めよ。

例題 2　平行四辺形とベクトル

平面上に 3 点 A$(3,\ 2)$, B$(7,\ 3)$, C$(-1,\ 6)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ。

解　点 D の座標を $(x,\ y)$ とすると，



$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから

$(x-3,\ y-2) = (-1-7,\ 6-3)$

よって

$x-3=-8,\ y-2=3$

ゆえに　　$x=-5,\ y=5$　　したがって　　D$(-5,\ 5)$

問 15　平面上に 3 点 A$(-2,\ -2)$, B$(9,\ 2)$, D$(-9,\ 0)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 C の座標を求めよ。

p.72 Training 4

ベクトルの平行

58 ページで学んだように，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行となるのは，一方が他方の実数倍，すなわち $\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k があるときである。

したがって，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，

$$\boldsymbol{\vec{a}\parallel\vec{b}\quad\Longleftrightarrow\quad(b_1,\ b_2)=k(a_1,\ a_2)}$$ **となる実数 $\boldsymbol{k}$ がある**

が成り立つ。

例 11　$\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-3,\ 6)$ のとき，

$\vec{b}=-3\vec{a}$ となるから

$$\vec{a}\parallel\vec{b}$$

である。

例題 3　ベクトルの平行

$\vec{a}=(4,\ -6)$, $\vec{b}=(x,\ 9)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

解　$\vec{a}\parallel\vec{b}$ であるから，実数 k を用いると

$$\vec{b}=k\vec{a}$$

よって

$$(x,\ 9)=k(4,\ -6)=(4k,\ -6k)$$

ゆえに

$$\begin{cases}x=4k & \cdots\cdots①\\ 9=-6k & \cdots\cdots②\end{cases}$$

②より　　$k=-\frac{3}{2}$

これを①に代入すると

$$x=-6$$

問 16　$\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-3,\ y)$ が平行になるように，y の値を定めよ。

p.72 Training 5,6

例題 4　ベクトルの平行と大きさ

$\vec{a}=(4,\ 3)$ に平行で，大きさが 10 であるベクトルを求めよ。

解　求めるベクトルを $\vec{b}$ とする。

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ であるから，実数 k を用いると

$$\vec{b}=k\vec{a}=k(4,\ 3)=(4k,\ 3k) \qquad \cdots\cdots①$$

$|\vec{b}|=10$ より　$(4k)^2+(3k)^2=10^2$

$$k^2=4$$

よって　$k=\pm 2$

ゆえに，①より求めるベクトルは　$(8,\ 6),\ (-8,\ -6)$

問 17　$\vec{a}=\left(\sqrt{3},\ -1\right)$ に平行で，大きさが 6 であるベクトルを求めよ。

p.72 Training 7　p.106 Level Up 1

$k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表されるベクトル

成分表示されたベクトルについて，ベクトルの分解を考えてみよう。

例題 5　ベクトルの分解と成分

$\vec{a}=(2,\ 3),\ \vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(3,\ 8)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形に表せ。

解　$k\vec{a}+l\vec{b}=k(2,\ 3)+l(-1,\ 2)$

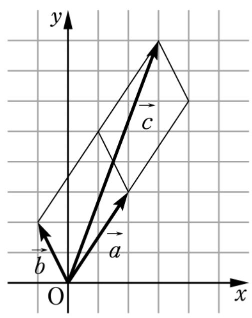
$$=(2k-l,\ 3k+2l)$$

これが $\vec{c}=(3,\ 8)$ に等しいから

$$\begin{cases} 2k-l=3 \\ 3k+2l=8 \end{cases}$$

これを解くと　$k=2,\ l=1$

ゆえに　$\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$



問 18　$\vec{a}=(3,\ 5),\ \vec{b}=(-2,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(16,\ 0)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形に表せ。

p.72 Training 8

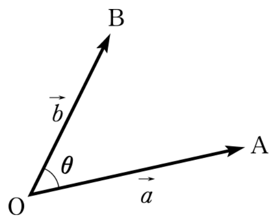
❹　ベクトルの内積

ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，点 O を始点として，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるように点 A, B をとる。このとき

$$\angle \mathrm{AOB}=\theta$$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**なす角**という。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。このとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい，$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}$ で表す。



ベクトルの内積
2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときには，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

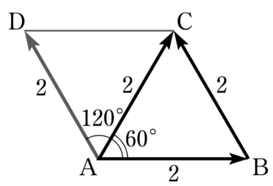
注意　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトルではなく実数である。

