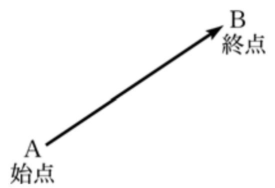
1 節 平面上のベクトル

1 ベクトルの意味

有向線分とベクトル

（教科書 p.50）

平面上で，点 A から点 B までの移動は，右の図のように，線分 AB に向きを示す矢印をつけて表すことができる。このような向きのついた線分を（① ）という。



線分 AB の長さを有向線分 AB の（② ）または長さという。

また，有向線分 AB において，A を（③ ），B を（④ ）という。

有向線分について，その位置を問題にせず，向きと大きさだけに着目したものを（⑤ ）という。

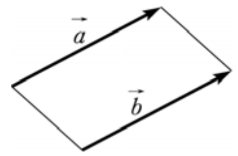
有向線分 AB の表すベクトルを，（⑥ ）と書く。

そして，有向線分 AB の長さをベクトル $\overrightarrow{AB}$ の（⑦ ）といい，（⑧ ）で表す。

ベクトルの相等

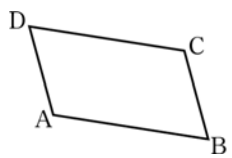
（教科書 p.51）

2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の向きと大きさが一致するとき，これらのベクトルは（⑨ ）といい， $\vec{a}=\vec{b}$ と表す。



問1 右の平行四辺形で，次のベクトルのうち互いに等しいものを答えよ。

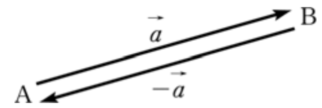
① $\overrightarrow{AD}$　② $\overrightarrow{BA}$
③ $\overrightarrow{BC}$　④ $\overrightarrow{CD}$



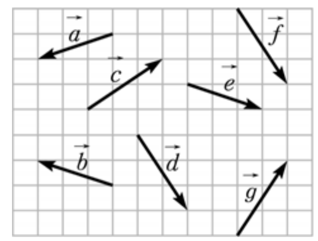
逆ベクトルと零ベクトル

（教科書 p.51）

ベクトル $\vec{a}$ と大きさが同じで，向きが反対のベクトルを $\vec{a}$ の（⑩ ）といい，（⑪ ）で表す。



問2 右の図の中で，等しいベクトルを答えよ。
また，互いに逆ベクトルであるものを答えよ。



始点と終点の一致したベクトル $\overrightarrow{AA}$ は大きさが 0 のベクトルと考えられる。このベクトルを（⑫ ）といい，（⑬ ）で表す。

2 ベクトルの加法・減法・実数倍

ベクトルの加法

（教科書 p.52）

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，1 つの点 A をとり

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$,　　$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

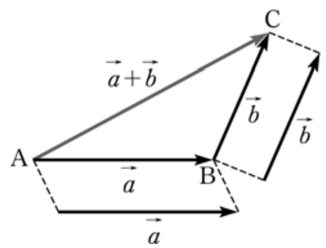
となるように点 B, C をとる。このとき，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（⑭　　　　　）といい

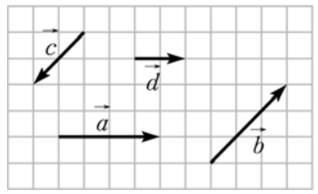
（⑮　　　　　　）

と表す。すなわち

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



問3 右の図において，次のベクトルを図示せよ。



（1）$\vec{a}+\vec{b}$

（2）$\vec{c}+\vec{a}$

（3）$\vec{a}+\vec{d}$

（4）$\vec{b}+\vec{c}$

ベクトルの加法については，次のことが成り立つ。

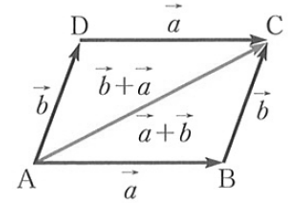
ベクトルの加法		
1	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	交換法則
2	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	結合法則
3	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	
4	$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$	

証明 1 を証明する。ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，平面上に点 A をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となるように点 B, D をとる。下の図のように平行四辺形 ABCD をつくると

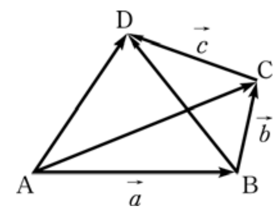
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

であるから，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ が成り立つ。



問4 右の図を用いて，上の法則 2 が成り立つことを確かめよ。



問5 平面上に 3 点 A, B, C がある。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

ベクトルの減法

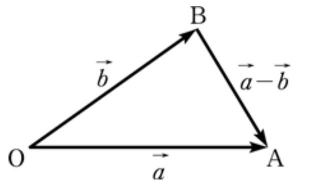
（教科書 p.53）

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，1 つの点 O をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる 2 点 A, B をとると $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（⑯　　　　）といい

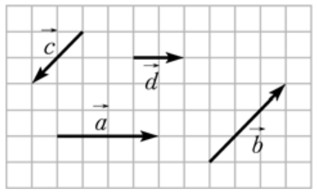
（⑰　　　　　　）

と表す。すなわち

（⑱　　　　　　　　　　）



問6 右の図において，次のベクトルを図示せよ。

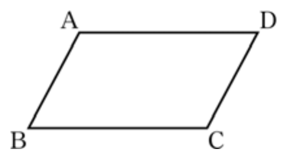


（1）　$\vec{a}-\vec{b}$

（2）　$\vec{c}-\vec{a}$

（3）　$\vec{a}-\vec{d}$

問7 右の図の平行四辺形において，次のベクトルの差を求めよ。



（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

（3）　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

ベクトルの実数倍

（教科書 p.54）

ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，$\vec{a}$ の k 倍（⑲　　　　　）を次のように定義する。

(i)　$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき, $k\vec{a}$ は

　$k>0$ ならば，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが k 倍のベクトル

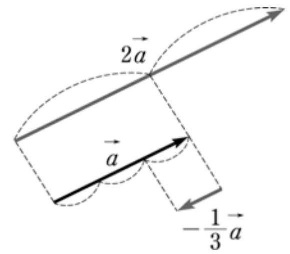
　$k<0$ ならば，$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

　$k=0$ ならば，$\vec{0}$　すなわち　$0\vec{a}=\vec{0}$

(ii)　$\vec{a}=\vec{0}$ のとき，任意の実数 k に対して　$k\vec{0}=\vec{0}$

例 1 ベクトル $\vec{a}$ に対して，$2\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで大きさが 2 倍のベクトルである。

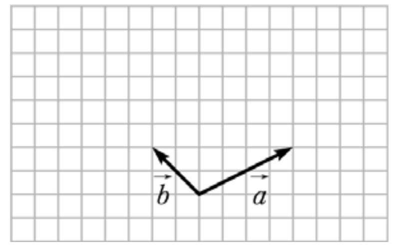
$-\frac{1}{3}\vec{a}$は $\vec{a}$と反対の向きで大きさが $\frac{1}{3}$倍のベクトルである。



