1節　数列

1 数列

2018年7月のカレンダーの日曜日にあたる日を書き並べると

$$1,\ 8,\ 15,\ 22,\ 29$$

となり，1から始めて7ずつ加えた数が並ぶ。

また，1から始めて次々に2を掛けて得られる数を順に並べると

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots$$

となる。

このように，数をある規則に従って順に並べたものを **数列** といい，それぞれの数を **項** という。

数列を一般的に表すには，1つの文字に項の番号を添えて

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

のように書く。そして，それぞれの項をこの数列の **初項**（第1項），第2項，第3項，$\cdots$ といい，n 番目の項 a_n を **第 n 項** という。

また，この数列を簡単に $\{a_n\}$ と表す。

この章では，実数の数列について扱うものとする。

問1　次の数列の初項から第5項までを求めよ。

(1)　7から始めて，次々に5を加えて得られる数列

(2)　2から始めて，次々に3を掛けて得られる数列

正の偶数を小さい方から順に並べた数列

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ \cdots$$

の n 番目の項は $2n$ となる。

一般に，数列 $\{a_n\}$ において，a_n を n の式で表したとき，この a_n を数列 $\{a_n\}$ の **一般項** という。

一般項を n の式で表すことができれば，数列の各項を容易に求めることができる。

例 1　数列 $\{a_n\}$ の一般項が，$a_n = 3n - 1$ であるとき

初項は　$a_1 = 3 \times 1 - 1 = 2$

第 2 項は　$a_2 = 3 \times 2 - 1 = 5$

第 3 項は　$a_3 = 3 \times 3 - 1 = 8$

第 4 項は　$a_4 = 3 \times 4 - 1 = 11$

$\cdots\cdots\cdots$

となる。これは，初項 2 に，次々に 3 を加えて得られる数列である。

問 2　一般項が次のように表される数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) $a_n = 3n + 1$　(2) $a_n = n^2$　(3) $a_n = (-2)^n$

例 2　正の 5 の倍数を小さい方から順に並べた数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までは

$$a_1 = 5,\ a_2 = 10,\ a_3 = 15,\ a_4 = 20,\ a_5 = 25$$

であり，一般項は次のように表される。

$$a_n = 5n$$

問 3　次の数列の初項から第 5 項までを書き，一般項を求めよ。

(1) 正の 3 の倍数を小さい方から順に並べた数列 $\{a_n\}$

(2) 正の奇数を小さい方から順に並べた数列 $\{b_n\}$

項の個数が有限である数列を **有限数列** といい，項の個数が有限でない数列を **無限数列** という。有限数列では，項の個数を **項数**，最後の項を **末項** という。

例 3　正の 4 の倍数を小さい方から順に 10 個並べた数列

$$4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32,\ 36,\ 40$$

は有限数列で，初項は 4，末項は 40，項数は 10 である。

② 等差数列

等差数列

3 で割って 1 余る正の整数を小さい方から順に並べた数列は

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ \cdots$$

である。この数列は「1 から始まり，前の項に 3 を加える」という規則でできている。

このように，初項 a から始めて一定の数 d を次々に加えて得られる数列を **等差数列** といい，d をその等差数列の **公差** という。

例 4　(1)　正の奇数を小さい方から順に並べた数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$$

は，初項 1，公差 2 の等差数列である。

(2)　初項 8，公差 -2 の等差数列は，次のようになる。

$$8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ \cdots$$

問 4　次の等差数列の初項と公差を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

(1)　$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \cdots$　　(2)　$7,\ 1,\ -5,\ -11,\ \cdots$

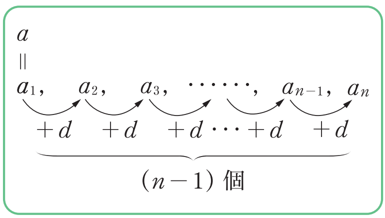
問 5　次の等差数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　初項 5，公差 8　　(2)　初項 9，公差 -3

等差数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ が初項 a，公差 d の等差数列であるとき

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a_1 + d = a + 1d = a + (2-1)d$$
$$a_3 = a_2 + d = a + 2d = a + (3-1)d$$
$$a_4 = a_3 + d = a + 3d = a + (4-1)d$$
$$\cdots\cdots\cdots$$



となり，第 n 項は次のように表される。

$$a_n = a + (n-1)d$$

したがって，次の公式が成り立つ。

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

例 5 初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 3n - 1 \end{aligned}$$

また，この数列の第 20 項は

$$\begin{aligned} a_{20} &= 3 \cdot 20 - 1 \\ &= 59 \end{aligned}$$

問 6 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 25 項を求めよ。

(1) 初項 3，公差 5　　(2) 初項 7，公差 -4

例題 1 等差数列の一般項 [1]

