1節 確率分布

1 事象の独立と従属

確率

（教科書 p.116）

数学 A で学んだように，全事象を U，事象 A が起こる場合の数を $n(A)$ で表し，すべての根元事象の確率が等しいとする。このとき，事象 A が起こる確率 $P(A)$ は

（① ）

と表される。

例 1 1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，2 つの目の和が 5 である事象を A，2 つの目の積が 4 である事象を B とする。
ここで，1 回目に 3 が出て 2 回目に 5 が出る場合を (3, 5) のように表すことにすれば，事象 A，B，$A \cap B$ は，集合を用いてそれぞれ

$$A = \{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$$
$$B = \{(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)\}$$
$$A \cap B = \{(1,\ 4),\ (4,\ 1)\}$$

と表される。
したがって，これらの事象の確率は次のようになる。

$P(A) =$ ，$P(B) =$ ，$P(A \cap B) =$

問1 例 1 において，2 つの目の積が 6 である事象を C とするとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(C)$

(2) $P(A \cap C)$

条件つき確率

（教科書 p.117）

数学 A で学んだように，事象 A が起こったときの事象 B の起こる条件つき確率 $P_A(B)$ は

（② ）……①

と表される。

例 2 ある地域の子どもにアンケート調査をしたところ，サッカーが好きな子どもは 75%，野球が好きな子どもは 65%，どちらも好きな子どもは 45% であった。
サッカーが好きな子どもの中から 1 人を選び出すとき，その子どもが野球も好きである確率を求めてみよう。
選び出した子どもが，サッカーが好きである事象を A，野球が好きである事象を B とすると，求める確率は $P_A(B)$ である。
ここで

$$P(A) = \frac{75}{100},\quad P(A \cap B) = \frac{45}{100}$$

であり，これらを①に代入すると

問2 例 2 において，野球が好きな子どもの中から 1 人を選び出したとき，その子どもがサッカーも好きである確率を求めよ。

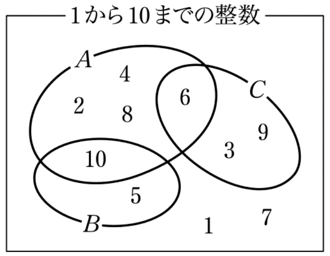
条件つき確率の式①から，次の確率の（③ ）が得られる。

確率の乗法定理
$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)}$

事象の独立と従属

（教科書 p.118）

例 3 1 から 10 までの数字を 1 つずつ書いた 10 枚のカードがある。
この中から 1 枚のカードを引くとき
2 の倍数が書かれたカードを引く事象を A
5 の倍数が書かれたカードを引く事象を B
3 の倍数が書かれたカードを引く事象を C
とする。



このとき，$P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，$P_A(B)=\frac{1}{5}$ であるから

……①

これに対して，$P(C)=\frac{3}{10}$，$P_A(C)=\frac{1}{5}$ であるから

……②

一般に，2 つの事象 A, B があって

$$P_A(B)=P(B),\quad P_B(A)=P(A)$$

の 2 つの式がともに成り立つとき，A と B は（④　　　　　）であるという。

A と B が独立でないとき，A と B は（⑤　　　　　）であるという。

問3 2 つの式 $P_A(B)=P(B)$, $P_B(A)=P(A)$ のうち一方が成り立てば他方の式も成り立つことを，確率の乗法定理を用いて証明せよ。

事象の独立
2 つの事象 A と B について $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が独立である $\iff$ $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$

例題 1 1 個のさいころを投げるとき，偶数の目が出る事象を A, 3 の倍数の目が出る事象を B, 4 以上の目が出る事象を C とする。このとき，A と B, A と C はそれぞれ独立であるか，従属であるかを答えよ。

解

問4 例題 1 で，事象 B と C は独立であるか従属であるかを答えよ。

問5 次の事象 A と B は独立であるか従属であるかを答えよ。

(1)　ジョーカーを含まない 52 枚のトランプから 1 枚のカードを引くとき，そのカードがハートである事象を A，絵札である事象を B とする。

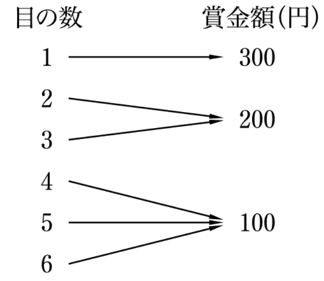
(2)　1 枚の硬貨を 2 回投げるとき，少なくとも 1 回は表が出る事象を A，1 回だけ表が出る事象を B とする。

2 確率変数と確率分布

確率変数

（教科書 p.120）

1 個のさいころを投げて，1 の目が出るときは 300 円，2 または 3 の目が出るときは 200 円，4 以上の目が出るときは 100 円の賞金が与えられるとする。このとき



300 円の賞金が与えられる確率は $\frac{1}{6}$,

200 円の賞金が与えられる確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

100 円の賞金が与えられる確率は $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

である。さいころを投げた結果として与えられる賞金を X 円とすると，X は 100，200，300 のどれかの値をとる変数であり，X がどの値をとるかは試行の結果によって定まる。

一般に，試行の結果によってその値が定まる変数を（⑥　　　　　　　　　　）という。

問6 上の X に対して，$X \geqq 200$ となる確率 $P(X \geqq 200)$ を求めよ。

問7 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とする。
次の確率を求めよ。

(1)　$P(X=3)$

(2)　$P(2 \leqq X \leqq 5)$

(3)　$P(X^2 \geqq 20)$

確率分布

（教科書 p.121）

前ページの賞金額を表す確率変数 X に対して，X のとり得る値とそれに対応する確率を表で示すと，右のようになる。

X	100	200	300	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

確率変数のとり得る値と，その値をとる確率との対応を示したものを，その確率変数の（⑦　　　　　　　　）または単に（⑧　　　　　　　）といい，確率変数 X はこの分布に（⑨　　　　　　　）という。

一般に，確率変数 X のとり得る値が x_1，x_2，…，x_n であるとき，$P(X = x_i) = p_i$ とすると，次のことが成り立つ。

1. $p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,\ \cdots,\ p_n \geqq 0$
2. $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

また，このときの X の確率分布は右の表で示される。

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

例題 2　白球 4 個と黒球 3 個が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出すとき，その中に含まれている白球の個数 X の確率分布を求めよ。

解

問8　例題 2 で，取り出される球の中に含まれる黒球の個数 Y の確率分布を求めよ。

3 確率変数の平均と分散

確率変数の平均

（教科書 p.122）

一般に，確率変数 X のとる値が x_1，x_2，$\cdots$，x_n で，X がそれぞれの値をとる確率が p_1，p_2，$\cdots$，p_n のとき

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

（⑩　　　　　　　　　　　　）

を確率変数 X の（⑪　　　　）または（⑫　　　　）といい，（⑬　　　　）で表す。

確率変数の平均

$$\boldsymbol{E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n}$$

例 4 1個のさいころを投げるときに出る目の数を X とするとき，X の平均を求めてみよう。
確率分布は右の表のようになるから，X の平均は次のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

