1 章 数列

Readiness check レディネス チェック

教科書 P.6

問 1 (1) **−1** 7 から始めて，次々に 4 を引いた数が並べられている。

(2) **−6** 2 から始めて，次々に −3 を掛けた数が並べられている。

(3) **9** 自然数を 2 乗した数が並べられている。

問 2 (1) **20** (2) **30**

(3) $3^{5-1} = 3^4 = \mathbf{81}$

問 3
$$(2+38)+(5+35)+(8+32)+(11+29)+(14+26)+(17+23)+20$$
$$= 40\times 6+20 = \mathbf{260}$$

教科書 P.7

問 4 $x+y=1$ より $y=1-x$

これを用いて

$$(\text{左辺}) = x^2+(1-x)^2 = 2x^2-2x+1$$
$$(\text{右辺}) = 1-2x(1-x) = 1-2x+2x^2 = 2x^2-2x+1$$

よって $x^2+y^2=1-2xy$

問 5 整数 n は次のように表すことができる。

$n=2k$ （k は整数）

このとき

$$n^2+2n = (2k)^2+2\cdot 2k = 4k^2+4k = 4(k^2+k)$$

k^2+k は整数であるから，n^2+2n は 4 の倍数である。

問 6 (左辺) − (右辺)

$= (5a+2b)-(2a+5b)$

$= 3a-3b$

$= 3(a-b)$

ここで，$a>b$ より

$a-b>0$

であるから

(左辺) − (右辺)

$= 3(a-b)>0$

よって

$5a+2b>2a+5b$

1 節 数列

❶ 数列

教科書 P.8

問 1 (1) 初項 **7**

第 2 項 $7+5=\mathbf{12}$

第 3 項 $12+5=\mathbf{17}$

第 4 項 $17+5=\mathbf{22}$

第 5 項 $22+5=\mathbf{27}$

(2) 初項 **2**

第 2 項 $2\times 3=\mathbf{6}$

第 3 項 $6\times 3=\mathbf{18}$

第 4 項 $18\times 3=\mathbf{54}$

第 5 項 $54\times 3=\mathbf{162}$

教科書 P.9

問 2 (1) $a_1 = 3\times 1+1 = \mathbf{4}$

$a_2 = 3\times 2+1 = \mathbf{7}$

$a_3 = 3\times 3+1 = \mathbf{10}$

$a_4 = 3\times 4+1 = \mathbf{13}$

$a_5 = 3\times 5+1 = \mathbf{16}$

(2) $a_1 = 1^2 = \mathbf{1}$

$a_2 = 2^2 = \mathbf{4}$

$a_3 = 3^2 = \mathbf{9}$

$a_4 = 4^2 = \mathbf{16}$

$a_5 = 5^2 = \mathbf{25}$

(3) $a_1 = (-2)^1 = \mathbf{-2}$

$a_2 = (-2)^2 = \mathbf{4}$

$a_3 = (-2)^3 = \mathbf{-8}$

$a_4 = (-2)^4 = \mathbf{16}$

$a_5 = (-2)^5 = \mathbf{-32}$

問 3 (1) $a_1=3,\ a_2=6,\ a_3=9,\ a_4=12,\ a_5=15$

$a_n = 3n$

(2) $b_1=1,\ b_2=3,\ b_3=5,\ b_4=7,\ b_5=9$

$b_n = 2n-1$

❷ 等差数列

教科書 P.10

問 4 (1) **初項 3，公差 4**，第 5 項 **19**

(2) **初項 7，公差 −6**，第 5 項 **−17**

問 5 (1) 初項 **5**

第 2 項 $5+8=\mathbf{13}$

第 3 項　$13+8=\mathbf{21}$

第 4 項　$21+8=\mathbf{29}$

第 5 項　$29+8=\mathbf{37}$

(2)　初項　**9**

第 2 項　$9+(-3)=\mathbf{6}$

第 3 項　$6+(-3)=\mathbf{3}$

第 4 項　$3+(-3)=\mathbf{0}$

第 5 項　$0+(-3)=\mathbf{-3}$

教科書 P.11

問 6　(1)　$a_n=3+(n-1)\cdot 5=\mathbf{5n-2}$

$a_{25}=5\cdot 25-2=\mathbf{123}$

(2)　$a_n=7+(n-1)\cdot(-4)=\mathbf{-4n+11}$

$a_{25}=-4\cdot 25+11=\mathbf{-89}$

問 7　初項 6，公差 -5 の等差数列の一般項は

$a_n=6+(n-1)\cdot(-5)=\mathbf{-5n+11}$

-54 がこの数列の第 n 項であるとすると

$-5n+11=-54$

よって　$n=13$

すなわち，-54 は **第 13 項** である。

教科書 P.12

問 8　(1)　初項を a，公差を d とおくと

初項が 3 であるから

$a=3$　……①

$a_n=a+(n-1)d$ より

$a_{15}=87$ であるから

$a+14d=87$　……②

①，② を解くと

$a=3,\ d=6$

よって，一般項は

$a_n=3+(n-1)\cdot 6=\mathbf{6n-3}$

(2)　初項を a，公差を d とおくと

$a_n=a+(n-1)d$ より

$a_3=6$ であるから　$a+2d=6$　……①

$a_{10}=-29$ であるから

$a+9d=-29$　……②

①，② を解くと

$a=16,\ d=-5$

よって，一般項は

$a_n=16+(n-1)\cdot(-5)=\mathbf{-5n+21}$

問 9　一般項は

$a_n=50+(n-1)\cdot(-4)=-4n+54$

$a_n<0$ となるとき，$-4n+54<0$ であるから

$n>\dfrac{54}{4}=13.5$

n は自然数であるから　$n\geqq 14$

よって，この等差数列の **第 14 項** が初めて負となる。

❸ 等差数列の和

教科書 P.14

問10　(1)　$\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot(7+61)=\mathbf{340}$

(2)　$\dfrac{1}{2}\cdot 13\cdot\{2\cdot(-10)+(13-1)\cdot 4\}=\mathbf{182}$

問11　初項 -5，公差 3 の等差数列の和である。

末項 22 を第 n 項とすると

$22=-5+3(n-1)$

これより，$n=10$ となり，項数は 10 である。

よって，求める等差数列の和 S_{10} は

$S_{10}=\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot(-5+22)=\mathbf{85}$