初項 4，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。また，55 はこの数列の第何項か。

解 初項 4，公差 3 の等差数列の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

55 がこの数列の第 n 項であるとすると

$$3n + 1 = 55$$

よって　$n = 18$

すなわち，55 は第 18 項である。

問 7 初項 6，公差 -5 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。また，-54 はこの数列の第何項か。

p.22 Training 1

例題 2 等差数列の一般項 [2]

第 4 項が 14，第 10 項が 62 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

考え方 初項，公差がわかれば，一般項 $a_n=a+(n-1)d$ を求めることができる。

解 初項を a，公差を d とおくと $a_n=a+(n-1)d$ より

$a_4=14$ であるから　$a+3d=14$　……①

$a_{10}=62$ であるから　$a+9d=62$　……②

①，② を解くと

$$a=-10,\quad d=8$$

よって，一般項は

$$a_n=-10+(n-1)\cdot 8=8n-18$$

問 8 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 p.22 Training 2

(1) 初項が 3，第 15 項が 87　　(2) 第 3 項が 6，第 10 項が -29

例題 3 等差数列の一般項 [3]

初項 20，公差 -3 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて負となるか。

解 一般項は

$$a_n=20+(n-1)\cdot(-3)=-3n+23$$

$a_n<0$ となるとき，$-3n+23<0$ であるから

$$n>\frac{23}{3}=7.6\cdots$$

n は自然数であるから　$n\geqq 8$

よって，この等差数列の第 8 項が初めて負となる。

問 9 初項 50，公差 -4 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて負となるか。

p.22 Training 3

❸ 等差数列の和

等差数列の和

初項 2，公差 3 の等差数列の，初項から第 5 項までの和 S を求めることを考えてみよう。

$$S=2+5+8+11+14$$

加える順序を逆にすると

$$S=14+11+8+5+2$$

$$\begin{array}{rrcl} & S &=& 2+\ \ 5+\ \ 8+11+14 \\ +) & S &=& 14+11+\ \ 8+\ \ 5+\ \ 2 \\ \hline & 2S &=& 16+16+16+16+16 \end{array}$$

これらを加えると　$2S=16+16+16+16+16=5\times16$

よって　$S=\dfrac{1}{2}(5\times16)=40$

ここで，初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の公差を d，初項から第 n 項までの和を S_n とする。上と同様に計算すると

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l \quad \cdots\cdots ①$$

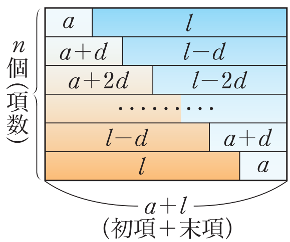
$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+d)+a \quad \cdots\cdots ②$$

① ＋ ② より　$2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)$

ゆえに

$$2S_n=n(a+l)$$

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$$



この式に $l=a+(n-1)d$ を代入すると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

したがって，次の公式が成り立つ。

等差数列の和

初項 a，公差 d，項数 n，末項 l の等差数列の和を S_n とすると

$$\boldsymbol{S_n=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}}$$

例 6　(1)　初項 3，末項 19，項数 9 の等差数列の和 S_9 は

$$S_9=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot(3+19)=99$$

(2)　初項 4，公差 3，項数 17 の等差数列の和 S_{17} は

$$S_{17}=\frac{1}{2}\cdot 17\cdot\{2\cdot 4+(17-1)\cdot 3\}=476$$

問 10　次の等差数列の和を求めよ。 p.22 Training 4

(1)　初項 7，末項 61，項数 10　　(2)　初項 -10，公差 4，項数 13

例 7　5 から 31 までの奇数の和 $5+7+9+\cdots+31$ を求めてみよう。

これは，初項 5，公差 2 の等差数列の和である。

末項 31 を第 n 項とすると　　$31=5+2(n-1)$

これより，$n=14$ となり，項数は 14 である。

よって，求める奇数の和 S_{14} は

$$S_{14}=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot(5+31)=252$$

問 11　等差数列の和 $(-5)+(-2)+1+\cdots+22$ を求めよ。

例 題 4　　　等差数列の和

初項 24，公差 -4 の等差数列において，初項から第何項までの和が -60 となるか。

解　初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 24+(n-1)\cdot(-4)\}=-2n^2+26n$$