問8 右の図のように $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。

（1）　$-\frac{1}{2}\vec{a}$　　　（2）　$\vec{a}+3\vec{b}$

（3）　$-\vec{a}+2\vec{b}$　　　（4）　$\frac{3}{2}\vec{a}-\vec{b}$

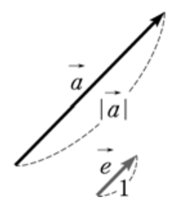


注意　$\frac{1}{k}\vec{a}$ を $\frac{\vec{a}}{k}$ と書くことがある。

大きさが 1 のベクトルを（⑳　　　　　　　）という。

一般に，$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると，次のようになる。

（㉑　　　　　　）

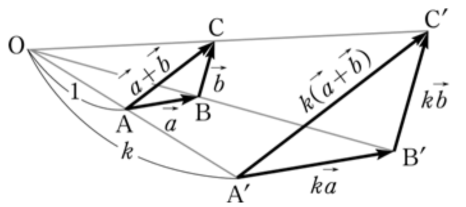


問9　$|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

実数 k，l に対して，次の法則が成り立つ。

ベクトルの実数倍	
1	$\boldsymbol{k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}}$
2	$\boldsymbol{(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}}$
3	$\boldsymbol{k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}}$

問10　次の図を用いて，上の $\boxed{3}$ が成り立つことを確かめよ。



例 2　$2(\vec{a}-4\vec{b})+3(2\vec{a}+3\vec{b})=$

問11　次を計算せよ。

（1）　$3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a}$

⑵　$3(\vec{a}+2\vec{b})-5(2\vec{a}-\vec{b})$

問12　次の式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

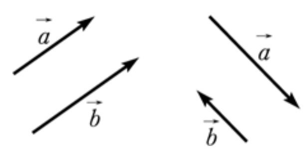
（1）　$\vec{x}-3\vec{b}=-2\vec{x}+9\vec{a}$

⑵　$3(\vec{x}-2\vec{a})-2(\vec{x}-4\vec{b})=2\vec{a}-4\vec{b}-3\vec{x}$

ベクトルの平行

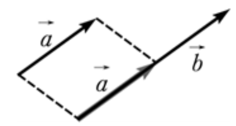
（教科書 p.56）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が，同じ向きまたは反対向きであるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㉒　　　　　　）であるといい，（㉓　　　　　　）と書く。

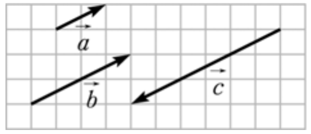


ベクトルの平行の定義と実数倍の定義から，次のことがわかる。

ベクトルの平行条件
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\parallel\vec{b}} \iff$ $\boldsymbol{\vec{b}=k\vec{a}}$ となる実数 $\boldsymbol{k}$ がある



問13 右の図で，$\vec{b}$, $\vec{c}$ を $\vec{a}$ で表せ。また，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を $\vec{c}$ で表せ。

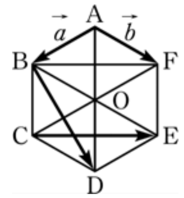


ベクトルの分解

（教科書 p.56）

例題 1 右の図の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

（1） $\overrightarrow{CE}$　　（2） $\overrightarrow{BD}$



解

問14 例題 1 で，$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DF}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

一般に，平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

分解の一意性
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{p}=k\vec{a}+l\vec{b}$ の形にただ 1 通りに表される。ただし，k, l は実数である。

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，次のことが成り立つ。

（㉔　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

とくに　（㉕　　　　　　　　　　　　　　　）

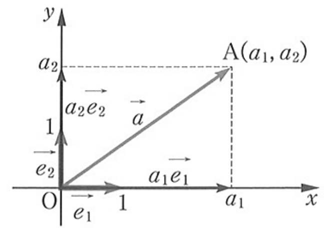
注意　$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㉖　　　　　　）であるという。

3 ベクトルの成分

座標とベクトル

（教科書 p.58）

O を原点とする座標平面上で，x 軸および y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを，（㉗　　　　　　　　）といい，それぞれ（㉘　　　　　　）で表す。



◀ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ は 1 次独立であるから，この表し方はただ 1 通りである。

いま，与えられたベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ となる点 A をとり，その座標を $(a_1,\ a_2)$ とすると，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

と表される。

これを $\vec{a}$ の（㉙　　　　　　　　）という。この a_1，a_2 をそれぞれ $\vec{a}$ の（㉚　　　　　　　　）といい，$\vec{a}$ を

（㉛　　　　　　　　）

と表す。この表し方を，$\vec{a}$ の（㉜　　　　　　）という。

ベクトルの表示	
$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$	基本ベクトル表示
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$	成分表示

また，2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ に対して

（㉝　　　　　　　　　　　　　　　　）

$\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は，線分 OA の長さであるから，成分表示されたベクトルの大きさは，次のようになる。

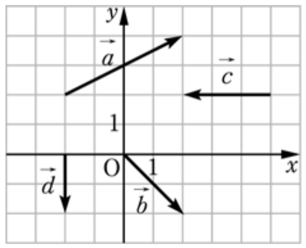
ベクトルの大きさ
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$\boldsymbol{|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}}$

例 3 基本ベクトル表示が $\vec{a}=4\vec{e_1}-3\vec{e_2}$ であるベクトル $\vec{a}$ において

$\vec{a}$ の成分表示は　$\vec{a}=(4,\ -3)$

$\vec{a}$ の大きさは　$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

問15 右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を成分表示し，その大きさを求めよ。



成分による演算

（教科書 p.59）

和，差，実数倍の演算を成分を用いて表すと，次のようになる。

成分による演算		
1	$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$	
2	$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$	
3	$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$	k は実数

例 4 $\vec{a}=(5,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ 4)$ のとき

$\vec{a}+\vec{b}=$

$3\vec{a}-2\vec{b}=$

問16 $\vec{a}=(2,\ -3)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

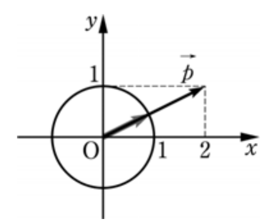
(1) $\vec{a}+\vec{b}$

(2) $2\vec{a}-5\vec{b}$

(3) $3(2\vec{a}-6\vec{b})-5(\vec{a}-4\vec{b})$

問17 $\vec{a}=(3,\ 0)$, $\vec{b}=(4,\ -5)$ のとき，$\vec{a}-3\vec{x}=2(\vec{x}+\vec{b})$ を満たす $\vec{x}$ の成分表示を求めよ。

例 5 $\vec{p}=(2,\ 1)$ のとき，$\vec{p}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分表示を求めてみよう。