教科書 P.15

問12　初項から第 n 項までの和 S_n は

$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot(-21)+(n-1)\cdot 3\}$

$=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{45}{2}n$

$S_n=81$ とすると

$\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{45}{2}n=81$

すなわち　$n^2-15n-54=0$

$(n+3)(n-18)=0$

ゆえに　$n=-3,\ 18$

n は自然数であるから，**第 18 項までの和** が 81 となる。

問13　(1)　$\dfrac{1}{2}\cdot 100\cdot(100+1)=\mathbf{5050}$

(2)　$1+3+5+\cdots+59$

$=1+3+5+\cdots+(2\cdot 30-1)$

$=30^2$

$=\mathbf{900}$

問14　7 の倍数である 2 桁の自然数を小さい方から順に並べると，初項 14，公差 7 の等差数列となり，末項は 98 である。

よって，項数を n とすると

$98=14+7(n-1)$ より　$n=13$

ゆえに，これらの数の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot(14+98)=\mathbf{728}$$

4 等比数列

教科書 P.16

問15 (1) **初項 6，公比** $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

第 5 項 $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

(2) **初項 2，公比** $\frac{-6}{2}=-3$

第 5 項 $(-54)\cdot(-3)=\mathbf{162}$

問16 (1) **2，6，18，54，162**

(2) **9，3，1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$**

教科書 P.17

問17 (1) $a_n=1\cdot 5^{n-1}=\mathbf{5^{n-1}}$

(2) 初項は 3，公比は $\left(-\frac{3}{2}\right)\div 3=-\frac{1}{2}$

であるから，一般項は

$$a_n=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

問18 初項を a，公比を r とおくと $a_n=ar^{n-1}$ より

$a_3=36$ であるから $ar^2=36$ ……①

$a_5=324$ であるから $ar^4=324$ ……②

②÷① より $r^2=9$

$r=\pm 3$

① より，$r=3$ のとき $a=4$

$r=-3$ のとき $a=4$

したがって，一般項は

$$a_n=4\cdot 3^{n-1} \quad \text{または} \quad a_n=4\cdot(-3)^{n-1}$$

5 等比数列の和

教科書 P.19

問19 (1) $\frac{6(3^4-1)}{3-1}=\mathbf{240}$

(2) $\frac{3\{1-(-2)^6\}}{1-(-2)}=\mathbf{-63}$

問20 (1) 初項 1，公比 3 の等比数列であるから

$$S_n=\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$$

(2) 初項 2，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$S_n=\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

問21 これは，初項 1，公比 2 の等比数列である。

10 日目の貯金の総額は，初項から第 10 項までの和を求めればよいから

$$\frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=\mathbf{1023}\ \text{（円）}$$

20 日目の貯金の総額は，初項から第 20 項までの和を求めればよいから

$$\frac{1\cdot(2^{20}-1)}{2-1}=\mathbf{1048575}\ \text{（円）}$$

教科書 P.20

問22 初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ のとき，$S_3=35$ より $3a=35$

$S_6=315$ より $6a=315$

ゆえに，これらを同時に満たす a は存在しない。

よって，$r\neq 1$ であるから

$S_3=35$ より $\frac{a(1-r^3)}{1-r}=35$ ……①

$S_6=315$ より $\frac{a(1-r^6)}{1-r}=315$ ……②

② より $\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=315$

これに ① を代入して $35(1+r^3)=315$

$1+r^3=9$

$r^3=8$

r は実数であるから $r=2$

これを ① に代入して $a=5$

ゆえに，この等比数列の **初項は 5，公比は 2** である。

参考 等差中項と等比中項

教科書 P.21

問 1 (1) $2x=5+13$

$\boldsymbol{x=9}$

(2) $2x=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

$2x=\frac{2}{3}$

$\boldsymbol{x=\frac{1}{3}}$

問 2 (1) $x^2=3\cdot 12$

$x^2=36$

$\boldsymbol{x=\pm 6}$

(2) $x^2 = 2 \cdot 3$

$x^2 = 6$

$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{6}}$

Training トレーニング

教科書 P.22

1 初項 -41，公差 4 の等差数列の一般項は

$$a_n = -41 + (n-1)\cdot 4 = \boldsymbol{4n-45}$$

3 がこの数列の第 n 項であるとすると

$4n - 45 = 3$

$n = 12$

すなわち，3 は **第 12 項** である。

2 (1) 公差を d とおくと $a_n = -2 + (n-1)d$ より

$a_5 = 26$ であるから　$-2 + 4d = 26$

$d = 7$

よって，一般項は

$$a_n = -2 + (n-1)\cdot 7 = \boldsymbol{7n-9}$$

(2) 初項を a，公差を d とおくと

$a_n = a + (n-1)d$ より

$a_3 = 41$ であるから

$a + 2d = 41$　……①

$a_7 = 29$ であるから

$a + 6d = 29$　……②

①，② を解くと

$a = 47,\ d = -3$

よって，一般項は

$$a_n = 47 + (n-1)\cdot(-3) = \boldsymbol{-3n+50}$$

3 一般項は

$$a_n = -55 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 59$$

$a_n > 0$ となるとき，$4n - 59 > 0$ であるから

$$n > \frac{59}{4} = 14.7\cdots$$

n は自然数であるから　$n \geqq 15$

よって，この等差数列の **第 15 項** が初めて正となる。

4 (1) $\dfrac{1}{2}\cdot 12 \cdot (-1+43) = \boldsymbol{252}$

(2) $\dfrac{1}{2}\cdot 11 \cdot \{2\cdot 8 + (11-1)\cdot(-3)\} = \boldsymbol{-77}$

5 初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2\cdot(-40) + (n-1)\cdot 6\}$$

$$= 3n^2 - 43n$$

$S_n > 0$ となるとき

$3n^2 - 43n > 0$

これを解いて　$n < 0,\ \dfrac{43}{3} < n$

n は自然数であるから

$n > \dfrac{43}{3} = 14.3\cdots$ より　$n \geqq 15$

ゆえに，**初項から第 15 項までの和** が初めて正となる。

6 9 の倍数である 3 桁の自然数を小さい方から順に並べると，初項 108，公差 9 の等差数列となり，末項は 999 である。

よって，項数を n とすると

$999 = 108 + 9(n-1)$ より　$n = 100$

ゆえに，これらの数の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 100 \cdot (108 + 999) = \boldsymbol{55350}$$

7 初項を a，公比を r とおくと $a_n = ar^{n-1}$ より

$a_2 = 6$ であるから　$ar = 6$　……①

$a_5 = 48$ であるから　$ar^4 = 48$　……②

②÷① より　$r^3 = 8$

r は実数であるから　$r = 2$

① より　$a = 3$

したがって，一般項は

$$\boldsymbol{a_n = 3\cdot 2^{n-1}}$$

8 (1) $\dfrac{6(2^5-1)}{2-1} = \boldsymbol{186}$

(2) 初項 $\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$S_n = \frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \boldsymbol{1 - \frac{1}{3^n}}$$