問9 3 枚の 100 円硬貨を同時に投げるとき，表の出る枚数を X とする。X の平均を求めよ。

例題 3　2 本の当たりくじを含む 10 本のくじがある。この中から同時に 3 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数 X の平均を求めよ。

解

問 10　赤球 2 個，白球 6 個が入っている袋がある。この中から同時に 4 個の球を取り出すとき，その中に含まれる赤球の個数 X の平均を求めよ。

例題 4　0 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 5 枚のカードがある。この中から同時に 2 枚のカードを取り出すとき，取り出したカードに書かれている数字の大きい方から小さい方を引いた値を X とする。
このとき， X の平均を求めよ。

解

問 11　2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の大きい方の値 X の平均を求めよ。
ただし，同じ目のときはその目の数を X の値とする。

確率変数 $aX+b$ と X^2 の平均

（教科書 p.124）

$\boldsymbol{aX+b}$ の平均
$a,\ b$ を定数とするとき　　$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b}$

例 5 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X で表すと，123 ページの例 4 より$E(X)=\frac{7}{2}$であるから，確率変数 $4X+1$ の平均は

問 12 例 5 の X に対して，次の確率変数の平均を求めよ。

(1)　$X+4$

(2)　$-X$

(3)　$5X-1$

確率変数 X に対して，X の平均を m とするとき，確率変数 $X-m$ を X の平均からの
（⑭　　　　　）という。

例 6 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とすると

問 13 例 6 の X に対して，次の確率変数の平均を求めよ。

(1)　$3X^2$

(2)　$2X^2-1$

確率変数の分散・標準偏差

（教科書 p.126）

X および Y は，それぞれ次の確率分布に従う確率変数とする。

X	-2	-1	0	1	2	計
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	1

Y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	計
P	0.05	0.1	0.1	0.15	0.2	0.15	0.1	0.1	0.15	1

確率変数 X のとる値を $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ とし，確率 $P(X=x_i)$ を p_i，X の平均を m とするとき

$$(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

を確率変数 X の（⑮　　　　　）といい，（⑯　　　　　）で表す。

すなわち

（⑰　　　　　　　　　　　　）

分散は X の平均 m からの偏差の 2 乗 $(X-m)^2$ の平均であるから，次のように表される。

確率変数の分散
$\boldsymbol{V(X)=E((X-m)^2)}$

例 7 前ページの確率変数 X と Y の分散を求め，比較してみよう。

$E(X)=E(Y)=0$ であるから

よって，（　　　　　　　　　　）が成り立つことがわかる。

これは，（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

ことを示している。

分散の計算
$$V(X)=E(X^2)-m^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

確率変数 X の分散 $V(X)$ の正の平方根を X の（⑱　　　　　　　　）といい，

（⑲　　　　　　）

で表す。すなわち

（⑳　　　　　　　　　　）

例 8 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X として，X の分散と標準偏差を求めてみよう。

123 ページの例 4 と 125 ページの例 6 より X の分散は

X の標準偏差は

問 14 硬貨を 3 回投げるとき，表が出る回数 X の標準偏差を求めよ。

例題 5 1，2，3 の番号を 1 つずつ記入した 3 枚の封筒と 3 枚のカードがある。このカードを 1 枚ずつ封筒に入れるとき，カードの番号とそれを入れた封筒の番号が一致するカードの枚数 X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

解

問 15 例題 5 において，封筒とカードをそれぞれ 1 枚ずつ増やして 1，2，3，4 の番号を 1 つずつ記入するとき，X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

確率変数$aX+b$の分散と標準偏差

（教科書 p.129）

一般に，確率変数 $aX+b$ の平均と分散，標準偏差は次のようになる。

$aX+b$ の平均と分散・標準偏差

$$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b,\qquad V(aX+b)=a^2V(X),}$$
$$\boldsymbol{\sigma(aX+b)=|\,a\,|\sigma(X)}$$

例 9 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とするとき，前ページの例 8 より $V(X)=\frac{35}{12}$，

$\sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}$ であるから，確率変数 $4X+5$ の分散と標準偏差は，次のようになる。

注意　$\sigma(4X+5)$ は $\sqrt{V(4X+5)}=\sqrt{\frac{140}{3}}$ としても求めることができる。

問 16 例 9 の X について，次の確率変数の分散と標準偏差を求めよ。

（1）　$3X+1$

（2）　$-X$

（3）　$-6X+5$

4 確率変数の和と積

確率変数の和の平均

（教科書 p.130）

一般に，2 つの確率変数 X，Y の和について，次の等式が成り立つ。

確率変数の和の平均
$\boldsymbol{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$

例 10 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X，Y とする。このとき，出る目の数の和 $X+Y$ の平均は

である。同様に， 3 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数を X，Y，Z とすると，出る目の数の和 $X+Y+Z$ の平均は

である。

問 17 1，2，3 の数字を 1 つずつ書いた札がそれぞれ 1 枚，2 枚，3 枚ある。この 6 枚の札から 1 枚引き，書かれている数字を記録してもとに戻す。これを 3 回くり返すとき，引く札に書かれた数の和の平均を求めよ。

独立な確率変数

（教科書 p.131）

　一般に，2 つの確率変数 X，Y について，X のとる任意の値 x_i と Y のとる任意の値 y_j について

（㉑　　　　　　　　　　　　　　）

が成り立つとき，確率変数 X，Y は（㉒　　　　　）であるという。

例 11 2 つの確率変数 X，Yのとる値と X,Y の値の組に対する確率が右の表で与えられている。たとえば，$X=2$，$Y=2$ となる確率は

X ＼ Y	1	2	計
2	0.28	0.42	0.7
4	0.12	0.18	0.3
計	0.4	0.6	1

一方　$P(X=2)\cdot P(Y=2)=0.7\cdot 0.6=0.42$

であるから

が成り立つ。X，Y の他の値のすべての組の確率に対しても同様な式が成り立つから，

（　　　　　　　　　　）であることがわかる。

独立な確率変数の積の平均と和の分散

（教科書 p.132）

独立な確率変数の積の平均
確率変数 X，Y が独立であるとき　$\boldsymbol{E(XY)=E(X)\cdot E(Y)}$

例 12 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の積の平均を求めてみよう。

それぞれのさいころの出る目の数を X，Y とする。X，Y の平均は $E(X)=E(Y)=\frac{7}{2}$ であり，それぞれのさいころを投げる試行は独立であるから，出る目の数の積の平均は次のようになる。

問 18 2 つの袋 A，B があり，袋 A には 1，3，5，7，9 の数字を 1 つずつ書いた札が 5 枚入っており，袋 B には 2，4，6，8 の数字を 1 つずつ書いた札が 4 枚入っている。2 つの袋から 1 枚ずつ札を取り出すとき，2 枚の札に書かれた数の積の平均を求めよ。

独立な確率変数の和の分散
確率変数 X，Y が独立であるとき $\boldsymbol{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$