$S_n=-60$ とすると　　$-2n^2+26n=-60$

$$n^2-13n-30=0$$

$$(n+2)(n-15)=0$$

よって　　$n=-2,\ 15$

n は自然数であるから　　$n=15$

ゆえに，第 15 項までの和が -60 となる。

問 12　初項 -21，公差 3 の等差数列において，初項から第何項までの和が 81 となるか。

p.22 Training 5

1 から n までの自然数 1，2，3，$\cdots$，n の和は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから，次の公式が得られる。

$$\boldsymbol{1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)}$$

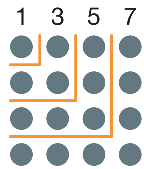
また，1 から始まる n 個の奇数の和

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

は，初項 1，末項 $2n-1$，項数 n の等差数列の和であるから，次のようになる。

$$\frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}=n^2$$

よって　$\boldsymbol{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$



$1=1^2$

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

問 13　次の数の和を求めよ。

(1)　1 から 100 までの自然数　　(2)　1 から 59 までの奇数

例題 5　　倍数の和

2 桁(けた)の自然数のうち，3 の倍数であるものの和を求めよ。

解　3 の倍数である 2 桁の自然数を小さい方から順に並べると，初項 12，公差 3 の等差数列となり，末項は 99 である。

よって，項数を n とすると

$99=12+3(n-1)$ より　$n=30$

ゆえに，これらの数の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 30\cdot(12+99)=1665$$

10	11	12
13	14	15
16	17	18
⋯⋯		⋯
⋯⋯		⋯
97	98	99

問 14　2 桁の自然数のうち，7 の倍数であるものの和を求めよ。

p.22 Training 6　p.46 Level Up 1-3

4 等比数列

等比数列

日常生活で，私たちが数を表すのに用いている位取りの単位

一，十，百，千，万，十万，百万，$\cdots$

は，1つ前の項を10倍するという規則でつくられている。

このように，初項 a から始めて一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を **等比数列** といい，r をその等比数列の **公比** という。

例 8　(1) 等比数列1，2，4，8，16，$\cdots$の初項は1，公比は2である。

(2) 初項2，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列は，次のようになる。

$$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$$

問 15　次の等比数列の初項と公比を求めよ。また，第5項を求めよ。

(1) $6,\ 3,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4},\ \cdots$　　(2) $2,\ -6,\ 18,\ -54,\ \cdots$

問 16　次の等比数列の初項から第5項までを求めよ。

(1) 初項2，公比3　　(2) 初項9，公比 $\dfrac{1}{3}$

等比数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ が初項 a，公比 r の等比数列であるとき

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a_1 \times r = ar^1 = ar^{2-1}$$
$$a_3 = a_2 \times r = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$a_4 = a_3 \times r = ar^3 = ar^{4-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{array}{c} a \\ \| \\ \underbrace{a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} \cdots\cdots \xrightarrow{\times r} a_{n-1} \xrightarrow{\times r} a_n}_{(n-1)\text{個}} \end{array}$$

となっているから，第 n 項は次のように表される。

$$a_n = ar^{n-1}$$

ただし，$r \neq 0$ のとき，$r^0 = 1$ と定める。

したがって，次の公式が成り立つ。

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$$

例 9　(1)　初項 5，公比 4 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 5 \cdot 4^{n-1}$$

(2)　初項 -1，公比 -3 の等比数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = (-1) \cdot (-3)^{n-1} = -(-3)^{n-1}$$

問 17　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　初項 1，公比 5　　(2)　$3,\ -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4},\ -\dfrac{3}{8},\ \cdots$

例題 6　　等比数列の一般項

第 2 項が 6，第 4 項が 24 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

考え方　初項，公比がわかれば，一般項 $a_n = ar^{n-1}$ を求めることができる。

解　初項を a，公比を r とおくと　$a_n = ar^{n-1}$ より

$a_2 = 6$ であるから　　$ar = 6$　　……①

$a_4 = 24$ であるから　　$ar^3 = 24$　　……②

②÷① より　　$r^2 = 4$　　←― $\dfrac{ar^3}{ar} = \dfrac{24}{6}$

$r = \pm 2$

① より，$r = 2$ のとき　　$a = 3$

$r = -2$ のとき　　$a = -3$

したがって，一般項は

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \quad \text{または} \quad a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$$

問 18　第 3 項が 36，第 5 項が 324 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

p.22 Training 7

5 等比数列の和

等比数列の和

初項 1，公比 3 の等比数列の，初項から第 5 項までの和 S を求めることを考えてみよう。

$$S=1+3+3^2+3^3+3^4$$

この両辺に 3 を掛けて $3S$ をつくり，$S-3S$ を計算してみる。

$$\begin{array}{rrl} & S= & 1+3+3^2+3^3+3^4 \\ -) & 3S= & \quad\;\; 3+3^2+3^3+3^4+3^5 \\ \hline & (1-3)S= & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -3^5 \end{array}$$

この計算から $S=\dfrac{1-3^5}{-2}=121$

とわかる。

一般の等比数列の初項から第 n 項までの和も同様の方法で求められる。

初項を a，公比を r とし，求める和を S_n とすると

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

① の両辺に r を掛けると

$$rS_n=\qquad ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$(1-r)S_n=a-ar^n \quad \cdots\cdots ③$$