9 初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r = 1$ のとき，

$S_3 = 7$ より　$3a = 7$

$S_6 = -182$ より　$6a = -182$

ゆえに，これらを同時に満たす a は存在しない。

よって，$r \neq 1$ であるから

$S_3 = 7$ より　$\dfrac{a(1-r^3)}{1-r} = 7$　……①

$S_6 = -182$ より

$$\frac{a(1-r^6)}{1-r}=-182 \quad \cdots\cdots ②$$

② より

$$\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=-182$$

これに ① を代入して　$7(1+r^3)=-182$

$1+r^3=-26$

$r^3=-27$

r は実数であるから　$r=-3$

これを ① に代入して　$a=1$

ゆえに，この等比数列の **初項は 1，公比は −3** である。

2節 いろいろな数列

❶ 数列の和と記号 $\sum$

教科書 P.23

問 1 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3k+2)=(3\cdot1+2)+(3\cdot2+2)+(3\cdot3+2)+(3\cdot4+2)$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3k+2)=38$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}k^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}k^2=91$

(3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}5^j=5^1+5^2+5^3$

したがって　$\displaystyle\sum_{j=1}^{3}5^j=155$

問 2 (1) $2+4+6+\cdots+2n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2k$

(2) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6=\displaystyle\sum_{k=1}^{4}k(k+2)$

教科書 P.24

問 3 (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

$=\dfrac{1}{6}\cdot20\cdot(20+1)\cdot(2\cdot20+1)=2870$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+29^2$

$=\dfrac{1}{6}\cdot29\cdot(29+1)\cdot(2\cdot29+1)=8555$

教科書 P.25

問 4 等式 $k^4-(k-1)^4=4k^3-6k^2+4k-1$ において

$k=1$ とすると

$1^4-0^4=4\cdot1^3-6\cdot1^2+4\cdot1-1$

$k=2$ とすると

$2^4-1^4=4\cdot2^3-6\cdot2^2+4\cdot2-1$

$k=3$ とすると

$3^4-2^4=4\cdot3^3-6\cdot3^2+4\cdot3-1$

$\cdots$

$k=n$ とすると

$n^4-(n-1)^4=4\cdot n^3-6\cdot n^2+4\cdot n-1$

これら n 個の等式の左辺，右辺をそれぞれ加えると

$$n^4-0^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)-6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+4(1+2+3+\cdots+n)-(1+1+1+\cdots+1)$$

$$n^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3-6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k-n$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3-n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)-n$$

これより

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$$

$$=n\{n^3+(2n^2+3n+1)-2(n+1)+1\}$$

$$=n(n^3+2n^2+n)$$

$$=n^2(n+1)^2$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

問 5 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2)=-2n$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}k=\frac{1}{2}\cdot40\cdot(40+1)=820$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}k^2=\frac{1}{6}\cdot12\cdot(12+1)(2\cdot12+1)$

$=650$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\left[\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}\right]^2$

$=\dfrac{1}{4}(n-1)^2n^2$

教科書 P.26

問 6 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}2\cdot3^{k-1}=\frac{2(3^5-1)}{3-1}=242$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}=\frac{1\cdot\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$

$=\dfrac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}5^k = \sum_{k=1}^{n}5\cdot5^{k-1}$

$\displaystyle = \frac{5(5^n-1)}{5-1}$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{5}{4}(5^n-1)}$

問 7 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}3k+\sum_{k=1}^{n}2 = 3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2$

$\displaystyle = 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n = \frac{1}{2}n\{3(n+1)+4\}$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(3n+7)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n-1}2k+\sum_{k=1}^{n-1}(-1) = 2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}-(n-1)$

$= n^2-n-n+1 = n^2-2n+1$

$= \boldsymbol{(n-1)^2}$

教科書 P.27

問 8 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2k(3k+2)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k) = 6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle = 6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$= n(n+1)\{(2n+1)+2\}$

$= \boldsymbol{n(n+1)(2n+3)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(3k+2)(k-1)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n-1}(3k^2-k-2)$

$\displaystyle = 3\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}2$

$\displaystyle = 3\cdot\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}$

$\displaystyle \quad -\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}-2(n-1)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(n-1)\{n(2n-1)-n-4\}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(n-1)(2n^2-2n-4)$

$= (n-1)(n^2-n-2)$

$= \boldsymbol{(n-2)(n-1)(n+1)}$

問 9 この数列の第 k 項は $k(2k-1)$ と表されるから

$\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}k(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$

$\displaystyle = 2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)}$

❷ 階差数列と数列の和

教科書 P.28

問10 数列 2，4，9，17，28 の階差数列は

2，5，8，11

となり，初項 2，公差 3 の等差数列である。

よって，第 5 項は 14 である。

したがって，求める階差数列は

2，5，8，11，14

教科書 P.29

問11 (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，3，5，7，9，11，…

これは，初項 1，公差 2 の等差数列であるから

$b_n = 1+(n-1)\cdot2 = 2n-1$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$\displaystyle a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$\displaystyle = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$\displaystyle = 1+2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$

$\displaystyle = 1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$

$= n^2-2n+2$

$a_1 = 1$ であるから，$a_n = n^2-2n+2$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = n^2-2n+2}$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，3，9，27，81，243，…

これは，初項 1，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n = 1\cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} \\ &= 3 + \frac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1} \\ &= 3 + \frac{1}{2}(3^{n-1}-1) \\ &= \frac{1}{2}(3^{n-1}+5) \end{aligned}$$

$a_1 = 3$ であるから，$a_n = \dfrac{1}{2}(3^{n-1}+5)$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2}(3^{n-1}+5)}$

教科書 P.30

問12　　$a_1 = S_1 = 1^2 + 3\cdot 1 = 4$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2+3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2n+2 \end{aligned}$$

$a_1 = 4$ であるから，$a_n = 2n+2$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n = 2n+2}$

3 いろいろな数列

教科書 P.31

問13　$S_n = \dfrac{2}{1\cdot 3} + \dfrac{2}{3\cdot 5} + \dfrac{2}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1} = \boldsymbol{\frac{2n}{2n+1}}$$

教科書 P.32

問14　　$S_n = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + (n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1}$　……①

① の両辺に 2 を掛けて

$2S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + (n-1)\cdot 2^{n-1} + n\cdot 2^n$　……②

①－② より

$$\begin{aligned} -S_n &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n\cdot 2^n \\ &= \frac{2^n - 1}{2-1} - n\cdot 2^n \\ &= 2^n - 1 - n\cdot 2^n \\ &= (1-n)\cdot 2^n - 1 \end{aligned}$$

したがって

$$\boldsymbol{S_n = (n-1)2^n + 1}$$

教科書 P.33

問15　(1)　第 n 群の項の個数は $2n$ であるから，$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n = n(n-1)$$