例 13 2 個のさいころを同時に投げるとき，それぞれのさいころの出る目の数を X，Y とする。X と Y は独立であり，128 ページの例 8 より $V(X)=V(Y)=\frac{35}{12}$ であるから，$X+Y$ の分散，標準偏差は次のようになる。

問19 1 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げる試行で，硬貨の表が出るとき 1，裏が出るとき 0 を対応させる確率変数を X，さいころの出る目の数を Y とする。このとき，確率変数 $X+Y$ の分散と標準偏差を求めよ。

独立な確率変数 X，Y，Z に対して，次のことが成り立つ。

(㉔　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

(㉕　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

問20 1 個のさいころを 3 回投げるとき，出る目の数の積の平均を求めよ。また，出る目の数の和の分散を求めよ。

5 二項分布

（教科書 p.135）

一般に，ある試行で事象 A が起こる確率を p とし，A が起こらない確率を $q=1-p$ とおく。この試行を n 回くり返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすると X は確率変数であり，そのとる値は 0 から n までの整数である。また，$X=r$ となる確率は

$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

である。したがって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	$\cdots$	r	$\cdots$	r	計
P	${}_n\mathrm{C}_0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n p^n$	1

確率変数 X の確率分布が上の表のようになるとき，この確率分布を確率 p に対する次数 n の（㉖　　　　　　　　）といい，（㉗　　　　　　　　）で表す。

例 14 1 個のさいころを 5 回くり返し投げるとき，1 の目が出る回数を X とすると，確率変数 X は二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。

したがって，$X=r$ となる確率は

$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{1250}{7776}$	$\frac{250}{7776}$	$\frac{25}{7776}$	$\frac{1}{7776}$	1

問 21 次の二項分布に従う確率変数に対して，それぞれの二項分布 $B(n,\ p)$ における $n,\ p$ の値を求めよ。

(1)　1 枚の硬貨を 10 回投げるとき，表の出る回数 X

(2)　2 個のさいころを同時に投げる試行を 8 回くり返すとき，2 個とも 6 の目が出る回数 Y

問 22 確率変数 X が二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$ に従うとき，$X=3$ となる確率を求めよ。

例題 6 1 個のさいころを 4 回投げるとき，1 の目が出る回数が 2 回以下である確率を求めよ。

解

問 23 1 枚の硬貨を 5 回投げるとき，表が 3 回以上出る確率を求めよ。

二項分布の平均と分散

（教科書 p.137）

一般に，二項分布 $B(n,\ p)$ に対して，次のことが成り立つ。

二項分布の平均と分散
確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき $\boldsymbol{E(X)=np}$ $\boldsymbol{V(X)=npq}$　　ただし，$q=1-p$

例 15 確率変数 X が二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$ に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めてみよう。

$$E(X)=5\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$V(X)=5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$$

問 24 確率変数 X が次の二項分布に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

（1）　$B\left(30,\ \frac{1}{6}\right)$

⑵　$B\left(50,\ \frac{1}{2}\right)$

⑶　$B(100,\ 0.36)$

例題 7 赤球 3 個と黒球 1 個が入っている袋から 1 個の球を取り出し，色を調べてから袋に戻す。これを 100 回くり返すとき，赤球を取り出す回数 X の平均と標準偏差を求めよ。

解

問25 AとBの2人が20回続けて試合を行う。Aの勝つ確率は$\frac{2}{3}$でAの勝つ回数をXとする。Xの平均と標準偏差を求めよ。
ただし，引き分けはないものとする。

問 題

（教科書 p.139）

1　a，b，c，d，e の 5 人が 1 列に並ぶとき，a，b が隣り合う事象を F，a が端にくる事象をG とする。このとき，2 つの事象 F と G は独立であるか従属であるかを答えよ。

2　1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚の札の中から同時に 2 枚の札を引くとき，書かれた大きい方の数字を X とする。X の平均と標準偏差を求めよ。

3 赤球 2 個と白球 4 個が入った袋から同時に 2 個の球を取り出すことをくり返す。ただし，取り出した球はもとに戻さないものとする。ここで，取り出した 2 個の球の中に，初めて赤球が含まれるまでくり返す回数を X とする。X の平均と標準偏差を求めよ。

4 1 個のさいころと 1 枚の硬貨を投げる。硬貨の表が出ればさいころの目の数の 3 倍を得点とし，裏が出ればさいころの目の数を得点とする。
このときの得点の平均を求めよ。

5 1 枚の硬貨を投げるとき，表が出れば得点は 10 点とし，裏が出れば得点は -5 点とする。これを 20 回くり返すとき，得られる得点の平均と標準偏差を求めよ。

6 原点 O から出発して数直線上を動く点 P がある。1 個のさいころを投げて，4 以下の目が出れば P は $+2$ だけ進み，5 以上の目が出れば P は -1 だけ進むという。さいころを 6 回投げたときの点 P の座標を X とするとき，次の問に答えよ。

(1)　$X > 0$ となる確率を求めよ。

(2)　X の平均と分散を求めよ。

1節 確率分布

1 事象の独立と従属

確率

（教科書 p.116）

数学 A で学んだように，全事象を U，事象 A が起こる場合の数を $n(A)$ で表し，すべての根元事象の確率が等しいとする。このとき，事象 A が起こる確率 $P(A)$ は

（① $P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}$ ）

と表される。

例 1 1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，2 つの目の和が 5 である事象を A，2 つの目の積が 4 である事象を B とする。

ここで，1 回目に 3 が出て 2 回目に 5 が出る場合を (3, 5) のように表すことにすれば，事象 A，B，$A\cap B$ は，集合を用いてそれぞれ

$$A=\{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$$
$$B=\{(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)\}$$
$$A\cap B=\{(1,\ 4),\ (4,\ 1)\}$$

と表される。

したがって，これらの事象の確率は次のようになる。

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\quad P(B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12},\quad P(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

問1 例 1 において，2 つの目の積が 6 である事象を C とするとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(C)$

$C=\{(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)\}$

と表されるから

$$P(C)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

(2) $P(A\cap C)$

$A\cap C=\{(2,\ 3),\ (3,\ 2)\}$

と表されるから

$$P(A\cap C)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

条件つき確率

（教科書 p.117）

数学 A で学んだように，事象 A が起こったときの事象 B の起こる条件つき確率 $P_A(B)$ は

（② $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ ） ……①

と表される。

例 2 ある地域の子どもにアンケート調査をしたところ，サッカーが好きな子どもは 75%，野球が好きな子どもは 65%，どちらも好きな子どもは 45% であった。

サッカーが好きな子どもの中から 1 人を選び出すとき，その子どもが野球も好きである確率を求めてみよう。

選び出した子どもが，サッカーが好きである事象を A，野球が好きである事象を B とすると，求める確率は $P_A(B)$ である。

ここで

$$P(A)=\frac{75}{100},\quad P(A\cap B)=\frac{45}{100}$$

であり，これらを①に代入すると

$$P_A(B)=\frac{45}{100}\div\frac{75}{100}=\frac{3}{5}$$

問2 例 2 において，野球が好きな子どもの中から 1 人を選び出したとき，その子どもがサッカーも好きである確率を求めよ。

$$P(B)=\frac{65}{100},\quad P(A\cap B)=\frac{45}{100}$$

であるから

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{45}{100}\div\frac{65}{100}=\frac{45}{65}$$
$$=\frac{9}{13}$$

