3章・1節　確率分布

組	番号	名　　前

①　確率変数と確率分布
②　確率変数の平均と分散

1　次の$\boxed{}$をうめよ。知

(1)　試行の結果によって値が定まる変数を$\boxed{\text{確率変数}}$という。確率変数 X のとる値にその値をとる確率を対応させたものを，この確率変数の$\boxed{\text{確率分布}}$，または単に$\boxed{\text{分布}}$といい，確率変数 X は，この分布に$\boxed{\text{従う}}$という。

(2)　確率変数X が下の表の確率分布に従うとき

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

を確率変数 X の$\boxed{\text{平均}}$または$\boxed{\text{期待値}}$といい，記号$\boxed{E(X)}$で表す。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

(3)　確率変数 X に対して，X の平均を m とするとき，$X-m$ を X の平均からの$\boxed{\text{偏差}}$という。

確率変数 X のとる値を x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 確率 $P(X=x_i)$ を p_i，X の平均を m とするとき

$$(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

を確率変数 X の$\boxed{\text{分散}}$といい，記号$\boxed{V(X)}$で表す。

分散は X の平均 m からの偏差の 2 乗 $(X-m)^2$ の平均であるから，次のように表される。

$$V(X)=E\left(\boxed{(X-m)^2}\right)=E\left(\boxed{X^2}\right)-\boxed{m^2}$$

分散 $V(X)$ の正の平方根 $\sqrt{V(X)}$ を X の$\boxed{\text{標準偏差}}$といい，記号$\boxed{\sigma(X)}$で表す。

確率変数 $aX+b$ の平均と分散，標準偏差は次のようになる。

$$E(aX+b)=\boxed{aE(X)+b}$$
$$V(aX+b)=\boxed{a^2V(X)}$$
$$\sigma(aX+b)=\boxed{|a|\sigma(X)}$$

2　2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の和をX とすると，X は確率変数である。このとき，次の確率を求めよ。技

(1)　$P(X=2)$

［解］　2 個のさいころの目の出方は　　$6\times6=36$（通り）

また，2 個のさいころの目を $(a,\ b)$ とすると，$X=2$ となるのは $(1,\ 1)$ の 1 通りであるから

$$P(X=2)=\mathbf{\frac{1}{36}}$$

(2)　$P(X\leqq4)$

［解］　$X\leqq4$ となるのは

$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$

の 6 通りであるから

$$P(X\leqq4)=\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

3　赤球 4 個と白球 3 個が入っている袋から同時に 3 個の球を取り出すとき，その中に含まれている赤球の個数 X の確率分布を求めよ。技

［解］　X は 0，1，2，3 の値をとる確率変数である。

$X=0$ は 3 個とも白球である事象

$X=1$ は赤球が 1 個，白球が 2 個である事象

$X=2$ は赤球が 2 個，白球が 1 個である事象

$X=3$ は 3 個とも赤球である事象

を表す。

したがって，それぞれの確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35},\qquad P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{12}{35},$$
$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{18}{35},\qquad P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$$

となり，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

4　1，2，3，4 の数を 1 つずつ書いたカードが 4 枚ある。ここから同時に 2 枚引き，小さい方の数を X とする。確率変数 X の確率分布，平均，分散および標準偏差を求めよ。技

［解］　X のとる値は　1，2，3 であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(X=1)=\frac{1\times3}{{}_4C_2}=\frac{1}{2},\qquad P(X=2)=\frac{1\times2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3},$$
$$P(X=3)=\frac{1\times1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$$

よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

したがって，X の平均，分散および標準偏差は次のようになる。

$$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{5}{3}}$$
$$V(X)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{5}{9}}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

5　1 個のさいころを 2 回投げるとき，3 の倍数の目が出る回数 X の平均，分散および標準偏差を求めよ。また，$3X+2$ の平均と分散を求めよ。技

［解］　X のとる値は　0，1，2 であり，X の確率分布は次のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

したがって，X の平均，分散および標準偏差は次のようになる。

$$E(X)=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$
$$V(X)=0^2\times\frac{4}{9}+1^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{1}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{4}{9}}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

また，$3X+2$ の平均と分散は

$$E(3X+2)=3E(X)+2=4$$
$$V(3X+2)=3^2V(X)=4$$