$|\vec{p}|=$

であるから，求める単位ベクトルは

$\dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}=$

問18 $\vec{a}=(12,\ -5)$ と同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。

例題 2 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(5,\ 4)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

解

問19 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，次のベクトルを $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

(1) $\vec{c}=(5,\ 1)$

(2) $\vec{d}=(0,\ -3)$

座標と成分表示

（教科書 p.61）

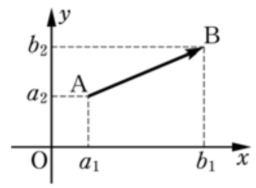
一般に，2 点 A, B に対して，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示と大きさは次のようになる。

座標と成分表示

$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ のとき

1 $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(\boldsymbol{b_1}-\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{b_2}-\boldsymbol{a_2})$

2 $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{(\boldsymbol{b_1}-\boldsymbol{a_1})^2+(\boldsymbol{b_2}-\boldsymbol{a_2})^2}$



問20 3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 6)$, $\mathrm{B}(3,\ -1)$, $\mathrm{C}(3,-4)$ について，次のベクトルを成分表示し，その大きさを求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

例題 3 平面上に 3 点 A$(3,\ -2)$, B$(7,\ -1)$, C$(-1,\ 4)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ。

解

問21 例題 3 の 3 点 A, B, C を頂点にもつ平行四辺形は 3 つある。他の 2 つの平行四辺形の残りの頂点の座標を求めよ。

ベクトルの平行

（教科書 p.62）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次のことが成り立つ。

ベクトルの平行条件
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\mathbin{/\!/}\vec{b}} \iff (\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2})=\boldsymbol{k}(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2})$ となる実数 $\boldsymbol{k}$ がある

問22 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-3,\ y)$ が平行になるような y の値を求めよ。

例 6 $\vec{a}=(4,\ 3)$ と平行で，大きさが 4 であるベクトル $\vec{b}$ を求めてみよう。

k を実数として　$\vec{b}=k\vec{a}=k(4,\ 3)=(4k,\ 3k)$　……①

となり，$|\vec{b}|=$ 　　　　　　を満たす。

これより，$25k^2=16$ であるから　$k=$

よって，①より求めるベクトルは　　　　　,

問23 $\vec{a}=(-2,\ 2)$ と平行で，大きさが 3 であるベクトルを求めよ。

例題 4　$\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ -4)$, $\vec{c}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような実数 t の値を求めよ。

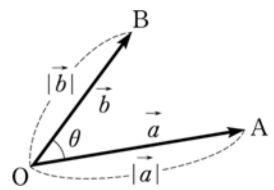
解

問24　$\vec{a}=(6,\ -1)$, $\vec{b}=(-3,\ 2)$, $\vec{c}=(1,\ -1)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような実数 t の値を求めよ。

4 ベクトルの内積

（教科書 p.63）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，点 O を始点として，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような点 A, B をとる。このとき，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$を（㉞　　　　　　　　　　）という。



ただし，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ とする。

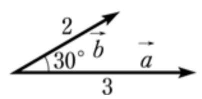
このとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（㉟　　　　　）といい，（㊱　　　　　）で表す。

内積の定義
2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

注意　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトルではなく実数である。

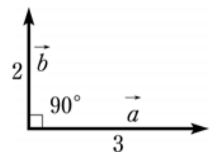
例 7　下の図について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めてみよう。

(1)



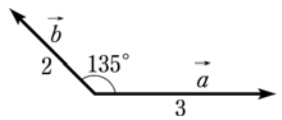
$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

(2)



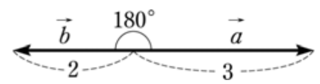
$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

(3)



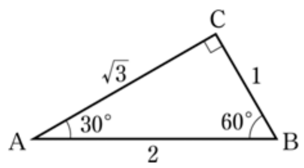
$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

(4)



$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

問25 右の図の直角三角形 ABC について，次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$

$\theta=90^\circ$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㊲　　　　　　）であるといい（㊳　　　　　　）と書く。

ベクトルの垂直と内積
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

問26 基本ベクトル $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ について，$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}$ を求めよ。

内積の性質［1］
$\boxed{1}$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ $\boxed{2}$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert^2$,　$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ $\boxed{3}$　$\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert\leqq\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$

問27 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，次のことを証明せよ。
$\vec{a}\parallel\vec{b}$ ならば $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$ または $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$

内積と成分

（教科書 p.65）

内積と成分
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$

注意　この式は，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときも成り立つ。

例 8 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は
$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

問28 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積を求めよ。

(1) $\vec{a}=(-2,\ 3)$, $\vec{b}=(5,\ 4)$

(2) $\vec{a}=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{2})$, $\vec{b}=(\sqrt{3}+1,\ -\sqrt{2})$

ベクトルのなす角

（教科書 p.66）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より，$\cos\theta$ の値は次のようになる。

（㊴　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$　ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$　）

例 9 ベクトル $\vec{a}=(4,\ 2)$, $\vec{b}=(-3,\ 1)$ のなす角 θ を求めてみよう。

$\cos\theta=$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから，$\theta=$　　　である。

問29 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(3,\ 0)$, $\vec{b}=(-1,\ \sqrt{3})$

(2)　$\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(3,\ -1)$

とくに，$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

（㊵　　　　　　　　　　　　）

問30 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が垂直になるような x, y の値を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-3,\ 1)$, $\vec{b}=(x,\ 6)$

(2)　$\vec{a}=(2,\ y)$, $\vec{b}=(8,\ -y)$

例題 5　$\vec{a}=(2,\ 1)$ に垂直で，大きさが 5 のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

解

問31　$\vec{a}=(-4,\ 3)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

内積の性質

(教科書 p.67)

ベクトルの内積について，さらに，次の性質が成り立つ。

内積の性質［2］
4　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$　　k は実数
5　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
6　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

証明　5を証明する。$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$

とすると，$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$ であるから

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\
&= a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2\\
&= (a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}
\end{aligned}
$$

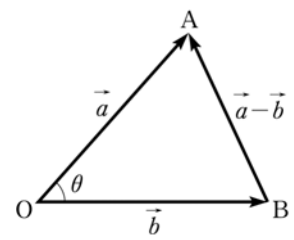
よって　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

問32　内積の性質［2］の4，6を証明せよ。

問33　$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$ を証明せよ。

例 10 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$ を示してみよう。

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=$



問34 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，次の等式を証明せよ。

(1)　$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

(2)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-\left|\vec{b}\right|^2$

例題 6　$|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ のとき，$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$ の値を求めよ。

解

問35　$|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ のとき，$\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|$ の値を求めよ。

応用 例題 7　$|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

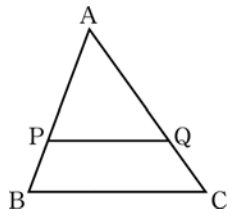
解

問36 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $6\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