ゆえに，第 n 群の最初の項は

$$n(n-1)+1 = \boldsymbol{n^2 - n + 1}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

(2)　第 n 群は初項 n^2-n+1，公差 1，項数 $2n$ の等差数列であるから，その総和は

$$\frac{1}{2}\cdot 2n\{2(n^2-n+1) + (2n-1)\cdot 1\}$$

$$= \boldsymbol{n(2n^2+1)}$$

別解　第 n 群の項の総和 S を求めるには，第 1 群から第 n 群までの項の総和 T から第 1 群から第 $(n-1)$ 群までの項の総和 U を引けばよい。

第 1 群から第 n 群までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S = T - U &= \sum_{k=1}^{n(n+1)} k - \sum_{k=1}^{n(n-1)} k \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)\{n(n+1)+1\} - \frac{1}{2}n(n-1)\{n(n-1)+1\} \\ &= \frac{1}{2}n\{(n+1)(n^2+n+1) - (n-1)(n^2-n+1)\} \\ &= \frac{1}{2}n(4n^2+2) = n(2n^2+1) \end{aligned}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

Training トレーニング

教科書 P.34

10 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$

$\displaystyle = 4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3 = 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n$

$= n\{2(n+1)+3\} = \boldsymbol{n(2n+5)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(3k-5)$

$\displaystyle = 3\sum_{k=1}^{n+1}k-\sum_{k=1}^{n+1}5$

$\displaystyle = 3\cdot\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-5(n+1)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(n+1)\{3(n+2)-10\}$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(3n-4)}$

(3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-12j+6)$

$\displaystyle = -12\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}6 = -12\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+6n$

$= 6n\{-(n+1)+1\} = \boldsymbol{-6n^2}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+3)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+6(n+1)+18\}$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(2n^2+9n+25)}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+3)(2k-1)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}(2k^2+5k-3)$

$\displaystyle = 2\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}3$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\displaystyle +5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n\{2(n+1)(2n+1)+15(n+1)-18\}$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2+21n-1)}$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4(-3)^{k-1} = \frac{4\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}$

$= \boldsymbol{1-(-3)^n}$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-k^2)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n-1}2\cdot2^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

$\displaystyle = \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$\displaystyle -\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}$

$\displaystyle = 2^n-2-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

$\displaystyle = \boldsymbol{2^n-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-2}$

(8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}7^k = \sum_{k=1}^{n}7\cdot7^{k-1}$

$\displaystyle = \frac{7(7^n-1)}{7-1}$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{7}{6}(7^n-1)}$

(9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle = \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-2\}$

$\displaystyle = \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2)$

$\displaystyle = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n-1)$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)}$

11 (1) この数列の第 k 項は $k(2k+1)$ と表されるから　$\boldsymbol{a_n = n(2n+1)}$

$\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}k(2k+1) = \sum_{k=1}^{n}(2k^2+k)$

$\displaystyle = 2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)+3\}$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)}$

(2) この数列の第 k 項は $2k(-2k-1)$ と表されるから　$\boldsymbol{a_n = -2n(2n+1)}$

$\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}\{-2k(2k+1)\} = \sum_{k=1}^{n}(-4k^2-2k)$

$\displaystyle = -4\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$

$$= -4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= -\frac{1}{3}n(n+1)\{2(2n+1)+3\}$$
$$\boldsymbol{= -\frac{1}{3}n(n+1)(4n+5)}$$

12 (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

$$6,\ 10,\ 14,\ 18,\ \cdots$$

これは，初項 6，公差 4 の等差数列であるから

$$b_n = 6+(n-1)\cdot 4 = 4n+2$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$= 4+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+2)$$
$$= 4+4\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}2$$
$$= 4+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)$$
$$= 2n^2+2$$

$a_1 = 4$ であるから，$a_n = 2n^2+2$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n = 2n^2+2}$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$$

これは，初項 2，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n = 2\cdot 2^{n-1}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$= 1+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot 2^{k-1}$$
$$= 1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$= 1+2(2^{n-1}-1)$$
$$= 2^n-1$$

$a_1 = 1$ であるから，$a_n = 2^n-1$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n = 2^n-1}$

13 　$a_1 = S_1 = 3^1-1 = 2$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n-S_{n-1}$$
$$= (3^n-1)-(3^{n-1}-1)$$
$$= 3^n-3^{n-1}$$
$$= 3\cdot 3^{n-1}-3^{n-1}$$
$$= 2\cdot 3^{n-1}$$

$a_1 = 2$ であるから，$a_n = 2\cdot 3^{n-1}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n = 2\cdot 3^{n-1}}$

14 $S_n = \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}$
$$+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right) = \boldsymbol{\frac{n}{3n+1}}$$

15 　$S_n = 3\cdot 2+6\cdot 2^2+9\cdot 2^3+12\cdot 2^4+\cdots$
$$+3(n-1)\cdot 2^{n-1}+3n\cdot 2^n$$
$$\cdots\cdots①$$

① の両辺に 2 を掛けて

$$2S_n = 3\cdot 2^2+6\cdot 2^3+9\cdot 2^4+12\cdot 2^5+\cdots$$
$$+3(n-1)\cdot 2^n+3n\cdot 2^{n+1}$$
$$\cdots\cdots②$$

①－② より

$$-S_n = 3\cdot 2+3\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+3\cdot 2^n$$
$$-3n\cdot 2^{n+1}$$

よって　　$-S_n = \frac{6(2^n-1)}{2-1}-3n\cdot 2^{n+1}$
$$= 3\cdot 2^{n+1}-6-3n\cdot 2^{n+1}$$
$$= 3(1-n)2^{n+1}-6$$