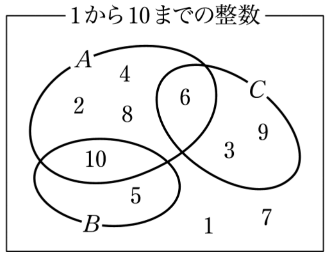
条件つき確率の式①から，次の確率の（③ 乗法定理 ）が得られる。

確率の乗法定理
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$

事象の独立と従属

（教科書 p.118）

例 3 1 から 10 までの数字を 1 つずつ書いた 10 枚のカードがある。
この中から 1 枚のカードを引くとき
2 の倍数が書かれたカードを引く事象を A
5 の倍数が書かれたカードを引く事象を B
3 の倍数が書かれたカードを引く事象を C
とする。



このとき，$P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，$P_A(B)=\frac{1}{5}$ であるから

$P_A(B)=P(B)$ ……①

これに対して，$P(C)=\frac{3}{10}$，$P_A(C)=\frac{1}{5}$であるから

$P_A(C)\neq P(C)$ ……②

一般に，2 つの事象 A, B があって

$P_A(B)=P(B)$,　$P_B(A)=P(A)$

の 2 つの式がともに成り立つとき，A と B は（④　独立　）であるという。
A と B が独立でないとき，A と B は（⑤　従属　）であるという。

問3 2 つの式 $P_A(B)=P(B)$, $P_B(A)=P(A)$ のうち一方が成り立てば他方の式も成り立つことを，確率の乗法定理を用いて証明せよ。

$P_A(B)=P(B)$　ならば　$P_B(A)=P(A)$
が成り立つことを示す。
乗法定理により

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$
$\quad\quad\quad\;=P(B)\cdot P_B(A)$

仮定より，$P_A(B)=P(B)$ が成り立つから

$P(A)\cdot P(B)=P(B)\cdot P_B(A)$

$P(B)\neq 0$ より　$P_B(A)=P(A)$
逆も同様である。

事象の独立
2 つの事象 A と B について **A と B が独立である** $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$

例題 1 1 個のさいころを投げるとき，偶数の目が出る事象を A, 3 の倍数の目が出る事象をB, 4 以上の目が出る事象を C とする。このとき，A と B, A と C はそれぞれ独立であるか，従属であるかを答えよ。

解 事象 A, B, C のそれぞれの確率は

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

であり，また，積事象 $A\cap B$, $A\cap C$ のそれぞれの確率は

$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$，$P(A\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

であるから

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$，$P(A\cap C)\neq P(A)\cdot P(C)$

したがって，A と B は独立であり，A と C は従属である。

問4 例題 1 で，事象 B と C は独立であるか従属であるかを答えよ。

$B\cap C=\{6\}$より　$P(B\cap C)=\frac{1}{6}$

一方，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{2}$であるから

$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$

よって，B と C は独立である。

問5 次の事象 A と B は独立であるか従属であるかを答えよ。

(1) ジョーカーを含まない 52 枚のトランプから 1 枚のカードを引くとき，そのカードがハートである事象を A，絵札である事象を B とする。

$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{3}{13}$，

$P(A\cap B)=\frac{3}{52}$ より

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

よって，A と B は独立である。

(2) 1 枚の硬貨を 2 回投げるとき，少なくとも 1 回は表が出る事象を A，1 回だけ表が出る事象を B とする。

$P(A)=\frac{3}{4}$，$P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$P(A\cap B)=\frac{1}{2}$ より

$P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$

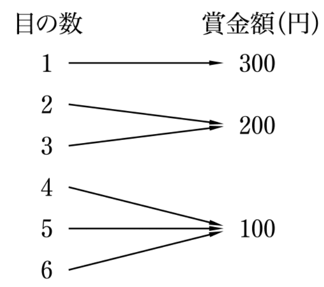
よって，A と B は従属である。

2 確率変数と確率分布

確率変数

（教科書 p.120）

1 個のさいころを投げて，1 の目が出るときは 300 円，2 または 3 の目が出るときは 200 円，4 以上の目が出るときは 100 円の賞金が与えられるとする。このとき



300 円の賞金が与えられる確率は $\frac{1}{6}$，

200 円の賞金が与えられる確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

100 円の賞金が与えられる確率は $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

である。さいころを投げた結果として与えられる賞金を X 円とすると，X は 100，200，300 のどれかの値をとる変数であり，X がどの値をとるかは試行の結果によって定まる。

一般に，試行の結果によってその値が定まる変数を（⑥ 確率変数 ）という。

問6 上の X に対して，$X\geqq 200$ となる確率 $P(X\geqq 200)$ を求めよ。

$X\geqq 200$ となるのは，3 以下の目が出るときであるから

$P(X\geqq 200)=\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

問7 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とする。
次の確率を求めよ。

(1) $P(X=3)$

$P(X=3)=\mathbf{\frac{1}{6}}$

(2) $P(2\leqq X\leqq 5)$

$P(2\leqq X\leqq 5)=\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

(3) $P(X^2\geqq 20)$

$P(X^2\geqq 20)=P(X\geqq 5)$

$=\frac{2}{6}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

確率分布

（教科書 p.121）

前ページの賞金額を表す確率変数 X に対して，X のとり得る値とそれに対応する確率を表で示すと，右のようになる。

X	100	200	300	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

確率変数のとり得る値と，その値をとる確率との対応を示したものを，その確率変数の（⑦　確率分布　）または単に（⑧　分布　）といい，確率変数 X はこの分布に（⑨　従う　）という。

一般に，確率変数 X のとり得る値が x_1，x_2，…，x_n であるとき，$P(X=x_i)=p_i$ とすると，次のことが成り立つ。

1. $p_1 \geqq 0$，$p_2 \geqq 0$，…，$p_n \geqq 0$
2. $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

また，このときの X の確率分布は右の表で示される。

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

例題 2　白球 4 個と黒球 3 個が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出すとき，その中に含まれている白球の個数 X の確率分布を求めよ。

解　X は 0，1，2 の値をとる確率変数であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7},\quad P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$$

である。

したがって，X の確率分布は，右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

問8　例題 2 で，取り出される球の中に含まれる黒球の個数 Y の確率分布を求めよ。

Y は 0，1，2 の値をとる確率変数であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(Y=0)=\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$$

$$P(Y=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$$

$$P(Y=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$$

したがって，Y の確率分布は，次の表のようになる。

Y	0	1	2	計
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

3 確率変数の平均と分散

確率変数の平均

（教科書 p.122）

一般に，確率変数 X のとる値が x_1，x_2，…，x_n で，X がそれぞれの値をとる確率が p_1，p_2，…，p_n のとき

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

（⑩ $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}$ ）

を確率変数 X の（⑪ 平均 ）または（⑫ 期待値 ）といい，（⑬ $E(X)$ ）で表す。

確率変数の平均

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}$$

例 4 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とするとき，X の平均を求めてみよう。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