問 題

（教科書 p.69）

1 △ABC の辺 AB，AC を $m:n$ に内分する点をそれぞれ P，Q とするとき，次の問に答えよ。



(1) $\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{BC}$ となることを示せ。

2 $\vec{a} = \left(\sqrt{3},\ -1\right)$ と反対向きの単位ベクトルを成分表示せよ。

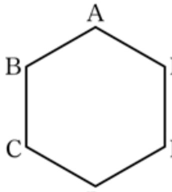
3 $\vec{a} = (6,\ -2)$，$\vec{b} = (0,\ 2)$，$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$ とするとき，次の問に答えよ。

ただし，t は実数とする。

(1) $|\vec{p}| = 10$ となるような t の値を求めよ。

(2) $|\vec{p}|$ の最小値を求めよ。また，そのときの t の値を求めよ。

4　1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF について，次の内積を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

5　次のそれぞれの場合について，ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$

(2)　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{10}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

6　$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{17}$ のとき，次の問に答えよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2)　$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような実数 t の値を求めよ。

7　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ について，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ならば，$\vec{a}\perp\vec{b}$ であることを証明せよ。

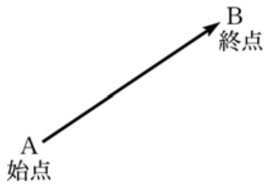
1節 平面上のベクトル

1 ベクトルの意味

有向線分とベクトル

（教科書 p.50）

平面上で，点 A から点 B までの移動は，右の図のように，線分 AB に向きを示す矢印をつけて表すことができる。このような向きのついた線分を（① 有向線分 ）という。



線分 AB の長さを有向線分 AB の（② 大きさ ）または長さという。

また，有向線分 AB において，A を（③ 始点 ），B を（④ 終点 ）という。

有向線分について，その位置を問題にせず，向きと大きさだけに着目したものを（⑤ ベクトル ）という。

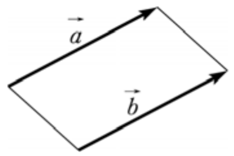
有向線分 AB の表すベクトルを，（⑥ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ）と書く。

そして，有向線分 AB の長さをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の（⑦ 大きさ ）といい，（⑧ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ ）で表す。

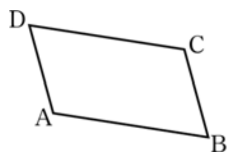
ベクトルの相等

（教科書 p.51）

2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の向きと大きさが一致するとき，これらのベクトルは（⑨ 等しい ）といい，$\vec{a}=\vec{b}$ と表す。



問1 右の平行四辺形で，次のベクトルのうち互いに等しいものを答えよ。



① $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　② $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

③ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　④ $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

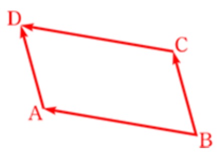
右の図より

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

よって

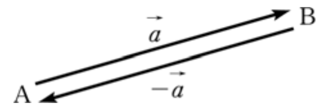
①と③，②と④



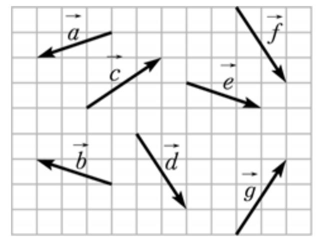
逆ベクトルと零ベクトル

（教科書 p.51）

ベクトル $\vec{a}$ と大きさが同じで，向きが反対のベクトルを $\vec{a}$ の（⑩ 逆ベクトル ）といい，（⑪ $-\vec{a}$ ）で表す。



問2 右の図の中で，等しいベクトルを答えよ。
また，互いに逆ベクトルであるものを答えよ。



右の図より

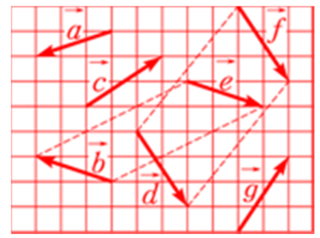
$\vec{d}=\vec{f}$, $\vec{b}=-\vec{e}$

よって

等しいベクトルは

$\vec{d}$ と $\vec{f}$

互いに逆ベクトルであるものは　$\vec{b}$ と $\vec{e}$



始点と終点の一致したベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は大きさが 0 のベクトルと考えられる。このベクトルを（⑫ 零ベクトル ）といい，（⑬ $\vec{0}$ ）で表す。

2 ベクトルの加法・減法・実数倍

ベクトルの加法

（教科書 p.52）

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，1 つの点 A をとり

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$,　$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$

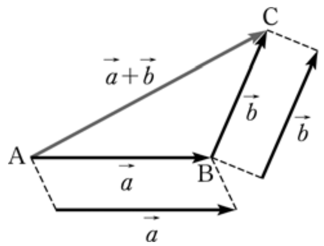
となるように点 B, C をとる。このとき，

$\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（⑭　和　）といい

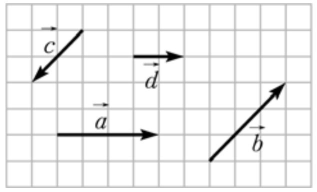
（⑮　$\vec{a}+\vec{b}$　）

と表す。すなわち

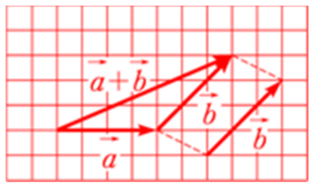
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



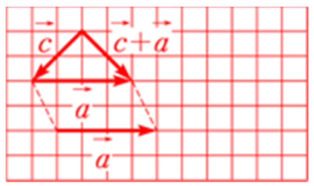
問3　右の図において，次のベクトルを図示せよ。



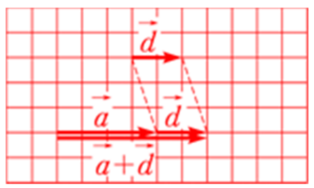
(1)　$\vec{a}+\vec{b}$



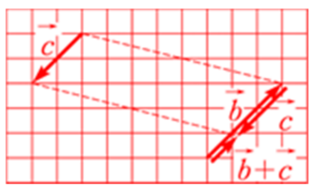
(2)　$\vec{c}+\vec{a}$



(3)　$\vec{a}+\vec{d}$



(4)　$\vec{b}+\vec{c}$



ベクトルの加法については，次のことが成り立つ。

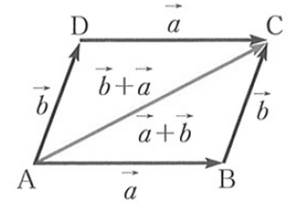
ベクトルの加法		
1	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	交換法則
2	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	結合法則
3	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	
4	$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$	

証明　1 を証明する。ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，平面上に点 A をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ となるように点 B, D をとる。下の図のように平行四辺形 ABCD をつくると

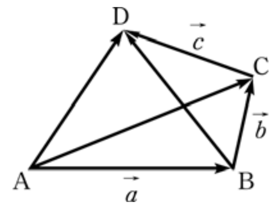
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$

