

1 節 数列

① 数列

2018年7月のカレンダーの日曜日にあたる日を書き並べると

1, 8, 15, 22, 29

となり, 1 から始めて 7 ずつ加えた数が並ぶ。

また, 1 から始めて次々に 2 を掛けて得られる数を順に並べると

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

となる。

このように, 数のある規則に従って順に並べたものを**数列**といい, それぞれの数を**項**という。

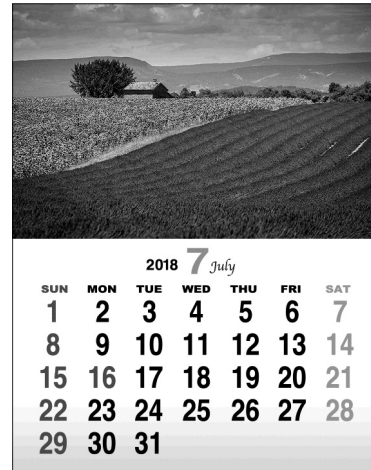
数列を一般的に表すには, 1 つの文字に項の番号を添えて

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

のように書く。そして, それぞれの項をこの数列の**初項**(第 1 項), 第 2 項, 第 3 項, … とい
い, n 番目の項 a_n を**第 n 項**という。

また, この数列を簡単に $\{a_n\}$ と表す。

この章では, 実数の数列について扱うものとする。



問 1 次の数列の初項から第 5 項までを求めよ。

- (1) 7 から始めて, 次々に 5 を加えて得られる数列
- (2) 2 から始めて, 次々に 3 を掛けて得られる数列

正の偶数を小さい方から順に並べた数列

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, …

の n 番目の項は $2n$ となる。

一般に, 数列 $\{a_n\}$ において, a_n を n の式で表したとき, この a_n を数列 $\{a_n\}$ の**一般項**という。

一般項を n の式で表すことができれば、数列の各項を容易に求めることができる。

例 1 数列 $\{a_n\}$ の一般項が、 $a_n = 3n - 1$ であるとき

初項は $a_1 = 3 \times 1 - 1 = 2$

第 2 項は $a_2 = 3 \times 2 - 1 = 5$

第 3 項は $a_3 = 3 \times 3 - 1 = 8$

第 4 項は $a_4 = 3 \times 4 - 1 = 11$

.....

となる。これは、初項 2 に、次々に 3 を加えて得られる数列である。

問 2 一般項が次のように表される数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) $a_n = 3n + 1$

(2) $a_n = n^2$

(3) $a_n = (-2)^n$

例 2 正の 5 の倍数を小さい方から順に並べた数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までは

$$a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 15, a_4 = 20, a_5 = 25$$

であり、一般項は次のように表される。

$$a_n = 5n$$

問 3 次の数列の初項から第 5 項までを書き、一般項を求めよ。

(1) 正の 3 の倍数を小さい方から順に並べた数列 $\{a_n\}$

(2) 正の奇数を小さい方から順に並べた数列 $\{b_n\}$

項の個数が有限である数列を**有限数列**といい、項の個数が有限でない数列を**無限数列**という。有限数列では、項の個数を**項数**、最後の項を**末項**という。

例 3 正の 4 の倍数を小さい方から順に 10 個並べた数列

$$4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40$$

は有限数列で、初項は 4、末項は 40、項数は 10 である。

② 等差数列

等差数列

3 で割って 1 余る正の整数を小さい方から順に並べた数列は

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$$

である。この数列は「1 から始まり、前の項に 3 を加える」という規則でできている。

このように、初項 a から始めて一定の数 d を次々に加えて得られる数列を**等差数列**とい
い、 d をその等差数列の**公差**という。

例 4 (1) 正の奇数を小さい方から順に並べた数列

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

は、初項 1、公差 2 の等差数列である。

(2) 初項 8、公差 -2 の等差数列は、次のようになる。

$$8, 6, 4, 2, 0, -2, \dots$$

問 4 次の等差数列の初項と公差を求めよ。また、第 5 項を求めよ。

(1) $3, 7, 11, 15, \dots$

(2) $7, 1, -5, -11, \dots$

問 5 次の等差数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) 初項 5、公差 8

(2) 初項 9、公差 -3

等差数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ が初項 a 、公差 d の等差数列であるとき

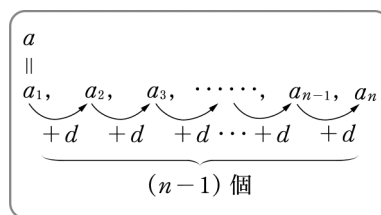
$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 + d = a + 1d = a + (2 - 1)d$$

$$a_3 = a_2 + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$a_4 = a_3 + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

.....