確率分布は右の表のようになるから，X の平均は次のようになる。

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

問9 3 枚の 100 円硬貨を同時に投げるとき，表の出る枚数を X とする。X の平均を求めよ。

X のとる値は 0，1，2，3 であり，それぞれの値をとる確率は次のようになる。

$$P(X=0) = {}_3\mathrm{C}_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = {}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = {}_3\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

したがって，X の確率分布は，次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

よって，X の平均は

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

例題 3 2 本の当たりくじを含む 10 本のくじがある。この中から同時に 3 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数 X の平均を求めよ。

解 Xのとる値は，0，1，2 であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_8C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_2\times{}_8C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{15}$$

したがって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

よって，X の平均は次のようになる。

$$E(X)=0\cdot\frac{7}{15}+1\cdot\frac{7}{15}+2\cdot\frac{1}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{15}$$

問 10 赤球 2 個，白球 6 個が入っている袋がある。この中から同時に 4 個の球を取り出すとき，その中に含まれる赤球の個数 X の平均を求めよ。

X のとる値は 0，1，2 であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_6C_4}{{}_8C_4}=\frac{3}{14}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_6C_3}{{}_8C_4}=\frac{4}{7}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_6C_2}{{}_8C_4}=\frac{3}{14}$$

したがって，X の確率分布は，次の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$	1

よって，X の平均は

$$E(X)=0\cdot\frac{3}{14}+1\cdot\frac{4}{7}+2\cdot\frac{3}{14}=\mathbf{1}$$

例題 4 0 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 5 枚のカードがある。この中から同時に 2 枚のカードを取り出すとき，取り出したカードに書かれている数字の大きい方から小さい方を引いた値を X とする。
このとき，X の平均を求めよ。

解 2 枚のカードを取り出すとき，書かれている数字の組合せは ${}_5C_2=10$（通り）あり，数字の組合せと数字の差は右の表で表される。

組合せ	(0，1) (1，2) (2，3) (3，4)	(0，2) (1，3) (2，4)	(0，3) (1，4)	(0，4)
差	1	2	3	4

この表から，X のとる値は 1，2，3，4 であり X の確率分布は右の表のようになる。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

したがって，X の平均は次のようになる。

$$E(X)=1\cdot\frac{4}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{2}{10}+4\cdot\frac{1}{10}=\frac{20}{10}=2$$

問 11 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の大きい方の値 X の平均を求めよ。
ただし，同じ目のときはその目の数を X の値とする。

2 つのさいころ A，B の目の数の最大値を一覧表にすると，次の表のようになる。

		さいころＡの目					
		1	2	3	4	5	6
さいころＢの目	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	2	3	4	5	6
	3	3	3	3	4	5	6
	4	4	4	4	4	5	6
	5	5	5	5	5	5	6
	6	6	6	6	6	6	6

したがって，X の確率分布は，次の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

よって，X の平均は

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=\mathbf{\frac{161}{36}}$$

確率変数 $aX+b$ と X^2 の平均

（教科書 p.124）

$\boldsymbol{aX+b}$ の平均
a，b を定数とするとき　　$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b}$

例 5 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X で表すと，123 ページの例 4 より$E(X)=\frac{7}{2}$であるから，確率変数 $4X+1$ の平均は

$$E(4X+1)=4E(X)+1=4\cdot\frac{7}{2}+1=15$$

問 12 例 5 の X に対して，次の確率変数の平均を求めよ。

$E(X)=\frac{7}{2}$である。

(1)　$X+4$

$$E(X+4)=E(X)+4=\frac{7}{2}+4=\boldsymbol{\frac{15}{2}}$$

(2)　$-X$

$$E(-X)=-E(X)=-\boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

(3)　$5X-1$

$$E(5X-1)=5E(X)-1=5\cdot\frac{7}{2}-1$$

$$=\boldsymbol{\frac{33}{2}}$$

確率変数 X に対して，X の平均を m とするとき，確率変数 $X-m$ を X の平均からの（⑭　偏差　）という。

例 6 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とすると

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{6}\left(i^2\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+\cdots+6^2)=\frac{91}{6}$$

問 13 例 6 の X に対して，次の確率変数の平均を求めよ。

$E(X^2)=\frac{91}{6}$である。

(1)　$3X^2$

$$E(3X^2)=3E(X^2)=3\cdot\frac{91}{6}=\boldsymbol{\frac{91}{2}}$$

(2)　$2X^2-1$

$$E(2X^2-1)=2E(X^2)-1=2\cdot\frac{91}{6}-1$$

$$=\boldsymbol{\frac{88}{3}}$$

確率変数の分散・標準偏差

（教科書 p.126）

X および Y は，それぞれ次の確率分布に従う確率変数とする。

X	-2	-1	0	1	2	計
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	1

Y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	計
P	0.05	0.1	0.1	0.15	0.2	0.15	0.1	0.1	0.15	1

確率変数 X のとる値を x_1，x_2，…，x_n とし，確率 $P(X=x_i)$ を p_i，X の平均を m とするとき

$$(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

を確率変数 X の（⑮　分散　）といい，（⑯　$V(X)$　）で表す。

すなわち

（⑰　$\boldsymbol{V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i}$　）

分散は X の平均 m からの偏差の 2 乗 $(X-m)^2$ の平均であるから，次のように表される。

確率変数の分散
$\boldsymbol{V(X)=E((X-m)^2)}$

例 7 前ページの確率変数 X と Y の分散を求め，比較してみよう。

$E(X)=E(Y)=0$ であるから

$V(X)=(-2)^2\cdot0.1+(-1)^2\cdot0.2+0^2\cdot0.4+1^2\cdot0.2+2^2\cdot0.1=1.2$

$V(Y)=(-4)^2\cdot0.05+(-3)^2\cdot0.1+(-2)^2\cdot0.1+(-1)^2\cdot0.15+0^2\cdot0.2+1^2\cdot0.15+2^2\cdot0.1$
$\quad+3^2\cdot0.1+4^2\cdot0.05=4.5$

よって，（ $V(Y)>V(X)$ ）が成り立つことがわかる。

これは，（ Y の確率分布の方が X の確率分布より平均からの散らばり具合いが大きい ）ことを示している。

分散の計算
$$\boldsymbol{V(X)=E(X^2)-m^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2}$$

確率変数 X の分散 $V(X)$ の正の平方根を X の（⑱ 標準偏差 ）といい，
（⑲ $\boldsymbol{\sigma(X)}$ ）
で表す。すなわち
（⑳ $\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$ ）

例 8 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X として，X の分散と標準偏差を求めてみよう。

123 ページの例 4 と 125 ページの例 6 より X の分散は

$$V(X)=E(X^2)-m^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$$

X の標準偏差は　$\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{35}{12}}=\dfrac{\sqrt{105}}{6}$