であるから，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ が成り立つ。



問4　右の図を用いて，上の法則 2 が成り立つことを確かめよ。



右の図より

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AD}$

一方

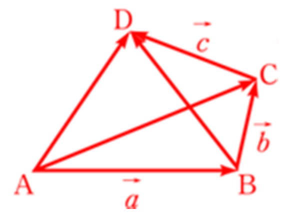
$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AD}$

ゆえに　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

すなわち，結合法則が成り立つ。



問5　平面上に 3 点 A, B, C がある。このとき，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AA}$

$=\vec{0}$

ベクトルの減法

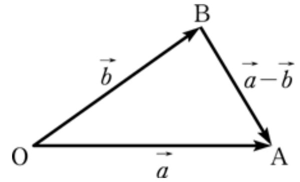
（教科書 p.53）

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，1 つの点 O をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる 2 点 A, B をとると $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（⑯　差　）といい

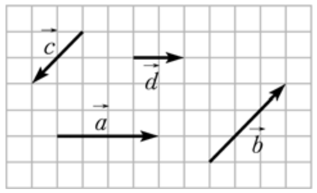
（⑰　$\vec{a}-\vec{b}$　）

と表す。すなわち

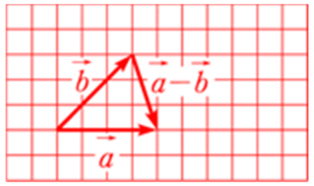
（⑱　$\overrightarrow{\mathbf{OA}}-\overrightarrow{\mathbf{OB}}=\overrightarrow{\mathbf{BA}}$　）



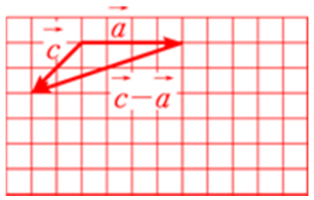
問6 右の図において，次のベクトルを図示せよ。



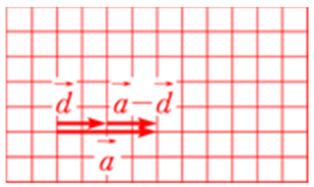
(1)　$\vec{a}-\vec{b}$



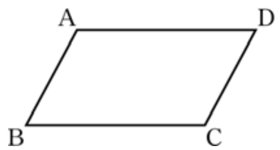
(2)　$\vec{c}-\vec{a}$



(3)　$\vec{a}-\vec{d}$



問7 右の図の平行四辺形において，次のベクトルの差を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{BD}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathbf{BD}}$

ベクトルの実数倍

（教科書 p.54）

ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，$\vec{a}$ の k 倍（⑲　$\boldsymbol{k\vec{a}}$　）を次のように定義する。

(i)　$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき, $k\vec{a}$ は

$k>0$ ならば，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが k 倍のベクトル

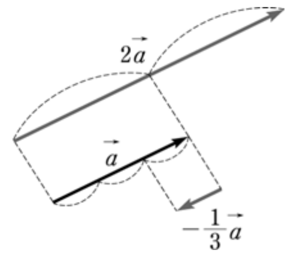
$k<0$ ならば，$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

$k=0$ ならば，$\vec{0}$　すなわち　$0\vec{a}=\vec{0}$

(ii)　$\vec{a}=\vec{0}$ のとき，任意の実数 k に対して　$k\vec{0}=\vec{0}$

例 1 ベクトル $\vec{a}$ に対して，$2\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで大きさが 2 倍のベクトルである。

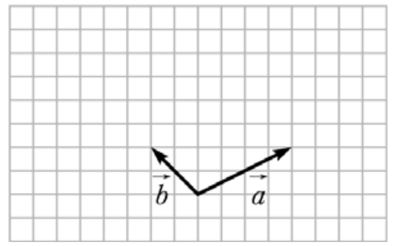
$-\frac{1}{3}\vec{a}$は $\vec{a}$と反対の向きで大きさが $\frac{1}{3}$倍のベクトルである。

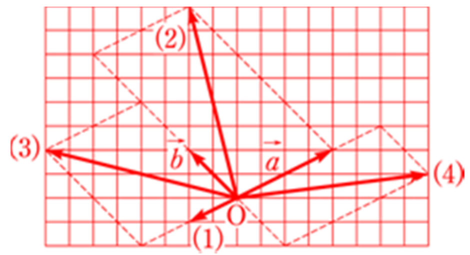


問8 右の図のように $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき, 次のベクトルを図示せよ。

(1)　$-\frac{1}{2}\vec{a}$　　(2)　$\vec{a}+3\vec{b}$

(3)　$-\vec{a}+2\vec{b}$　　(4)　$\frac{3}{2}\vec{a}-\vec{b}$



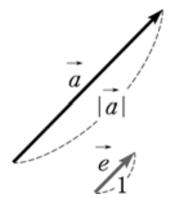


$\boxed{注意}$　$\frac{1}{k}\vec{a}$ を $\frac{\vec{a}}{k}$ と書くことがある。

大きさが 1 のベクトルを（⑳　単位ベクトル　）という。

一般に，$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると，次のようになる。

（㉑　$\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$　）



問9 $|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

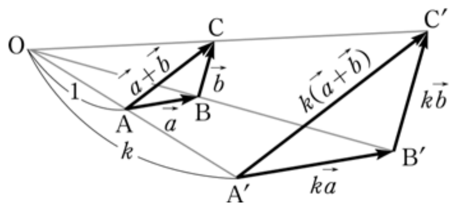
$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{3}\vec{a}$$

実数 k，l に対して，次の法則が成り立つ。

ベクトルの実数倍	
1	$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$
2	$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$
3	$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

問10 次の図を用いて，上の3が成り立つことを確かめよ。



$\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{B'C'}=k\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{A'C'}=k\overrightarrow{AC}$

であるから

$$\begin{aligned}k(\vec{a}+\vec{b})&=k\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}\\&=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}\\&=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}\\&=k\vec{a}+k\vec{b}\end{aligned}$$

例2 $2(\vec{a}-4\vec{b})+3(2\vec{a}+3\vec{b})=2\vec{a}-8\vec{b}+6\vec{a}+9\vec{b}$

$=(2+6)\vec{a}+(-8+9)\vec{b}=8\vec{a}+\vec{b}$

問11 次を計算せよ。

(1) $3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a}$

$=(3+4-2)\vec{a}=5\vec{a}$

(2) $3(\vec{a}+2\vec{b})-5(2\vec{a}-\vec{b})$

$=3\vec{a}+6\vec{b}-10\vec{a}+5\vec{b}$

$=(3-10)\vec{a}+(6+5)\vec{b}$

$=-7\vec{a}+11\vec{b}$

問12 次の式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(1) $\vec{x}-3\vec{b}=-2\vec{x}+9\vec{a}$

$$\begin{aligned}\vec{x}-3\vec{b}&=-2\vec{x}+9\vec{a}\\\vec{x}+2\vec{x}&=9\vec{a}+3\vec{b}\\(1+2)\vec{x}&=9\vec{a}+3\vec{b}\\3\vec{x}&=9\vec{a}+3\vec{b}\\\vec{x}&=3\vec{a}+\vec{b}\end{aligned}$$