したがって

$$\boldsymbol{S_n = 3(n-1)2^{n+1}+6}$$

16 (1) $n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる自然数の個数は

$$1+3+5+\cdots+\{2(n-1)-1\}$$
$$= \frac{1}{2}(n-1)\{1+(2n-3)\} = (n-1)^2$$

ゆえに，第 n 群の最初の項は

$$(n-1)^2+1 = \boldsymbol{n^2-2n+2}$$

(2) (1) より，第 1 群から第 n 群までに含まれ

る自然数の個数は n^2 となる。

よって，第 n 群の最後の項は n^2 である。

したがって，2020 が第 n 群に含まれるとすると

$$(n-1)^2 < 2020 \leqq n^2$$

ここで　$44^2 = 1936$，$45^2 = 2025$

$$44^2 < 2020 < 45^2$$

であるから，2020 は第 45 群に含まれる。

また　$2020 - 1936 = 84$

より，2020 は **第 45 群の第 84 番目** である。

3 節　漸化式と数学的帰納法

1 漸化式

教科書 P.36

問 1　(1)　$a_2 = a_1 + 2 = 6 + 2 = 8$

$a_3 = a_2 + 2 = 8 + 2 = 10$

$a_4 = a_3 + 2 = 10 + 2 = 12$

よって

$\boldsymbol{a_5} = a_4 + 2 = 12 + 2 \boldsymbol{= 14}$

(2)　$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$

$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$

よって

$\boldsymbol{a_5} = 3a_4 + 2 = 3 \cdot 53 + 2 \boldsymbol{= 161}$

問 2　(1)　初項 -3，公差 4 の等差数列であるから

$\boldsymbol{a_n} = -3 + (n-1) \cdot 4$

$\boldsymbol{= 4n - 7}$

(2)　初項 2，公比 2 の等比数列であるから

$\boldsymbol{a_n} = 2 \cdot 2^{n-1} \boldsymbol{= 2^n}$

教科書 P.37

問 3　(1)　$a_{n+1} - a_n = 2n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

であるから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は　$2n - 1$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

$$= 3 + 2\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$= 3 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1)$$

$$= n^2 - 2n + 4$$

$a_1 = 3$ であるから，$a_n = n^2 - 2n + 4$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = n^2 - 2n + 4}$

(2)　$a_{n+1} - a_n = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

であるから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は　n^2

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}k^2 = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

$$= 2 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 12)$$

$a_1 = 2$ であるから，

$a_n = \dfrac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 12)$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 12)}$

教科書 P.38

問 4　(1)　$\alpha = 3\alpha - 4$ の解 $\alpha = 2$ を用いると，与えられた漸化式は

$$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$$

と変形できる。$b_n = a_n - 2$ とおくと

$$b_{n+1} = 3b_n,\quad b_1 = a_1 - 2 = 5 - 2 = 3$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

したがって

$\boldsymbol{a_n} = b_n + 2 \boldsymbol{= 3^n + 2}$

(2)　$\alpha = -2\alpha - 9$ の解 $\alpha = -3$ を用いると，与えられた漸化式は

$$a_{n+1} + 3 = -2(a_n + 3)$$

と変形できる。$b_n = a_n + 3$ とおくと

$$b_{n+1} = -2b_n,\quad b_1 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公比 -2 の等比数列であるから

$$b_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$$

したがって

$\boldsymbol{a_n} = b_n - 3 \boldsymbol{= 5 \cdot (-2)^{n-1} - 3}$

2 数学的帰納法

教科書 P.40

問 5　(1)　$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

……①　とする。

〔1〕$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1,\ (\text{右辺})=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1) \quad \cdots\cdots②$$

と仮定して，$n=k+1$ のとき ① が成り立つことを示す。

$n=k+1$ のとき，① の左辺を ② を用いて変形すると

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\left(\frac{1}{2}k+1\right)(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のとき，① の右辺は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

よって，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(2) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$

$=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ $\cdots\cdots①$ とする。

〔1〕$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1\cdot2=2$$

$$(\text{右辺})=\frac{1}{3}\cdot1\cdot2\cdot3=2$$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2) \quad \cdots\cdots②$$

と仮定して，$n=k+1$ のとき ① が成り立つことを示す。

$n=k+1$ のとき，① の左辺を ② を用いて変形すると

$$\begin{aligned}&1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)+(k+1)\{(k+1)+1\}\\&=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のとき，① の右辺は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}\\&=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)\end{aligned}$$

よって，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

教科書 P.41

問6 命題「$4n^3-n$ は 3 の倍数である」を ① とする。

〔1〕$n=1$ のとき

$$4\cdot1^3-1=3$$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち，ある整数 m を用いて

$$4k^3-k=3m$$

と表されると仮定して，$n=k+1$ のとき ① が成り立つことを示す。

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}&4(k+1)^3-(k+1)\\&=4k^3+12k^2+11k+3\\&=3m+k+12k^2+11k+3\\&=3m+3(4k^2+4k+1)\\&=3(m+4k^2+4k+1)\end{aligned}$$

$m+4k^2+4k+1$ は整数であるから，$4(k+1)^3-(k+1)$ は 3 の倍数である。

よって，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

問7 命題「$a_1=3,\ a_{n+1}=4a_n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定められた数列 $\{a_n\}$ のすべての項は 3 の倍数である」を ① とする。

〔1〕$n=1$ のとき

$$a_1=3$$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち，

ある整数 m を用いて

$$a_k = 3m$$

と表されると仮定して，$n = k+1$ のとき ① が成り立つことを示す。

$n = k+1$ のとき

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4a_k + 3 \\ &= 4\cdot 3m + 3 \\ &= 3(4m+1) \end{aligned}$$

$4m+1$ は整数であるから，a_{k+1} は 3 の倍数である。

よって，① は $n = k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

教科書 P.42

問 8 $3^n > 8n$ ……① とする。

〔1〕$n = 3$ のとき

(左辺) $= 3^3 = 27$，(右辺) $= 8\cdot 3 = 24$

よって　(左辺) $>$ (右辺)

ゆえに，① は $n = 3$ のとき成り立つ。

〔2〕$k \geqq 3$ とし ① が $n = k$ のとき成り立つ，すなわち

$$3^k > 8k$$

と仮定して，$n = k+1$ のとき，① が成り立つこと，すなわち $3^{k+1} > 8(k+1)$ を示す。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 3^{k+1} - 8(k+1) \\ &= 3\cdot 3^k - 8k - 8 \\ &> 3\cdot 8k - 8k - 8 \\ &= 2\cdot 8k - 8 \\ &= 8(2k-1) \end{aligned}$$

$k \geqq 3$ であるから　$8(2k-1) > 0$

よって，$3^{k+1} - 8(k+1) > 0$ より

$$3^{k+1} > 8(k+1)$$

となり，① は $n = k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，n が 3 以上の自然数のとき ① が成り立つ。

Challenge チャレンジ 例題 漸化式と数学的帰納法

教科書 P.43

問 1 与えられた条件より

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{4}{5},\ \cdots$$

よって，一般項は　$a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ……①

と推定できる。

この推定が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

〔1〕$n = 1$ のときは，$a_1 = \dfrac{1}{2}$ となり ① は成り立つ。

〔2〕$n = k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$a_k = \frac{k}{k+1}$$

と仮定して，$n = k+1$ のとき ① が成り立つことを示す。

与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{2 - a_k} = \frac{1}{2 - \dfrac{k}{k+1}} \\ &= \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1} \end{aligned}$$

よって，① は $n = k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

したがって，求める一般項は　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{n}{n+1}}$

Training トレーニング

教科書 P.44

17 (1)