$r \neq 1$ のとき，③ の両辺を $1-r$ で割ると

$$S_n=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$r=1$ のとき，① より

$$S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots+a+a}_{n\text{個}}=na$$

したがって，次の公式が成り立つ。

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$r \neq 1$ のとき　$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$r = 1$ のとき　$$S_n = na$$

例 10　(1)　初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 5 項までの和 S_5 は

$$S_5 = \frac{3(2^5-1)}{2-1} = 93$$　← $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2)　初項 8，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 6 項までの和 S_6 は

$$S_6 = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 16\left(1-\frac{1}{64}\right) = \frac{63}{4}$$　← $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

(3)　等比数列 2，-6，18，-54，162，$\cdots$ の初項は 2，公比は -3 であるから，その初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{2\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)} = \frac{1}{2}\{1-(-3)^n\}$$　← $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

問 19　次の等比数列の和を求めよ。　p.22 Training 8(1)

(1)　初項 6，公比 3，項数 4　　(2)　初項 3，公比 -2，項数 6

問 20　次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　1，3，9，27，$\cdots$　　(2)　2，1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\cdots$

p.22 Training 8(2)

問 21　1 日目に 1 円，2 日目に 2 円，3 日目に 4 円というように，毎日，前日の 2 倍の金額を貯金していくと，10 日目には貯金の総額はいくらになるか。また，20 日目にはどうか。

等比数列の和が与えられているとき，初項と公比を求めてみよう。

例題 7 等比数列の和と公比

初項から第 3 項までの和が 21，初項から第 6 項までの和が 189 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解 初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ のとき，$S_3=21$ より　$3a=21$

$S_6=189$ より　$6a=189$

ゆえに，これらを同時に満たす a は存在しない。

よって，$r \neq 1$ であるから

$S_3=21$ より　$\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=21$　……①

$S_6=189$ より　$\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=189$　……②

② より　$\dfrac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=189$

これに ① を代入して　$21(1+r^3)=189$

$$1+r^3=9$$

$$r^3=8$$

r は実数であるから　$r=2$

これを ① に代入して　$a=3$

ゆえに，この等比数列の初項は 3，公比は 2 である。

問22 初項から第 3 項までの和が 35，初項から第 6 項までの和が 315 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

p.22 Training 9

参考　等差中項と等比中項

3つの数 2，x，18 がこの順で等差数列であるとき，x の値を求めてみよう。等差数列では，隣り合う2項の差が等しいから

$$x-2=18-x$$

$$2x=20$$

よって　$x=10$

$$2,\ \ x,\ \ 18$$
$$2 \xrightarrow{+d} x \xrightarrow{+d} 18$$

一般に，3つの数 a，b，c がこの順で等差数列であるとき

$$b-a=c-b$$

よって　$\boldsymbol{2b=a+c}$

が成り立つ。この b を **等差中項** という。

問 1　次の3つの数がこの順で等差数列であるとき，x の値を求めよ。

(1)　5，x，13　　　(2)　$\dfrac{1}{6}$，x，$\dfrac{1}{2}$

次に，3つの数 2，x，18 がこの順で等比数列であるとき，x の値を求めてみよう。等比数列では，隣り合う2項の比が等しいから

$$\frac{x}{2}=\frac{18}{x}$$

$$x^2=36$$

よって　$x=\pm 6$

$$2 \xrightarrow{\times r} x \xrightarrow{\times r} 18$$

一般に，0でない3つの数 a，b，c がこの順で等比数列であるとき

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$$

よって　$\boldsymbol{b^2=ac}$

が成り立つ。この b を **等比中項** という。

問 2　次の3つの数がこの順で等比数列であるとき，x の値を求めよ。

(1)　3，x，12　　　(2)　2，x，3

Training トレーニング

1 初項 -41，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。また，3 はこの数列の第何項か。 p.11

2 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 p.12

(1) 初項が -2，第 5 項が 26

(2) 第 3 項が 41，第 7 項が 29

3 初項 -55，公差 4 である等差数列 $\{a_n\}$ の第何項が初めて正となるか。 p.12

4 次の等差数列の和を求めよ。 p.14

(1) 初項 -1，末項 43，項数 12

(2) 初項 8，公差 -3，項数 11

5 初項 -40，公差 6 の等差数列において，初項から第何項までの和が初めて正となるか。 p.15

6 3 桁の自然数のうち，9 の倍数であるものの和を求めよ。 p.15

7 第 2 項が 6，第 5 項が 48 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 p.17

8 次の等比数列の和を求めよ。 p.19

(1) 初項 6，公比 2，項数 5 の等比数列の和

(2) 等比数列 $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \cdots$ の初項から第 n 項までの和

9 初項から第 3 項までの和が 7，初項から第 6 項までの和が -182 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。 p.20