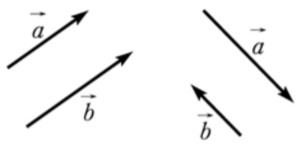
(2) $3(\vec{x}-2\vec{a})-2(\vec{x}-4\vec{b})=2\vec{a}-4\vec{b}-3\vec{x}$

$$\begin{aligned}3(\vec{x}-2\vec{a})-2(\vec{x}-4\vec{b})&=2\vec{a}-4\vec{b}-3\vec{x}\\3\vec{x}-6\vec{a}-2\vec{x}+8\vec{b}&=2\vec{a}-4\vec{b}-3\vec{x}\\(3-2+3)\vec{x}&=(2+6)\vec{a}+(-4-8)\vec{b}\\4\vec{x}&=8\vec{a}-12\vec{b}\\\vec{x}&=2\vec{a}-3\vec{b}\end{aligned}$$

ベクトルの平行

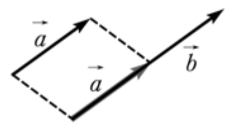
（教科書 p.56）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，同じ向きまたは反対向きであるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㉒ 平行 ）であるといい，（㉓ $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ ）と書く。

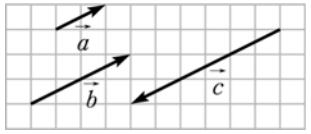


ベクトルの平行の定義と実数倍の定義から，次のことがわかる。

ベクトルの平行条件
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\iff$ $\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k がある



問13 右の図で，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{a}$ で表せ。また，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\vec{c}$ で表せ。



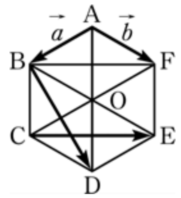
$\boldsymbol{\vec{b} = 2\vec{a}}$，$\boldsymbol{\vec{c} = -3\vec{a}}$，$\boldsymbol{\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{c}}$，$\boldsymbol{\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{c}}$

ベクトルの分解

（教科書 p.56）

例題 1 右の図の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{CE}$　　(2) $\overrightarrow{BD}$



解 (1) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BF}$ であるから　　$\overrightarrow{CE} = \vec{b} - \vec{a}$

(2) 正六角形の中心を O とすると

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB}$

ゆえに　　$\overrightarrow{BD} = \vec{a} + 2\vec{b}$

問14 例題 1 で，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DF}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BO}$

$= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} = \vec{a} + 2\vec{b}$

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF})$

$= -(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$

$= (-\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} = -2\vec{a} - \vec{b}$

一般に，平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

> **分解の一意性**
>
> $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{p} = k\vec{a} + l\vec{b}$ の形にただ 1 通りに表される。ただし，k，l は実数である。

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，次のことが成り立つ。

（㉔　$k\vec{a} + l\vec{b} = k'\vec{a} + l'\vec{b} \iff k = k'$，$l = l'$　）

とくに　（㉕　$k\vec{a} + l\vec{b} = \vec{0} \iff k = l = 0$　）

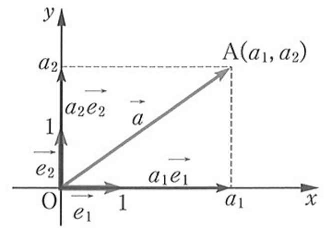
注意　$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㉖　1 次独立　）であるという。

3 ベクトルの成分

座標とベクトル

（教科書 p.58）

O を原点とする座標平面上で，x 軸および y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを，（㉗　基本ベクトル　）といい，それぞれ（㉘　$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$　）で表す。



◀ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ は 1 次独立であるから，この表し方はただ 1 通りである。

いま，与えられたベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ となる点 A をとり，その座標を (a_1, a_2) とすると，$\vec{a}$ は

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$$

と表される。

これを $\vec{a}$ の（㉙　基本ベクトル表示　）という。この a_1，a_2 をそれぞれ $\vec{a}$ の（㉚　x 成分，y 成分　）といい，$\vec{a}$ を

（㉛　$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$　）

と表す。この表し方を，$\vec{a}$ の（㉜　成分表示　）という。

> **ベクトルの表示**
>
> $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$　　基本ベクトル表示
>
> $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$　　成分表示

また，2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ に対して

（㉝　$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1$，$a_2 = b_2$　）

$\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は，線分 OA の長さであるから，成分表示されたベクトルの大きさは，次のようになる。

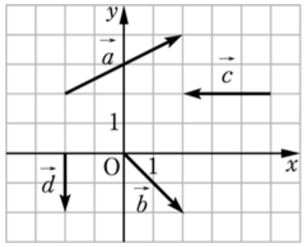
> **ベクトルの大きさ**
>
> $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ のとき　　$|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$

例 3 基本ベクトル表示が $\vec{a} = 4\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$ であるベクトル $\vec{a}$ において

$\vec{a}$ の成分表示は　　$\vec{a} = (4,\ -3)$

$\vec{a}$ の大きさは　　$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

問15 右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を成分表示し，その大きさを求めよ。



$\vec{a}=(4,\ 2)$, $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\vec{b}=(2,\ -2)$, $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\vec{c}=(-3,\ 0)$, $|\vec{c}|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=\sqrt{9}=3$

$\vec{d}=(0,\ -2)$, $|\vec{d}|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=\sqrt{4}=2$

成分による演算

（教科書 p.59）

和，差，実数倍の演算を成分を用いて表すと，次のようになる。

成分による演算		
1	$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$	
2	$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$	
3	$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$	k は実数

例 4 $\vec{a}=(5,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ 4)$ のとき

$\vec{a}+\vec{b}=(5+3, 2+4)=(8, 6)$

$3\vec{a}-2\vec{b}=3(5, 2)-2(3, 4)=(15, 6)-(6, 8)=(9, -2)$

問16 $\vec{a}=(2,\ -3)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$

$=(2,\ -3)+(-1,\ 2)$

$=(2-1,\ -3+2)$

$=(1,\ -1)$

(2) $2\vec{a}-5\vec{b}$

$=2(2,\ -3)-5(-1,\ 2)$

$=(4,\ -6)-(-5,\ 10)$

$=(4+5,\ -6-10)$

$=(9,\ -16)$

(3) $3(2\vec{a}-6\vec{b})-5(\vec{a}-4\vec{b})$

$=6\vec{a}-18\vec{b}-5\vec{a}+20\vec{b}$

$=\vec{a}+2\vec{b}$

$=(2-3)+2(-1,\ 2)$

$=(2-3)+(-2,\ 4)$

$=(2-2,\ -3+4)$

$=(0,\ 1)$

問17 $\vec{a}=(3,\ 0)$, $\vec{b}=(4,\ -5)$ のとき，$\vec{a}-3\vec{x}=2(\vec{x}+\vec{b})$ を満たす $\vec{x}$ の成分表示を求めよ。