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 + 5 = 3\cdot 4 + 5 = 17 \\ a_3 &= 3a_2 + 5 = 3\cdot 17 + 5 = 56 \\ a_4 &= 3a_3 + 5 = 3\cdot 56 + 5 = 173 \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{a_5} = 3a_4 + 5 = 3\cdot 173 + 5 \boldsymbol{= 524}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2\cdot(-1) + 1 = -1 \\ a_3 &= 2a_2 + 2 = 2\cdot(-1) + 2 = 0 \\ a_4 &= 2a_3 + 3 = 2\cdot 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{a_5} = 2a_4 + 4 = 2\cdot 3 + 4 \boldsymbol{= 10}$$

18 (1) 初項 5，公差 3 の等差数列であるから

$$\boldsymbol{a_n} = 5 + (n-1)\cdot 3 = \boldsymbol{3n+2}$$

(2) 初項 9，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n = 9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(3) 初項 -1，公比 -1 の等比数列であるから

$$a_n = (-1)\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^n$$

19 (1) $a_{n+1} - a_n = n(n-1)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $n(n-1)$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1) \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(k^2 - k) \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 3 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\ &\qquad - \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= \frac{1}{6}\{(n-1)n(2n-1) \\ &\qquad -3(n-1)n + 18\} \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 6n^2 + 4n + 18) \\ &= \frac{1}{3}(n^3 - 3n^2 + 2n + 9) \end{aligned}$$

$a_1 = 3$ であるから，

$a_n = \frac{1}{3}(n^3 - 3n^2 + 2n + 9)$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$a_n = \frac{1}{3}(n^3 - 3n^2 + 2n + 9)$

(2) $a_{n+1} - a_n = 2^{n-1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は 2^{n-1}

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 3 + \frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 2^{n-1} + 2 \end{aligned}$$

$a_1 = 3$ であるから，$a_n = 2^{n-1} + 2$ は $n = 1$ のときにも成り立つ。

ゆえに　$a_n = 2^{n-1} + 2$

20 (1) $\alpha = 2\alpha + 3$ の解 $\alpha = -3$ を用いると，与えられた漸化式は

$$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$$

と変形できる。$b_n = a_n + 3$ とおくと

$$b_{n+1} = 2b_n,\quad b_1 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n = 5\cdot 2^{n-1}$$

したがって　$a_n = b_n - 3 = 5\cdot 2^{n-1} - 3$

(2) $2a_{n+1} = -a_n + 6$ より

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 3$$

$\alpha = -\frac{1}{2}\alpha + 3$ の解 $\alpha = 2$ を用いると，与えられた漸化式は

$$a_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}(a_n - 2)$$

と変形できる。$b_n = a_n - 2$ とおくと

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n,\quad b_1 = a_1 - 2 = 9 - 2 = 7$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 7，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n = 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって

$$a_n = b_n + 2 = 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$$

(3) $a_{n+1} + a_n = 2$ より　$a_{n+1} = -a_n + 2$

$\alpha = -\alpha + 2$ の解 $\alpha = 1$ を用いると，与えられた漸化式は

$$a_{n+1} - 1 = -(a_n - 1)$$

と変形できる。$b_n = a_n - 1$ とおくと

$$b_{n+1} = -b_n,\quad b_1 = a_1 - 1 = 5 - 1 = 4$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 4，公比 -1 の等比数列であるから

$$b_n = 4\cdot(-1)^{n-1}$$

したがって

$$a_n = b_n + 1 = 4\cdot(-1)^{n-1} + 1$$

(4) $2a_{n+1} = 5a_n + 3$ より

$$a_{n+1} = \frac{5}{2}a_n + \frac{3}{2}$$

$\alpha = \frac{5}{2}\alpha + \frac{3}{2}$ の解 $\alpha = -1$ を用いると，与えられた漸化式は

$$a_{n+1}+1=\frac{5}{2}(a_n+1)$$

と変形できる。$b_n=a_n+1$ とおくと

$$b_{n+1}=\frac{5}{2}b_n,\quad b_1=4+1=5$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は，初項5，公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n=5\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

したがって

$$a_n=b_n-1=\boldsymbol{5\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1}$$

21 (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ……① とする。

〔1〕$n=1$ のとき

$(左辺)=1^2=1$

$(右辺)=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \quad ⋯⋯②$$

と仮定して，$n=k+1$ のとき ① が成り立つことを示す。

$n=k+1$ のとき，① の左辺を ② を用いて変形すると

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のとき，① の右辺は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

よって，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕，〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(2) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

$=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$ ……① とする。

〔1〕$n=1$ のとき

$(左辺)=1^2=1$

$(右辺)=\frac{1}{3}\cdot1\cdot3\cdot1=1$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1) \quad ⋯⋯②$$

と仮定して，$n=k+1$ のとき ① が成り立つことを示す。

$n=k+1$ のとき，① の左辺を ② を用いて変形すると

$$\begin{aligned}&1^2+3^2+5^2+\cdots\\&\qquad+(2k-1)^2+\{2(k+1)-1\}^2\\&=\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)+(2k+1)^2\\&=\frac{1}{3}(2k+1)\{k(2k-1)+3(2k+1)\}\\&=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)\\&=\frac{1}{3}(k+1)(2k+3)(2k+1)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のとき，① の右辺は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(k+1)\{2(k+1)+1\}\{2(k+1)-1\}\\&=\frac{1}{3}(k+1)(2k+3)(2k+1)\end{aligned}$$

よって，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕，〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

……① とする。

〔1〕$n=1$ のとき

$(左辺)=1^3=1$

$(右辺)=\frac{1}{4}\cdot1^2\cdot2^2=1$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

……②

と仮定して，$n=k+1$ のとき①が成り立つことを示す。

$n=k+1$ のとき，①の左辺を②を用いて変形すると

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$$
$$=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3$$
$$=\frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}$$
$$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

$n=k+1$ のとき，①の右辺は

$$\frac{1}{4}(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2$$
$$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

よって，①は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について①が成り立つ。

22 命題「8^n-7n-1 は 49 の倍数である」を①とする。

〔1〕$n=1$ のとき

$$8^1-7\cdot 1-1=0$$

よって，①は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕$n=k$ のとき①が成り立つ，すなわち，ある整数 m を用いて

$$8^k-7k-1=49m$$

と表されると仮定して，$n=k+1$ のとき①が成り立つことを示す。

$n=k+1$ のとき

$$8^{k+1}-7(k+1)-1$$
$$=8\cdot 8^k-7(k+1)-1$$
$$=8(49m+7k+1)-7(k+1)-1$$
$$=8\cdot 49m+49k$$
$$=49(8m+k)$$