例 12　右の図のような平行四辺形 ABCD において，次の内積を求めてみよう。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\times2\times\cos60^\circ=2$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

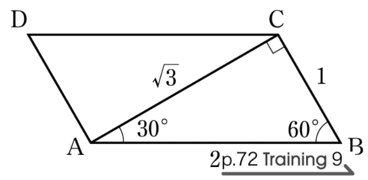
$\qquad=2\times2\times\cos120^\circ=-2$



問 19　右の図のような平行四辺形 ABCD において，次の内積を求めよ。

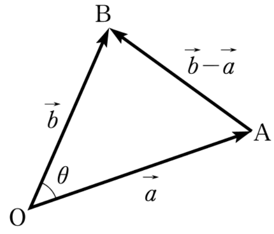
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$



内積と成分

　ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を成分で表してみよう。いま，右の図のように



$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とし，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると，余弦定理により

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\cos\theta$$

よって

$$2\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\cos\theta=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2 \qquad \cdots\cdots①$$

ここで

$$\mathrm{OA}^2=|\vec{a}|^2={a_1}^2+{a_2}^2,\qquad \mathrm{OB}^2=\left|\vec{b}\right|^2={b_1}^2+{b_2}^2$$

$$\mathrm{AB}^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$

であるから，①において

$$(左辺)=2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

$$(右辺)=({a_1}^2+{a_2}^2)+\left({b_1}^2+{b_2}^2\right)-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}$$

$$=2(a_1b_1+a_2b_2)$$

　したがって，次のことが成り立つ。

内積と成分
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$

例 13　$\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 4)$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めてみよう。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+3\times4=10$$

問 20　次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-2,\ 3)$, $\vec{b}=(5,\ 4)$

(2)　$\vec{a}=(3,\ 5)$, $\vec{b}=(-4,\ 1)$

(3)　$\vec{a}=(7,\ 3)$, $\vec{b}=(-3,\ 7)$

(4)　$\vec{a}=\left(3,\ \sqrt{3}\right)$, $\vec{b}=\left(-\sqrt{3},\ 1\right)$

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると，内積の定義 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}}\quad \text{ただし，} 0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$$

このことを用いて，2 つのベクトルのなす角を求めてみよう。

例題 6　ベクトルのなす角

次の 2 つのベクトルのなす角 θ を求めよ。

$\vec{a}=(2,\ 1)$,　$\vec{b}=(1,\ 3)$

解　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+1\times3=5$

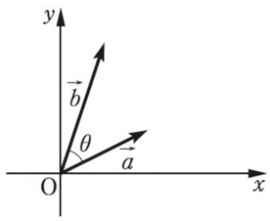
$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　$\theta=45^\circ$

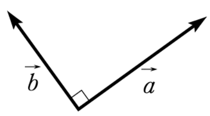


問 21　次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。　p.72 Training 10

(1)　$\vec{a}=(3,\ 0)$, $\vec{b}=(1,\ \sqrt{3})$　　(2)　$\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$, $\vec{b}=(\sqrt{3},\ 1)$

(3)　$\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(3, -6)$　　(4)　$\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-2,\ 4)$

ベクトルの垂直



$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角が 90° であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**垂直**であるといい，$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}}$ で表す。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\theta=90^\circ$ のとき，$\cos\theta=0$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$ である。したがって，次のことが成り立つ。

ベクトルの垂直条件
$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき　$\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b}} \iff \boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$

さらに，$\vec{a} = (a_1,\ a_2),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ のときには，次のように表される。

$$\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0}$$

例 14　$\vec{a} = (2,\ 3),\ \vec{b} = (-6,\ x)$ が垂直になるような x の値を求めてみよう。

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ より　$2 \times (-6) + 3 \times x = 0$

よって　$x = 4$

問 22　$\vec{a} = (x+2,\ -6),\ \vec{b} = (9,\ x)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