$\vec{a}-3\vec{x}=2(\vec{x}+\vec{b})$

$\vec{a}-3\vec{x}=2\vec{x}+2\vec{b}$

$-5\vec{x}=-\vec{a}+2\vec{b}$

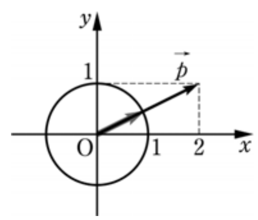
$\vec{x}=\frac{1}{5}(\vec{a}-2\vec{b})$

$=\frac{1}{5}\{(3,\ 0)-2(4,\ -5)\}$

$=\frac{1}{5}\{(3,\ 0)-(8,\ -10)\}$

$=\frac{1}{5}(-5,\ 10)=(-1,\ 2)$

例 5 $\vec{p}=(2,\ 1)$ のとき，$\vec{p}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分表示を求めてみよう。



$|\vec{p}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

であるから，求める単位ベクトルは

$\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{p}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

問18 $\vec{a}=(12,\ -5)$ と同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。

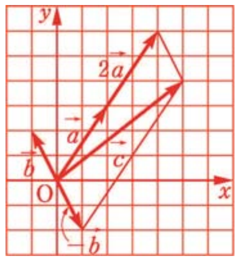
$|\vec{a}|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$

よって，求める単位ベクトルは

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{13}\vec{a}=\left(\mathbf{\frac{12}{13}},\ -\mathbf{\frac{5}{13}}\right)$$

例題 2 $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(5,\ 4)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

解



$k\vec{a}+l\vec{b}=k(2,\ 3)+l(-1,\ 2)$

$=(2k-l, 3k+2l)$

これが $\vec{c}=(5,\ 4)$ に等しいから

$2k-l=5, 3k+2l=4$

これを解いて　$k=2,\ l=-1$

ゆえに　$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$

問19 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，次のベクトルを $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

(1) $\vec{c}=(5,\ 1)$

$k\vec{a}+l\vec{b}=k(1,\ 2)+l(1,\ -1)$

$=(k+l,\ 2k-l)$

これが $\vec{c}=(5,\ 1)$ に等しいから

$k+l=5,\ 2k-l=1$

これを解いて　$k=2,\ l=3$

ゆえに　$\vec{c}=\mathbf{2\vec{a}+3\vec{b}}$

(2) $\vec{d}=(0,\ -3)$

(1)と同様に

$k\vec{a}+l\vec{b}=(k+l,\ 2k-l)$

これが $\vec{d}=(0,\ -3)$ に等しいから

$k+l=0,\ 2k-l=-3$

これを解いて　$k=-1,\ l=1$

ゆえに　$\vec{d}=\mathbf{-\vec{a}+\vec{b}}$

座標と成分表示

（教科書 p.61）

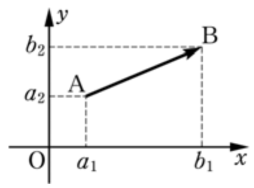
一般に，2 点 A，B に対して，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の成分表示と大きさは次のようになる。

座標と成分表示

$A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ のとき

1 $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(\boldsymbol{b_1-a_1},\ \boldsymbol{b_2-a_2})$

2 $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{(\boldsymbol{b_1-a_1})^2+(\boldsymbol{b_2-a_2})^2}$



問20 3 点 $A(-2,\ 6)$，$B(3,\ -1)$，$C(3, -4)$ について，次のベクトルを成分表示し，その大きさを求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(3-(-2),\ -1-6)$

$=(\mathbf{5},\ \mathbf{-7})$

$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{\mathbf{74}}$

(2) $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{\mathbf{BC}}=(3-3,\ -4-(-1))$

$=(\mathbf{0},\ \mathbf{-3})$

$|\overrightarrow{\mathbf{BC}}|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{9}=\mathbf{3}$

(3) $\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{\mathbf{CA}}=(-2-3,\ 6-(-4))$

$=(\mathbf{-5},\ \mathbf{10})$

$|\overrightarrow{\mathbf{CA}}|=\sqrt{(-5)^2+10^2}=\sqrt{125}=\mathbf{5\sqrt{5}}$

例題 3 平面上に 3 点 A(3, −2), B(7, −1), C(−1, 4) がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ。

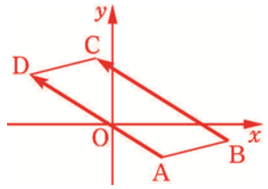
解 点 D の座標を$(x,\ y)$とする。四角形 ABCD が平行四辺形となるための条件は$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$であるから

$$(x-3,\ y-(-2))=(-1-7,\ 4-(-1))$$

よって　$x-3=-8,\ y+2=5$

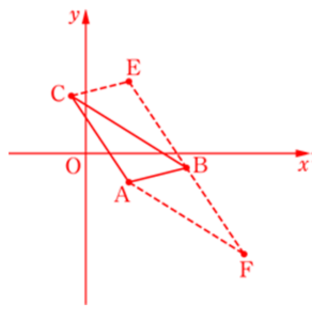
したがって　$x=-5,\ y=3$

ゆえに　D(−5, 3)



問21 例題 3 の 3 点 A, B, C を頂点にもつ平行四辺形は 3 つある。他の 2 つの平行四辺形の残りの頂点の座標を求めよ。

次の図のような 2 点 E，F を考える。



$\mathrm{E}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{F}(x_2,\ y_2)$とすると，四角形ABEC，AFBC は平行四辺形になる。

平行四辺形 ABEC において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CE}}$であるから

$$\left(7-3,\ -1-(-2)\right)=\left(x_1-(-1),\ y_1-4\right)$$

よって　$x_1+1=4,\ y_1-4=1$

したがって　$x_1=3,\ y_1=5$

ゆえに　$\mathbf{E(3,\ 5)}$

平行四辺形 AFBC において，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$であるから

$$\left(x_2-3,\ y_2-(-2)\right)=\left(7-(-1),\ -1-4\right)$$

よって　$x_2-3=8,\ y_2+2=-5$

したがって　$x_2=11,\ y_2=-7$

ゆえに　$\mathbf{F(11,\ -7)}$

ベクトルの平行

（教科書 p.62）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次のことが成り立つ。

ベクトルの平行条件
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\parallel\vec{b}} \iff \boldsymbol{(b_1,\ b_2)=k(a_1,\ a_2)}$ となる実数 $\boldsymbol{k}$ がある

問22 $\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(-3,\ y)$ が平行になるような y の値を求めよ。