$8m+k$ は整数であるから，

$8^{k+1}-7(k+1)-1$ は 49 の倍数である。

よって，①は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について①が成り立つ。

23 $2^n \geqq n^2$ ……① とする。

〔1〕$n=4$ のとき

$$(\text{左辺})=2^4=16,\ (\text{右辺})=4^2=16$$

よって　(左辺)＝(右辺)

ゆえに，①は $n=4$ のとき成り立つ。

〔2〕$k \geqq 4$ とし①が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち　$2^k \geqq k^2$

と仮定して，$n=k+1$ のとき，①が成り立つこと，すなわち $2^{k+1} \geqq (k+1)^2$ を示す。

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=2^{k+1}-(k+1)^2$$
$$=2\cdot 2^k-k^2-2k-1$$
$$\geqq 2k^2-k^2-2k-1$$
$$=k^2-2k-1$$
$$=(k-1)^2-2$$

$k \geqq 4$ であるから　$(k-1)^2-2>0$

よって，$2^{k+1}-(k+1)^2>0$ より

$$2^{k+1}>(k+1)^2$$

となり，①は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，n が 4 以上の自然数のとき①が成り立つ。

発展　3項間の漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$

教科書 P.45

問 1 (1) 漸化式 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ は，2 次方程式 $x^2=3x-2$ を満たす解 $x=1,\ 2$ を用いて

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n) \quad \cdots\cdots ①$$
$$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n \quad \cdots\cdots ②$$

と変形できる。

①より，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-a_n=2^{n-1}(a_2-a_1)$$
$$=2^{n-1}(3-1)=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

すなわち　$a_{n+1}-a_n=2^n$ ……③

②より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は公比 1 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=1^{n-1}(a_2-2a_1)$$
$$=1^{n-1}(3-2\cdot 1)=1$$

すなわち　$a_{n+1}-2a_n=1$ ……④

③－④より　$\boldsymbol{a_n=2^n-1}$

(2) 漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ は，2 次方程式

$x^2 = x + 6$ を満たす解 $x = -2,\ 3$ を用いて

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) \quad \cdots\cdots ①$$
$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) \quad \cdots\cdots ②$$

と変形できる。

① より，数列 $\{a_{n+1} + 2a_n\}$ は公比 3 の等比数列であるから

$$a_{n+1} + 2a_n = 3^{n-1}(a_2 + 2a_1)$$
$$= 3^{n-1}(1 + 2\cdot 2) = 5\cdot 3^{n-1}$$

すなわち　$a_{n+1} + 2a_n = 5\cdot 3^{n-1}$ …… ③

② より，数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は公比 -2 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 3a_n = (-2)^{n-1}(a_2 - 3a_1)$$
$$= (-2)^{n-1}(1 - 3\cdot 2)$$
$$= -5\cdot(-2)^{n-1}$$

すなわち

$$a_{n+1} - 3a_n = -5\cdot(-2)^{n-1} \quad \cdots\cdots ④$$

③－④ より　$5a_n = 5\{3^{n-1} + (-2)^{n-1}\}$

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = 3^{n-1} + (-2)^{n-1}}$

［Level Up（レベルアップ）］

教科書 P.46

1　(1)　初項 3，末項 99，項数 33 の等差数列の和を求めればよいから

$$\frac{1}{2}\cdot 33\cdot(3 + 99) = \mathbf{1683}$$

(2)　3 でも 4 でも割り切れる数は，12 で割り切れる数である。よって，初項 12，末項 96，項数 8 の等差数列の和を求めればよいから

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot(12 + 96) = \mathbf{432}$$

(3)　3 または 4 で割り切れる数の和は

(3 で割り切れる数の和)
＋(4 で割り切れる数の和)
－(12 で割り切れる数の和)

で求められる。

4 で割り切れる数の和は，初項 4，末項 100，項数 25 の等差数列の和を求めればよいから

$$\frac{1}{2}\cdot 25\cdot(4 + 100) = 1300$$

よって，3 または 4 で割り切れる数の和は

$$1683 + 1300 - 432 = \mathbf{2551}$$

(4)　求める数の和は，(1) の和から (2) の和を引けばよい。

したがって　$1683 - 432 = \mathbf{1251}$

2　(1)　$a_1 = 3$，$a_2 = 9$，数列 $\{a_n\}$ は等差数列であるから，公差は

$$9 - 3 = 6$$

よって，**初項 3，公差 6**

別解

数列 1，3，5，7，9，・・・，999 は初項 1，公差 2 の等差数列。

数列 3，6，9，12，15，・・・，999 は初項 3，公差 3 の等差数列。

このとき，2 つの数列に共通に含まれる数を小さい方から順に並べてできる数列 $\{a_n\}$ は，初項が 3，公差が 2 つの等差数列の公差 2 と 3 の最小公倍数 6 である等差数列となる。

(2)　初項 3，公差 6，末項 999 の等差数列の項数 n は

$$999 = 3 + (n-1)\cdot 6$$
$$n = 167$$

よって，数列 $\{a_n\}$ の項の総和は

$$\frac{1}{2}\cdot 167\cdot(3 + 999) = \mathbf{83667}$$

3　(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$a_n = -100 + (n-1)\cdot 6 = 6n - 106$$

$a_n > 0$ となるとき，$6n - 106 > 0$ であるから

$$n > \frac{106}{6} = 17.66\cdots$$

n は自然数であるから　$n \geqq 18$

よって，**第 18 項** で初めて正の項が現れる。

(2)　(1) より初項から第 17 項までが負の項であるから，初項から第 17 項までの和 S_{17} が最小値となる。

$$S_{17} = \frac{1}{2}\cdot 17\cdot\{2\cdot(-100) + (17-1)\cdot 6\}$$
$$= -884$$

より，最小値 $\mathbf{-884}$，$\boldsymbol{n = 17}$

4　この数列の第 k 項は

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2k$$

で，初項 2，末項 $2k$，項数 k の等差数列の和 $\dfrac{1}{2}k(2 + 2k)$ と表される。よって

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}k(2+2k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$$

5 この数列の第 k 項は $k\{n-(k-1)\}$ と表されるから，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}k\{n-(k-1)\} = \sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$$
$$= -\sum_{k=1}^{n}k^2 + (n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$
$$= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$$

6 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}$$
$$= \frac{1\cdot(10^n-1)}{10-1} = \boldsymbol{\frac{1}{9}(10^n-1)}$$

また，求める和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k-1)$$
$$= \frac{1}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k - \sum_{k=1}^{n}1\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)}$$

7 $$\boldsymbol{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$
$$= \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{k(k+1)(k+2)}}$$