となり、第 n 項は次のように表される。

$$a_n = a + (n - 1)d$$

したがって、次の公式が成り立つ。

等差数列の一般項

初項 a 、公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n - 1)d$$

例 5 初項 2、公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n - 1) \cdot 3 \\ &= 3n - 1 \end{aligned}$$

また、この数列の第 20 項は

$$\begin{aligned} a_{20} &= 3 \cdot 20 - 1 \\ &= 59 \end{aligned}$$

問 6 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、第 25 項を求めよ。

(1) 初項 3、公差 5

(2) 初項 7、公差 -4

例題 1 等差数列の一般項[1]

初項 4、公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。また、55 はこの数列の第何項か。

解 初項 4、公差 3 の等差数列の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + (n - 1) \cdot 3 \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

55 がこの数列の第 n 項であるとする

$$3n + 1 = 55$$

よって $n = 18$

すなわち、55 は第 18 項である。

問 7 初項 6、公差 -5 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。

また、-54 はこの数列の第何項か。

例題 2 等差数列の一般項[2]

第 4 項が 14, 第 10 項が 62 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

考え方 初項, 公差がわかれば, 一般項 $a_n = a + (n - 1)d$ を求めることができる。

解 初項を a , 公差を d とおくと $a_n = a + (n - 1)d$ より

$$a_4 = 14 \text{ であるから} \quad a + 3d = 14 \quad \cdots\cdots\text{①}$$

$$a_{10} = 62 \text{ であるから} \quad a + 9d = 62 \quad \cdots\cdots\text{②}$$

①, ②を解くと

$$a = -10, d = 8$$

よって, 一般項は

$$a_n = -10 + (n - 1) \cdot 8 = 8n - 18$$

問 8 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

p.22 Training 2、

- (1) 初項が 3, 第 15 項が 87 (2) 第 3 項が 6, 第 10 項が -29

例題 3 等差数列の一般項[3]

初項 20, 公差 -3 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて負となるか。

解 一般項は

$$a_n = 20 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 23$$

$a_n < 0$ となるとき, $-3n + 23 < 0$ であるから

$$n > \frac{23}{3} = 7.6\cdots$$

n は自然数であるから $n \geq 8$

よって, この等差数列の第 8 項が初めて負となる。

問 9 初項 50, 公差 -4 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて負となるか。

p.22 Training 3、

③ 等差数列の和

等差数列の和

初項 2, 公差 3 の等差数列の, 初項から第 5 項までの和 S を求めることを考えてみよう。

$$S = 2 + 5 + 8 + 11 + 14$$

加える順序を逆にすると

$$S = 14 + 11 + 8 + 5 + 2$$

$$\begin{array}{r} S = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 \\ +) S = 14 + 11 + 8 + 5 + 2 \\ \hline 2S = 16 + 16 + 16 + 16 + 16 \end{array}$$

これらを加えると $2S = 16 + 16 + 16 + 16 + 16 = 5 \times 16$

よって $S = \frac{1}{2}(5 \times 16) = 40$

ここで, 初項 a , 末項 l , 項数 n の等差数列の公差を d , 初項から第 n 項までの和を S_n とする。上と同様に計算すると

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (l - d) + l \quad \dots\dots①$$

$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \dots + (a + d) + a \quad \dots\dots②$$

① + ②より $2S_n = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \dots + (a + l) + (a + l)$

ゆえに

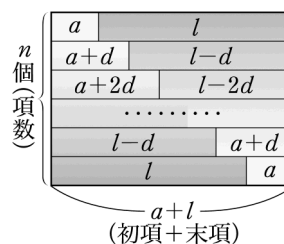
$$2S_n = n(a + l)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + l)$$