問 14 硬貨を 3 回投げるとき，表が出る回数 X の標準偏差を求めよ。

$$P(X=0)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

したがって，X の確率分布は，次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

よって

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}$$
$$=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

$$V(X)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

したがって　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

例題 5 1, 2, 3 の番号を 1 つずつ記入した 3 枚の封筒と 3 枚のカードがある。このカードを 1 枚ずつ封筒に入れるとき，カードの番号とそれを入れた封筒の番号が一致するカードの枚数 X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

解 右の表からわかるように，封筒にカードを入れる方法は 6 通りあり，X のとる値は 0, 1, 3 である。これより，Xの確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	3	計
P	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって，X の平均，分散，標準偏差は

$$E(X)=0\cdot\frac{2}{6}+1\cdot\frac{3}{6}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

$$V(X)=0^2\cdot\frac{2}{6}+1^2\cdot\frac{3}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}-1^2=\frac{12}{6}-1=1$$

$$\sigma(X)=\sqrt{1}=1$$

	封筒 1	封筒 2	封筒 3	Xの値
カード	1	2	3	3
	1	3	2	1
	2	1	3	1
	2	3	1	0
	3	1	2	0
	3	2	1	1

問 15 例題 5 において，封筒とカードをそれぞれ 1 枚ずつ増やして 1, 2, 3, 4 の番号を 1 つずつ記入するとき，X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

X のとる値は 0，1，2，4 のいずれかである。$X=2$ の場合は，2 つの番号が一致し，他の 2 つの番号が入れ替わる場合である。

よって　$P(X=2)=\frac{{}_4C_2}{4!}=\frac{6}{24}$

$X=1$ の場合は，1 つの番号が一致し，他の 3 つの番号が異なる場合である。

よって　$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times 2}{4!}=\frac{8}{24}$

また

$$P(X=4)=\frac{1}{24}$$

$$P(X=0)=1-\frac{8}{24}-\frac{6}{24}-\frac{1}{24}=\frac{9}{24}$$

したがって，X の平均と分散は

$$\boldsymbol{E(X)}=0\cdot\frac{9}{24}+1\cdot\frac{8}{24}+2\cdot\frac{6}{24}+4\cdot\frac{1}{24}=\mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{V(X)}=0^2\cdot\frac{9}{24}+1^2\cdot\frac{8}{24}+2^2\cdot\frac{6}{24}+4^2\cdot\frac{1}{24}-1^2=\mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X)}=\sqrt{V(X)}=\mathbf{1}$$

確率変数$aX+b$の分散と標準偏差

（教科書 p.129）

一般に，確率変数 $aX+b$ の平均と分散，標準偏差は次のようになる。

$aX+b$ の平均と分散・標準偏差

$$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b,\qquad V(aX+b)=a^2V(X),}$$
$$\boldsymbol{\sigma(aX+b)=|\,a\,|\sigma(X)}$$

例 9 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とするとき，前ページの例 8 より$V(X)=\frac{35}{12}$，$\sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}$ であるから，確率変数 $4X+5$ の分散と標準偏差は，次のようになる。

$$V(4X+5)=4^2V(X)=16\cdot\frac{35}{12}=\frac{140}{3}$$

$$\sigma(4X+5)=|4|\sigma(X)=4\cdot\frac{\sqrt{105}}{6}=\frac{2\sqrt{105}}{3}$$

注意　$\sigma(4X+5)$ は $\sqrt{V(4X+5)}=\sqrt{\frac{140}{3}}$ としても求めることができる。

問 16 例 9 の X について，次の確率変数の分散と標準偏差を求めよ。

$V(X)=\frac{35}{12}$，$\sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}$ である。

(1)　$3X+1$

$$V(3X+1)=3^2V(X)=9\cdot\frac{35}{12}=\frac{105}{4}$$

$$\sigma(3X+1)=|3|\sigma(X)=3\cdot\frac{\sqrt{105}}{6}=\frac{\sqrt{105}}{2}$$

(2)　$-X$

$$V(-X)=(-1)^2V(X)=V(X)=\frac{35}{12}$$

$$\sigma(-X)=|-1|\sigma(X)=\sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}$$

(3)　$-6X+5$

$$V(-6X+5)=(-6)^2V(X)=36\cdot\frac{35}{12}=105$$

$$\sigma(-6X+5)=|-6|\sigma(X)=6\cdot\frac{\sqrt{105}}{6}=\sqrt{105}$$

4 確率変数の和と積

確率変数の和の平均

（教科書 p.130）

一般に，2 つの確率変数 X, Y の和について，次の等式が成り立つ。

確率変数の和の平均
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

例 10 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X, Y とする。このとき，出る目の数の和 $X+Y$ の平均は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$$

である。同様に， 3 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数を X, Y, Z とすると，出る目の数の和 $X+Y+Z$ の平均は

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$$

である。

問 17 1, 2, 3 の数字を 1 つずつ書いた札がそれぞれ 1 枚，2 枚，3 枚ある。この 6 枚の札から 1 枚引き，書かれている数字を記録してもとに戻す。これを 3 回くり返すとき，引く札に書かれた数の和の平均を求めよ。

1 回目，2 回目，3 回目にそれぞれ引いた札の数を X，Y，Z とする。
X の確率分布は，次の表のようになる。

X	1	2	3	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

よって，平均は

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{3}{6}=\frac{7}{3}$$

同様に　　$E(Y)=E(Z)=\frac{7}{3}$

したがって

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

$$=\frac{7}{3}+\frac{7}{3}+\frac{7}{3}=7$$

独立な確率変数

（教科書 p.131）

一般に，2 つの確率変数 X，Y について，X のとる任意の値 x_i と Y のとる任意の値 y_j について

（㉑　$\boldsymbol{P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)}$　）

が成り立つとき，確率変数 X，Y は（㉒　独立　）であるという。

例 11 2 つの確率変数 X，Yのとる値と X,Y の値の組に対する確率が右の表で与えられている。たとえば，$X=2$，$Y=2$ となる確率は

$P(X=2, Y=2)=0.42$

X ＼ Y	1	2	計
2	0.28	0.42	0.7
4	0.12	0.18	0.3
計	0.4	0.6	1

一方　$P(X=2)\cdot P(Y=2)=0.7\cdot 0.6=0.42$

であるから　$P(X=2,\ Y=2)=P(X=2)\cdot P(Y=2)$

が成り立つ。X，Y の他の値のすべての組の確率に対しても同様な式が成り立つから，

（　確率変数 X，Y は独立　）であることがわかる。

独立な確率変数の積の平均と和の分散

（教科書 p.132）

独立な確率変数の積の平均

確率変数 X，Y が独立であるとき　$\boldsymbol{E(XY)=E(X)\cdot E(Y)}$

例 12 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の積の平均を求めてみよう。

それぞれのさいころの出る目の数を X，Y とする。X，Y の平均は $E(X)=E(Y)=\frac{7}{2}$であり，それぞれのさいころを投げる試行は独立であるから，出る目の数の積の平均は次のようになる。