例題 7　ベクトルと垂直
$\vec{a} = (-3,\ 1)$ に垂直で，大きさが 10 であるベクトルを求めよ。
解　求めるベクトルを $\vec{b} = (x,\ y)$ とする。 $\vec{a} \perp \vec{b}$ であるから　$-3x + y = 0$　……① $\lvert \vec{b} \rvert = 10$ であるから　$x^2 + y^2 = 10^2$　……② ①より　$y = 3x$　……③ ②に代入すると　$x^2 + (3x)^2 = 10^2$ $x^2 = 10$ よって　$x = \pm\sqrt{10}$ ③に代入すると，$x = \sqrt{10}$ のとき　$y = 3\sqrt{10}$ $x = -\sqrt{10}$ のとき　$y = -3\sqrt{10}$ ゆえに，求めるベクトルは $\left(\sqrt{10},\ 3\sqrt{10}\right),\ \left(-\sqrt{10},\ -3\sqrt{10}\right)$

問 23　$\vec{a} = (3,\ 4)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

内積の性質

ベクトルの内積について，次のことが成り立つ。

内積の性質	
(1)	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
(2)	$\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2$
(3)	$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$　　k は実数
(4)	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
(5)	$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

上の性質(2)，(4)を確かめてみよう。

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{a}$ のなす角は $0°$ で，$\cos 0°=1$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0°=|\vec{a}|^2$$

(4)　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ とすると

$$\vec{b}+\vec{c}=(b_1,\ b_2)+(c_1,\ c_2)=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$$

であるから

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\&=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2\\&=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

(1)，(3)，(5)についても同様に確かめることができる。

なお，上の(3)より，$k(\vec{a}\cdot\vec{b})=k\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書くことができる。

例 15　$|\vec{a}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$\vec{a}\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$ の値を求めてみよう。

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{a}-3\vec{b})&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot(3\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=3^2-3\times(-2)=15\end{aligned}$$

問 24　$|\vec{a}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-3$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\vec{a}\cdot(2\vec{b}-3\vec{c})$　　　(2)　$2\vec{a}\cdot(\vec{a}+4\vec{c})$

例題 8　内積の性質の利用[1]

次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

証明 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$$=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

よって　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

問 25　次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

例題 9　内積の性質の利用[2]

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ のとき，$|\vec{a}+2\vec{b}|$ の値を求めよ。

考え方　内積の性質(2)から，$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$ を利用する。

解 $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$

$$=\vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})+2\vec{b}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot(2\vec{b})+2\vec{b}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot(2\vec{b})$$
$$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$
$$=2^2+4\times(-1)+4\times3^2=36$$

$|\vec{a}+2\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{36}=6$

問 26　$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|$　　　(2)　$|2\vec{a}-\vec{b}|$

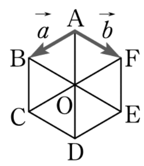
問 27　$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

p.72 Training 11　p.106 Level Up 2,3

数学 B　Standard　P.072

Training

1　右の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。 p.59



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{EA}}$

2　$\vec{a}=(-3,\ 1)$, $\vec{b}=(-4,\ -2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1)　$\vec{b}-\vec{a}$　　(2)　$-3\vec{a}+2\vec{b}$　　(3)　$2(\vec{b}-2\vec{a})+5\vec{a}-3\vec{b}$ p.62

3　次のベクトルと同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。 p.62

(1)　$\vec{a}=(-3,\ 2)$　　　　(2)　$\vec{b}=(1,\ -7)$

4　平面上に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{C}(-2,\ -2)$, $\mathrm{D}(3,\ -5)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 B の座標を求めよ。 p.63

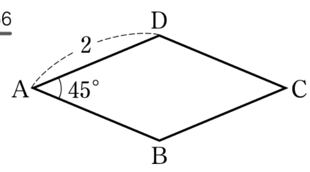
5　$\vec{a}=(x,\ -2)$, $\vec{b}=(-3,\ -4)$ が平行になるように，x の値を定めよ。 p.64

6　$\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ -4)$, $\vec{c}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるように，実数 t の値を定めよ。 p.64

7　$\vec{a}=(-2,\ \sqrt{5})$ に平行で，大きさが $\sqrt{3}$ であるベクトルを求めよ。 p.65

8　$\vec{a}=(2,\ -5)$, $\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(1,\ -8)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形に表せ。 p.65

9　右の図のようなひし形 ABCD において，次の内積を求めよ。 p.66



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

10　次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。 p.68

(1)　$\vec{a}=(-1,\ 4)$, $\vec{b}=(2,\ -8)$

(2)　$\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$, $\vec{b}=(-\sqrt{3},\ 1)$

(3)　$\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ -2)$

(4)　$\vec{a}=(1,\ \sqrt{2})$, $\vec{b}=(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$

11　$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3\sqrt{2}$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{13}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値および $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。 p.71