この式に $l = a + (n - 1)d$ を代入すると

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\}$$

したがって, 次の公式が成り立つ。



等差数列の和

初項 a , 公差 d , 項数 n , 末項 l の等差数列の和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + l) = \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\}$$

例 6 (1) 初項 3, 末項 19, 項数 9 の等差数列の和 S_9 は

$$S_9 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (3 + 19) = 99$$

(2) 初項 4, 公差 3, 項数 17 の等差数列の和 S_{17} は

$$S_{17} = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot \{2 \cdot 4 + (17 - 1) \cdot 3\} = 476$$

問 10 次の等差数列の和を求めよ。

p.22 Training 4

(1) 初項 7, 末項 61, 項数 10 (2) 初項 -10, 公差 4, 項数 13

例 7 5 から 31 までの奇数の和 $5 + 7 + 9 + \dots + 31$ を求めてみよう。

これは, 初項 5, 公差 2 の等差数列の和である。

末項 31 を第 n 項とすると $31 = 5 + 2(n - 1)$

これより, $n = 14$ となり, 項数は 14 である。

よって, 求める奇数の和 S_{14} は

$$S_{14} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot (5 + 31) = 252$$

問 11 等差数列の和 $(-5) + (-2) + 1 + \dots + 22$ を求めよ。

例題 4 等差数列の和

初項 24, 公差 -4 の等差数列において, 初項から第何項までの和が -60 となるか。

解 初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 24 + (n - 1) \cdot (-4)\} = -2n^2 + 26n$$

$$S_n = -60 \text{ とすると } -2n^2 + 26n = -60$$

$$n^2 - 13n - 30 = 0$$

$$(n + 2)(n - 15) = 0$$

よって $n = -2, 15$

n は自然数であるから $n = 15$

ゆえに, 第 15 項までの和が -60 となる。

問 12 初項 -21 、公差 3 の等差数列において、初項から第何項までの和が 81 となるか。

p.22 Training 5

1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ の和は、初項 1 、末項 n 、項数 n の等差数列の和であるから、次の公式が得られる。

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

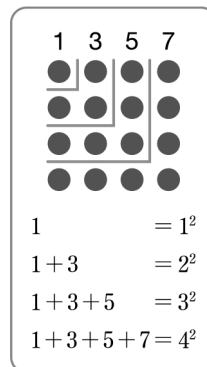
また、 1 から始まる n 個の奇数の和

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

は、初項 1 、末項 $2n - 1$ 、項数 n の等差数列の和であるから、次のようになる。

$$\frac{1}{2}n\{1 + (2n - 1)\} = n^2$$

よって $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$



問 13 次の数の和を求めよ。

- (1) 1 から 100 までの自然数 (2) 1 から 59 までの奇数

例題 5 倍数の和

2 桁の自然数のうち、 3 の倍数であるものの和を求めよ。

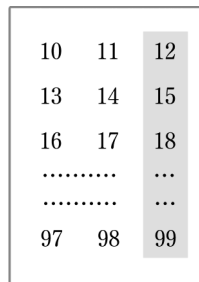
解 3 の倍数である 2 桁の自然数を小さい方から順に並べると、初項 12 、公差 3 の等差数列となり、末項は 99 である。

よって、項数を n とすると

$$99 = 12 + 3(n - 1) \text{ より } n = 30$$

ゆえに、これらの数の和は

$$\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (12 + 99) = 1665$$



問 14 2 桁の自然数のうち、 7 の倍数であるものの和を求めよ。

p.22 Training 6 p.46 LevelUp 1-3

④ 等比数列

等比数列

日常生活で、私たちが数を表すのに用いている位取りの単位

一, 十, 百, 千, 万, 十万, 百万, …

は, 1つ前の項を 10 倍するという規則でつくられている。

このように, 初項 a から始めて一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を**等比数列**といい, r をその等比数列の**公比**という。