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{4}$$

問 18 2 つの袋 A，B があり，袋 A には 1，3，5，7，9 の数字を 1 つずつ書いた札が 5 枚入っており，袋 B には 2，4，6，8 の数字を 1 つずつ書いた札が 4 枚入っている。2 つの袋から 1 枚ずつ札を取り出すとき，2 枚の札に書かれた数の積の平均を求めよ。

袋 A から取り出した札の数を X，袋 B から取り出した札の数を Y とすると，X と Y は独立である。

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{5}+7\cdot\frac{1}{5}+9\cdot\frac{1}{5}=5$$

$$E(Y)=2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{4}=5$$

ここで，$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$ より

$E(XY)=5\cdot 5=\boldsymbol{25}$

独立な確率変数の和の分散

確率変数 X，Y が独立であるとき $\boldsymbol{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$

例 13 2 個のさいころを同時に投げるとき，それぞれのさいころの出る目の数を X，Y とする。X と Y は独立であり，128 ページの例 8 より $V(X)=V(Y)=\frac{35}{12}$ であるから，$X+Y$ の分散，標準偏差は次のようになる。

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{70}{12}=\frac{35}{6}$$

$$\sigma(X+Y)=\sqrt{V(X+Y)}=\sqrt{\frac{35}{6}}=\frac{\sqrt{210}}{6}$$

問 19 1 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げる試行で，硬貨の表が出るとき 1，裏が出るとき 0 を対応させる確率変数を X，さいころの出る目の数を Y とする。このとき，確率変数 $X+Y$ の分散と標準偏差を求めよ。

Xの確率分布は，次の表のようになる。

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$V(X)=0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

また，Y については，教科書 p.128 の例 8 より，$V(Y)=\frac{35}{12}$である。

X と Y は独立であるから

$$\boldsymbol{V(X+Y)}=V(X)+V(Y)=\boldsymbol{\frac{19}{6}}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X+Y)}=\sqrt{V(X+Y)}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{114}}{6}}$$

独立な確率変数 X, Y, Z に対して，次のことが成り立つ。

(㉔ $\boldsymbol{E(XYZ)=E(X)\cdot E(Y)\cdot E(Z)}$)

(㉕ $\boldsymbol{V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)}$)

問 20 1 個のさいころを 3 回投げるとき，出る目の数の積の平均を求めよ。また，出る目の数の和の分散を求めよ。

3 回投げるときのそれぞれの目の数を X，Y，Z とする。教科書 p.123 の例 4 より

$$E(X)=E(Y)=E(Z)=\frac{7}{2}$$

また，教科書 p.128 の例 8 より

$$V(X)=V(Y)=V(Z)=\frac{35}{12}$$

X，Y，Z は独立であるから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E(XYZ)}&=E(X)\cdot E(Y)\cdot E(Z)\\&=\left(\frac{7}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{343}{8}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V(X+Y+Z)}&=V(X)+V(Y)+V(Z)\\&=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}+\frac{35}{12}\\&=\frac{35}{12}\times 3=\boldsymbol{\frac{35}{4}}\end{aligned}$$

5 二項分布

（教科書 p.135）

一般に，ある試行で事象 A が起こる確率を p とし，A が起こらない確率を $q=1-p$ とおく。この試行を n 回くり返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすると X は確率変数であり，そのとる値は 0 から n までの整数である。また，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

である。したがって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	$\cdots$	r	$\cdots$	r	計
P	${}_n\mathrm{C}_0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n p^n$	1

確率変数 X の確率分布が上の表のようになるとき，この確率分布を確率 p に対する次数 n の（㉖　二項分布　）といい，（㉗　$B(n,\ p)$　）で表す。

例 14 1 個のさいころを 5 回くり返し投げるとき，1 の目が出る回数を X とすると，確率変数 X は二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。

したがって，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_5\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{5-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{1250}{7776}$	$\frac{250}{7776}$	$\frac{25}{7776}$	$\frac{1}{7776}$	1

問 21 次の二項分布に従う確率変数に対して，それぞれの二項分布 $B(n,\ p)$ における $n,\ p$ の値を求めよ。

(1)　1 枚の硬貨を 10 回投げるとき，表の出る回数 X

$$\boldsymbol{n=10,\ p=\frac{1}{2}}$$

(2)　2 個のさいころを同時に投げる試行を 8 回くり返すとき，2 個とも 6 の目が出る回数 Y

$$\boldsymbol{n=8,\ p=\frac{1}{36}}$$

問 22 確率変数 X が二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$ に従うとき，$X=3$ となる確率を求めよ。

$$P(X=3)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{40}{243}}$$

例題 6 1 個のさいころを 4 回投げるとき，1 の目が出る回数が 2 回以下である確率を求めよ。

解 1 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(4,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。

求める確率は $P(X\leqq 2)$ であるから

$$P(X\leqq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$
$$=\left(\frac{5}{6}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$=\frac{5^4}{6^4}+4\cdot\frac{5^3}{6^4}+6\cdot\frac{5^2}{6^4}=\frac{425}{432}$$

問 23 1 枚の硬貨を 5 回投げるとき，表が 3 回以上出る確率を求めよ。

硬貨を 5 回投げるとき，表の出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

求める確率は $P(X\geqq 3)$ であるから

$$P(X\geqq 3)$$
$$=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
$$={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{2^5}+5\cdot\frac{1}{2^5}+1\cdot\frac{1}{2^5}$$
$$=\frac{1}{2^5}\left(\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}+5+1\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

二項分布の平均と分散

（教科書 p.137）

一般に，二項分布 $B(n,\ p)$ に対して，次のことが成り立つ。

二項分布の平均と分散
確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき $\boldsymbol{E(X)=np}$ $\boldsymbol{V(X)=npq}$　　ただし，$q=1-p$

例 15 確率変数 X が二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$ に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めてみよう。

$$E(X)=5\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$V(X)=5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$$

問 24 確率変数 X が次の二項分布に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

(1)　$B\left(30,\ \frac{1}{6}\right)$

$$\boldsymbol{E(X)}=30\cdot\frac{1}{6}=\boldsymbol{5}$$

$$\boldsymbol{V(X)}=30\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{25}{6}}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X)}=\sqrt{V(X)}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{6}}{6}}$$

(2)　$B\left(50,\ \frac{1}{2}\right)$

$$\boldsymbol{E(X)}=50\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{25}$$

$$\boldsymbol{V(X)}=50\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{25}{2}}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X)}=\sqrt{V(X)}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$$

(3)　$B(100,\ 0.36)$

$$\boldsymbol{E(X)}=100\cdot0.36=\boldsymbol{36}$$

$$\boldsymbol{V(X)}=100\cdot0.36\cdot0.64=\boldsymbol{23.04}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X)}=\sqrt{V(X)}=\boldsymbol{4.8}$$

例題 7　赤球 3 個と黒球 1 個が入っている袋から 1 個の球を取り出し，色を調べてから袋に戻す。これを 100 回くり返すとき，赤球を取り出す回数 X の平均と標準偏差を求めよ。

解　X は二項分布 $B\left(100,\ \frac{3}{4}\right)$ に従う。

したがって，X の平均と標準偏差は次のようになる。

$$E(X)=100\cdot\frac{3}{4}=75\text{（回）}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{100\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\text{（回）}$$