求める和を S_n とすると

$$2S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$= \left(\frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{2\cdot3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot3} - \frac{1}{3\cdot4}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{3\cdot4} - \frac{1}{4\cdot5}\right) + \cdots$$
$$+ \left\{\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

教科書 P.47

8 この数列を，次のような群に分ける。

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ \Big|\ \frac{1}{6},\ \cdots$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

すなわち，第 k 群は $(k+1)$ 個の項を含み

分母は　$k+2$

分子は　$1,\ 2,\ \cdots,\ k+1$

である。

(1) $\frac{1}{17}$ は，第 15 群の 1 番目の項である。

第 1 群から第 14 群までの項数の和は

$$2+3+4+\cdots+15$$
$$= \frac{1}{2}\cdot15\cdot(1+15)-1 = 119$$

よって，$\frac{1}{17}$ はこの数列の **第 120 項** である。

(2) 第 1 群から第 $(n-1)$ 群までの項数の和は

$$2+3+4+\cdots+n$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1)-1 = \frac{1}{2}(n^2+n-2)$$

第 1 群から第 n 群までの項数の和は

$$2+3+4+\cdots+(n+1)$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1 = \frac{1}{2}(n^2+3n)$$

よって，第 200 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}(n^2+n-2) < 200 \leqq \frac{1}{2}(n^2+3n)$$
$$(n+2)(n-1) < 400 \leqq n(n+3)$$
$$(19+2)(19-1) = 378$$
$$19(19+3) = 418$$

より　$n = 19$

すなわち，第 200 項は第 19 群に含まれる。

ゆえに，第 200 項の分母は 21 である。

また，第 1 群から第 18 群までの項数の和は

$$\frac{1}{2}(18^2+3\cdot 18)=189$$

$200-189=11$ より，第 200 項の分子は 11 である。

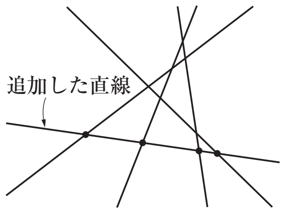
ゆえに，第 200 項は $\boldsymbol{\frac{11}{21}}$ である。

9 (1) まず，$n=1$ のとき，交点の数は 0 であるから

$$a_1=0$$

問題の条件を満たす n 本の直線に加えて，さらに $(n+1)$ 本目の直線を引く。この $(n+1)$ 本目の直線は，もとからある n 本の直線それぞれと交わるので，交点の数は n 個だけ増加する。

したがって　$\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+n}$



($n=4$ のとき)

(2) $a_{n+1}-a_n=n$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

であるから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は　n

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=0+\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{2}n(n-1)$$

$a_1=0$ であるから，$a_n=\frac{1}{2}n(n-1)$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}n(n-1)}$

10 (1) $a_{n+1}=5a_n+2\cdot 3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n}+\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ①$$

$b_n=\frac{a_n}{3^n}$ より　$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$

これらを ① に代入して

$$\boldsymbol{b_{n+1}=\frac{5}{3}b_n+\frac{2}{3}}$$

(2) $\alpha=\frac{5}{3}\alpha+\frac{2}{3}$ の解 $\alpha=-1$ を用いると

$b_{n+1}=\frac{5}{3}b_n+\frac{2}{3}$ は

$$b_{n+1}+1=\frac{5}{3}(b_n+1)$$

と変形できる。$c_n=b_n+1$ とおくと

$$c_{n+1}=\frac{5}{3}c_n$$

$$c_1=b_1+1=1+1=2$$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 2，公比 $\frac{5}{3}$ の等比数列であるから　$c_n=2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

よって　$b_n=c_n-1=2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}-1$

したがって

$$\boldsymbol{a_n}=3^nb_n=3^n\left\{2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}-1\right\}$$

$$\boldsymbol{=6\cdot 5^{n-1}-3^n}$$

11 (1) $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$ であるから，ある n について $a_{n+1}=0$ であるとすると

$$a_n=0$$

これをくり返すと，$a_1=0$ となり，$a_1=5$ に反する。

よって，すべての n に対して，$a_n \neq 0$ となる。

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$ より

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}=\frac{3}{a_n}+2 \quad \cdots\cdots ①$$

$b_n=\frac{1}{a_n}$ より　$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}$

これらを ① に代入して　$\boldsymbol{b_{n+1}=3b_n+2}$

(2) $\alpha=3\alpha+2$ の解 $\alpha=-1$ を用いると

$b_{n+1}=3b_n+2$ は

$$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$$

と変形できる。$c_n=b_n+1$ とおくと

$$c_{n+1}=3c_n$$

$$c_1=b_1+1=\frac{1}{5}+1=\frac{6}{5}$$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $\frac{6}{5}$，公比 3 の等比数列であるから

$$c_n=\frac{6}{5}\cdot 3^{n-1}=\frac{2}{5}\cdot 3^n$$

よって

$$b_n=c_n-1=\frac{2}{5}\cdot 3^n-1=\frac{2\cdot 3^n-5}{5}$$

したがって　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{5}{2\cdot 3^n-5}}$

12 与えられた不等式を ① とする。

〔1〕$n=2$ のとき

$$(\text{左辺})=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$$

$$(\text{右辺})=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

よって　(左辺) < (右辺)

ゆえに，① は $n=2$ のとき成り立つ。

〔2〕$k\geqq 2$ とし ① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

と仮定して，$n=k+1$ のとき，① が成り立つこと，すなわち

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

を示す。

$$\begin{aligned}&(\text{左辺})-(\text{右辺})\\&=\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)\\&<\left\{\left(2-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\\&=-\frac{1}{k(k+1)^2}\end{aligned}$$

$k\geqq 2$ であるから　$-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$

よって

$$\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)<0$$

より

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

となり，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕，〔2〕より，n が 2 以上の自然数のとき ① が成り立つ。

別解　$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\&<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\&=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}\end{aligned}$$

13 (1) 与えられた条件より

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=9,\ a_4=16,\ \cdots$$

となり，一般項は

$$\boldsymbol{a_n=n^2} \quad \cdots\cdots ①$$

となると推定できる。

(2) 〔1〕$n=1$ のときは，$a_1=1$ となり ① は成り立つ。

〔2〕$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$\begin{aligned}a_k&=1+2+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+2+1\\&=k^2\end{aligned}$$

と仮定して，$n=k+1$ のとき，① が成り立つことを示す。

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=1+2+\cdots+(k-1)+k+(k+1)+k+(k-1)+\cdots+2+1\\&=\{1+2+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+2+1\}+(k+1)+k\\&=k^2+(k+1)+k\\&=k^2+2k+1\\&=(k+1)^2\end{aligned}$$

よって，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕，〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。すなわち，一般項が $a_n=n^2$ であることが証明された。