例 8 (1) 等比数列 1, 2, 4, 8, 16, … の初項は 1, 公比は 2 である。

(2) 初項 2, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列は, 次のようになる。

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

問 15 次の等比数列の初項と公比を求めよ。また, 第 5 項を求めよ。

(1) $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots$

(2) $2, -6, 18, -54, \dots$

問 16 次の等比数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) 初項 2, 公比 3

(2) 初項 9, 公比 $\frac{1}{3}$

等比数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ が初項 a , 公比 r の等比数列であるとき

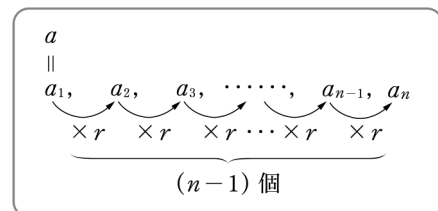
$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 \times r = ar^1 = ar^{2-1}$$

$$a_3 = a_2 \times r = ar^2 = ar^{3-1}$$

$$a_4 = a_3 \times r = ar^3 = ar^{4-1}$$

.....



となっているから, 第 n 項は次のように表される。

$$a_n = ar^{n-1}$$

ただし, $r \neq 0$ のとき, $r^0 = 1$ と定める。

したがって、次の公式が成り立つ。

等比数列の一般項

初項 a 、公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

例 9 (1) 初項 5、公比 4 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 5 \cdot 4^{n-1}$$

(2) 初項 -1、公比 -3 の等比数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = (-1) \cdot (-3)^{n-1} = -(-3)^{n-1}$$

問 17 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 初項 1、公比 5

(2) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \dots$

例題 6 等比数列の一般項

第 2 項が 6、第 4 項が 24 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

考え方 初項、公比がわかれば、一般項 $a_n = ar^{n-1}$ を求めることができる。

解 初項を a 、公比を r とおくと $a_n = ar^{n-1}$ より

$$a_2 = 6 \text{ であるから} \quad ar = 6 \quad \dots\dots\text{①}$$

$$a_4 = 24 \text{ であるから} \quad ar^3 = 24 \quad \dots\dots\text{②}$$

$$\text{②} \div \text{①} \text{ より} \quad r^2 = 4 \quad \text{---} \quad \frac{ar^3}{ar} = \frac{24}{6}$$

$$r = \pm 2$$

$$\text{①より、} r = 2 \text{ のとき} \quad a = 3$$

$$r = -2 \text{ のとき} \quad a = -3$$

したがって、一般項は

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \quad \text{または} \quad a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$$

問 18 第 3 項が 36、第 5 項が 324 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

⑤ 等比数列の和

等比数列の和

初項 1, 公比 3 の等比数列の, 初項から第 5 項までの和 S を求めることを考えてみよう。

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$$

この両辺に 3 を掛けて $3S$ をつくり, $S - 3S$ を計算してみる。

$$\begin{array}{r} S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 \\ -) 3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 \\ \hline (1-3)S = 1 \qquad \qquad \qquad -3^5 \end{array}$$

この計算から $S = \frac{1-3^5}{-2} = 121$

とわかる。

一般の等比数列の初項から第 n 項までの和も同様の方法で求められる。

初項を a , 公比を r とし, 求める和を S_n とすると

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \qquad \dots\dots①$$

①の両辺に r を掛けると

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \qquad \dots\dots②$$

① - ②より

$$(1-r)S_n = a - ar^n \qquad \dots\dots③$$

$r \neq 1$ のとき, ③の両辺を $1-r$ で割ると

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$r = 1$ のとき, ①より

$$S_n = \underbrace{a + a + a + \dots + a + a}_{n \text{ 個}} = na$$

したがって、次の公式が成り立つ。

等比数列の和	
初項 a 、公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は	
$r \neq 1$ のとき	$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$
$r = 1$ のとき	$S_n = na$

例 10 (1) 初項 3、公比 2 の等比数列の初項から第 5 項までの和 S_5 は

$$S_5 = \frac{3(2^5-1)}{2-1} = 93 \quad \text{---} \quad S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(2) 初項 8、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 6 項までの和 S_6 は

$$S_6 = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 16\left(1-\frac{1}{64}\right) = \frac{63}{4} \quad \text{---} \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

(3) 等比数列 2, -6, 18, -54, 162, ... の初項は 2、公比は -3 であるから、その初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{2\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)} = \frac{1}{2}\{1-(-3)^n\} \quad \text{---} \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

問 19 次の等比数列の和を求めよ。

p.22 Training 8(1)