問 25 A と B の 2 人が 20 回続けて試合を行う。A の勝つ確率は $\frac{2}{3}$ で A の勝つ回数を X とする。X の平均と標準偏差を求めよ。
ただし，引き分けはないものとする。

X は二項分布 $B\left(20,\ \frac{2}{3}\right)$ に従う。

したがって，X の平均と標準偏差は次のようになる。

$$\boldsymbol{E(X)} = 20 \cdot \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{40}{3}}(\text{回})$$

$$\boldsymbol{\sigma(X)} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{20 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{10}}{3}}(\text{回})$$

問 題

（教科書 p.139）

1 a, b, c, d, e の 5 人が 1 列に並ぶとき，a, b が隣り合う事象を F，a が端にくる事象をG とする。このとき，2 つの事象 F と G は独立であるか従属であるかを答えよ。

5 人が 1 列に並ぶ並び方は全部で 5! 通りあり，a，b が隣り合うのは，これを 1 人とみなした 4! 通りの並び方に，a と b の入れ替わりを考慮してその 2 倍だけある。よって

$$P(F)=\frac{4!\times 2}{5!}=\frac{2}{5}$$

次に，a が端にくるのは，左右があるから，2 × 4!通りあり

$$P(G)=\frac{2\times 4!}{5!}=\frac{2}{5}$$

一方，$F\cap G$ は，ab 〇〇〇か〇〇〇 ba と並ぶ場合であるから，2 × 3! 通りあり

$$P(F\cap G)=\frac{2\times 3!}{5!}=\frac{1}{10}$$

ゆえに，$P(F\cap G)\neq P(F)\cdot P(G)$ であるから，Fと G は従属である。

2 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚の札の中から同時に 2 枚の札を引くとき，書かれた大きい方の数字を X とする。X の平均と標準偏差を求めよ。

X のとる値は 2，3，4 である。

$X=4$ となる確率は，4 の札の他に 1，2，3 のいずれかの札を引く場合であるから

$$P(X=4)=\frac{3}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{3}{6}$$

$X=3$，2 となる確率も同様にして

$$P(X=3)=\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{6}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$$

以上より，X の確率分布は，次の表のようになる。

X	2	3	4	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

よって，X の平均と分散，標準偏差は

$$\boldsymbol{E(X)}=2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{2}{6}+4\cdot\frac{3}{6}=\boldsymbol{\frac{10}{3}}$$

$$V(X)=2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{2}{6}+4^2\cdot\frac{3}{6}-\left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$=\frac{5}{9}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

3 赤球 2 個と白球 4 個が入った袋から同時に 2 個の球を取り出すことをくり返す。ただし，取り出した球はもとに戻さないものとする。ここで，取り出した 2 個の球の中に，初めて赤球が含まれるまでくり返す回数を X とする。X の平均と標準偏差を求めよ。

X のとる値は 1，2，3 である。

$X=1$ となるのは，1 回目に赤球 2 個か，または赤球 1 個と白球 1 個を取り出す場合であるから

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_2+{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{9}{15}$$

$X=2$ となるのは，1 回目に白球 2 個を取り出し，2 回目に赤球 2 個か，または赤球 1 個と白球 1 個を取り出す場合であるから

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_2C_2+{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{5}{15}$$

$X=3$ となるのは，1 回目，2 回目とも白球 2 個を取り出す場合であるから

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{15}$$

以上より，X の確率分布は，次の表のようになる。

X	1	2	3	計
P	$\frac{9}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

よって，X の平均と分散，標準偏差は

$$\boldsymbol{E(X)}=1\cdot\frac{9}{15}+2\cdot\frac{5}{15}+3\cdot\frac{1}{15}=\boldsymbol{\frac{22}{15}}$$

$$V(X)=1^2\cdot\frac{9}{15}+2^2\cdot\frac{5}{15}+3^2\cdot\frac{1}{15}-\left(\frac{22}{15}\right)^2$$

$$=\frac{86}{225}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X)}=\sqrt{\frac{86}{225}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{86}}{15}}$$

4 1 個のさいころと 1 枚の硬貨を投げる。硬貨の表が出ればさいころの目の数の 3 倍を得点とし，裏が出ればさいころの目の数を得点とする。
このときの得点の平均を求めよ。

さいころの目を X，硬貨で表が出れば 3，裏が出れば 1 の値をとる確率変数を Y とする。

Xと Y は独立試行のそれぞれの確率変数であるから独立であり，そのときの得点は XY で表される。ここで，教科書 p.123 の例 4 より

Y	3	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X)=\frac{7}{2}$$

また

$$E(Y)=3\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}$$

$$=2$$

よって

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{7}{2}\cdot 2=\boldsymbol{7}$$

5 1 枚の硬貨を投げるとき，表が出れば得点は 10 点とし，裏が出れば得点は -5 点とする。これを 20 回くり返すとき，得られる得点の平均と標準偏差を求めよ。

1 枚の硬貨を 20 回くり返して投げるとき，X 回表が出れば，そのときの得点は

$10X-5(20-X)=15X-100$

と表される。

ここで，X は二項分布 $B\left(20,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

よって　$E(X)=20\cdot\frac{1}{2}=10$

$V(X)=20\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=5$

ゆえに　$E(15X-100)=15E(X)-100$

$=15\cdot 10-100$

$=50$

$V(15X-100)=15^2V(X)$

$=15^2\cdot 5$

したがって　$\sigma(15X-100)=\sqrt{15^2\cdot 5}=15\sqrt{5}$

以上より　　求める平均は　**50**

標準偏差は　　$\boldsymbol{15\sqrt{5}}$

6 原点 O から出発して数直線上を動く点 P がある。1 個のさいころを投げて，4 以下の目が出れば P は $+2$ だけ進み，5 以上の目が出れば P は -1 だけ進むという。さいころを 6 回投げたときの点 P の座標を X とするとき，次の問に答えよ。

さいころを 6 回投げたとき，4 以下の目が S 回出るとすれば

$X=2S-1\cdot(6-S)=3S-6$

が成り立つ。

(1)　$X>0$ となる確率を求めよ。

$X>0$ より　　$S>2$

よって　　$S=3,\ 4,\ 5,\ 6$

ゆえに，求める確率は

$1-P(S=0)-P(S=1)-P(S=2)$

$=1-\left(\frac{2}{6}\right)^6-{}_6C_1\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)^5-{}_6C_2\left(\frac{4}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^4$

$=\boldsymbol{\frac{656}{729}}$

(2)　X の平均と分散を求めよ。

S は二項分布 $B\left(6,\ \frac{2}{3}\right)$ に従う。

よって　　$E(S)=6\cdot\frac{2}{3}=4$

$V(S)=6\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

ゆえに　　$\boldsymbol{E(X)}=3E(S)-6$

$=3\cdot 4-6=\boldsymbol{6}$

$\boldsymbol{V(X)}=3^2V(S)$

$=9\cdot\frac{4}{3}=\boldsymbol{12}$