- (1) 初項 6、公比 3、項数 4 (2) 初項 3、公比 -2、項数 6

問 20 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

- (1) 1, 3, 9, 27, ... (2) 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...

p.22 Training 8(2)

問 21 1 日目に 1 円、2 日目に 2 円、3 日目に 4 円というように、毎日、前日の 2 倍の金額を貯金していくと、10 日目には貯金の総額はいくらになるか。また、20 日目にはどうか。

等比数列の和が与えられているとき，初項と公比を求めてみよう。

例題 7 等比数列の和と公比

初項から第 3 項までの和が 21，初項から第 6 項までの和が 189 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解 初項を a ，公比を r ，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$$r = 1 \text{ のとき, } S_3 = 21 \text{ より } 3a = 21$$

$$S_6 = 189 \text{ より } 6a = 189$$

ゆえに，これらを同時に満たす a は存在しない。

よって， $r \neq 1$ であるから

$$S_3 = 21 \text{ より } \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 21 \quad \dots\dots\text{①}$$

$$S_6 = 189 \text{ より } \frac{a(1-r^6)}{1-r} = 189 \quad \dots\dots\text{②}$$

$$\text{②より } \frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r} = 189$$

$$\text{これに①を代入して } 21(1+r^3) = 189$$

$$1+r^3 = 9$$

$$r^3 = 8$$

$$r \text{ は実数であるから } r = 2$$

$$\text{これを①に代入して } a = 3$$

ゆえに，この等比数列の初項は 3，公比は 2 である。

問 22 初項から第 3 項までの和が 35，初項から第 6 項までの和が 315 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

参考 等差中項と等比中項

3つの数 $2, x, 18$ がこの順で等差数列であるとき、 x の値を求めてみよう。等差数列では、隣り合う2項の差が等しいから

$$x - 2 = 18 - x$$

$$2x = 20$$

よって

$$x = 10$$

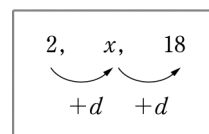
一般に、3つの数 a, b, c がこの順で等差数列であるとき

$$b - a = c - b$$

よって

$$2b = a + c$$

が成り立つ。この b を**等差中項**という。



問1 次の3つの数がこの順で等差数列であるとき、 x の値を求めよ。

(1) $5, x, 13$

(2) $\frac{1}{6}, x, \frac{1}{2}$

次に、3つの数 $2, x, 18$ がこの順で等比数列であるとき、 x の値を求めてみよう。等比数列では、隣り合う2項の比が等しいから

$$\frac{x}{2} = \frac{18}{x}$$

$$x^2 = 36$$

よって

$$x = \pm 6$$

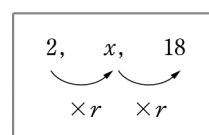
一般に、0でない3つの数 a, b, c がこの順で等比数列であるとき

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

よって

$$b^2 = ac$$

が成り立つ。この b を**等比中項**という。



問2 次の3つの数がこの順で等比数列であるとき、 x の値を求めよ。

(1) $3, x, 12$

(2) $2, x, 3$

Training

- 1 初項 -41 ，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。
また， 3 はこの数列の第何項か。 p.11

- 2 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 p.12
 - (1) 初項が -2 ，第 5 項が 26
 - (2) 第 3 項が 41 ，第 7 項が 29

- 3 初項 -55 ，公差 4 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて正となるか。 p.12

- 4 次の等差数列の和を求めよ。 p.14
 - (1) 初項 -1 ，末項 43 ，項数 12
 - (2) 初項 8 ，公差 -3 ，項数 11

- 5 初項 -40 ，公差 6 の等差数列において，初項から第何項までの和が初めて正となるか。 p.15

- 6 3 桁の自然数のうち， 9 の倍数であるものの和を求めよ。 p.15

- 7 第 2 項が 6 ，第 5 項が 48 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 p.17

- 8 次の等比数列の和を求めよ。 p.19
 - (1) 初項 6 ，公比 2 ，項数 5 の等比数列の和
 - (2) 等比数列 $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$ の初項から第 n 項までの和

- 9 初項から第 3 項までの和が 7 ，初項から第 6 項までの和が -182 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。 p.20