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ であるから，k を実数として

$$\vec{b}=k\vec{a}$$

よって　$(-3,\ y)=k(1,\ -2)$

$\qquad=(k,\ -2k)$

したがって　$-3=k,\ y=-2k$

$k=-3$ であるから　$\boldsymbol{y=6}$

例 6 $\vec{a}=(4,\ 3)$ と平行で，大きさが 4 であるベクトル $\vec{b}$ を求めてみよう。

k を実数として　$\vec{b}=k\vec{a}=k(4,\ 3)=(4k,\ 3k)$　……①

となり，$|\vec{b}|=\sqrt{(4k)^2+(3k)^2}=4$ を満たす。

これより，$25k^2=16$ であるから　$k=\pm\dfrac{4}{5}$

よって，①より求めるベクトルは　$\left(\dfrac{16}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$，$\left(-\dfrac{16}{5},\ -\dfrac{12}{5}\right)$

問23 $\vec{a}=(-2,\ 2)$ と平行で，大きさが 3 であるベクトルを求めよ。

求めるベクトルを $\vec{b}$ とすると，k を実数として

$$\vec{b}=k\vec{a}=k(-2,\ 2)=(-2k,\ 2k)\quad\cdots\cdots①$$

となり，$|\vec{b}|=\sqrt{(-2k)^2+(2k)^2}=3$ を満たす。

これより，$8k^2=9$ であるから　$k=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

よって，①より求めるベクトルは

$$\boldsymbol{\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}$$

例題 4　$\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ -4)$, $\vec{c}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような実数 t の値を求めよ。

解　$(\vec{a}+t\vec{b})\,/\!/\,\vec{c}$ であるから，k を実数として $\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$ と表される。

よって　$(3,\ -2)+t(1,\ -4)=k(-1,\ 2)$

$(3+t, -2-4t)=(-k, 2k)$

したがって　$3+t=-k,\ -2-4t=2k$

ゆえに　$t=2$

問24　$\vec{a}=(6,\ -1)$, $\vec{b}=(-3,\ 2)$, $\vec{c}=(1,\ -1)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような実数 t の値を求めよ。

$(\vec{a}+t\vec{b})\,/\!/\,\vec{c}$ であるから，k を実数として

$\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$

と表される。

よって　$(6,\ -1)+t(-3,\ 2)=k(1,\ -1)$

$(6-3t,\ -1+2t)=(k,\ -k)$

したがって　$6-3t=k,\ \ -1+2t=-k$

ゆえに　$\boldsymbol{t=5}$

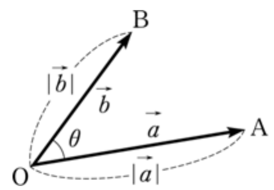
4 ベクトルの内積

（教科書 p.63）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，点 O を始点として，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような点 A, B をとる。このとき，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ を（㉞　**$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角**　）という。

ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。

このとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の（㉟　内積　）といい，（㊱　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}$　）で表す。

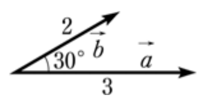


内積の定義
2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

注意　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトルではなく実数である。

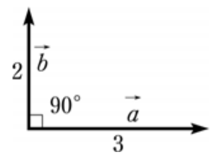
例 7　下の図について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めてみよう。

(1)



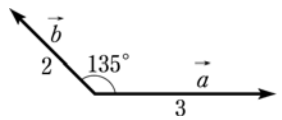
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos30°=3\sqrt{3}$

(2)



$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos90°=0$

(3)

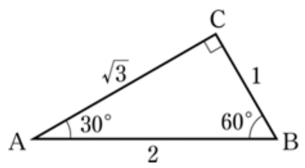


$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos135°=-3\sqrt{2}$

(4)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos180°=-6$

問25 右の図の直角三角形 ABC について，次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times\sqrt{3}\times\cos 30° = \mathbf{3}$

(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \sqrt{3}\times 1\times\cos 90° = \mathbf{0}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\times 1\times\cos 120° = \mathbf{-1}$

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = 2\times\sqrt{3}\times\cos 150° = \mathbf{-3}$

$\theta = 90°$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㊲　垂直　）であるといい（㊳　$\vec{a}\perp\vec{b}$　）と書く。

ベクトルの垂直と内積
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

問26 基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ について，$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}$ を求めよ。

$\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$ であるから　$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = \mathbf{0}$

内積の性質［1］
$\boxed{1}$　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ $\boxed{2}$　$\vec{a}\cdot\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert^2$，　$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ $\boxed{3}$　$\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert \leqq \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$

問27 $\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，次のことを証明せよ。

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ ならば $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$ または $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ であるから　$\theta = 0°$　または $\theta = 180°$

よって　$\cos\theta = 1$　または　$\cos\theta = -1$

ゆえに

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$　または　$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$

内積と成分

（教科書 p.65）

内積と成分
$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ のとき $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

$\boxed{注意}$　この式は，$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも成り立つ。

例 8 $\vec{a} = (2,\ 3)$，$\vec{b} = (-1,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\times(-1) + 3\times 4 = 10$

問28 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。

(1) $\vec{a} = (-2,\ 3)$，$\vec{b} = (5,\ 4)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\times 5 + 3\times 4 = \mathbf{2}$

(2) $\vec{a} = (\sqrt{3}-1,\ \sqrt{2})$，$\vec{b} = (\sqrt{3}+1,\ -\sqrt{2})$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+1) + \sqrt{2}\times(-\sqrt{2})$

$= \mathbf{0}$

ベクトルのなす角

（教科書 p.66）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より，$\cos\theta$ の値は次のようになる。

（㊴ $\boldsymbol{\cos\theta}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$　ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$ ）

例 9 ベクトル $\vec{a}=(4,\ 2)$, $\vec{b}=(-3,\ 1)$ のなす角 θ を求めてみよう。

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{4\times(-3)+2\times1}{\sqrt{4^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+1^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから，$\theta=135°$ である。

問29 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(3,\ 0)$, $\vec{b}=\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$=\frac{3\times(-1)+0\times\sqrt{3}}{\sqrt{3^2+0^2}\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}$$

$$=\frac{-3}{3\times2}=-\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\boldsymbol{\theta=120°}$

(2)　$\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(3,\ -1)$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$=\frac{1\times3+(-2)\times(-1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\boldsymbol{\theta=45°}$

とくに，$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

（㊵ $\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}\iff a_1b_1+a_2b_2=0}$ ）

問30 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が垂直になるような x, y の値を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-3,\ 1)$, $\vec{b}=(x,\ 6)$

$\vec{a}\perp\vec{b}$であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$-3\times x+1\times6=0$

よって　$-3x+6=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=2}$

(2)　$\vec{a}=(2,\ y)$, $\vec{b}=(8,\ -y)$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$2\times8+y\times(-y)=0$

よって　$16-y^2=0$

ゆえに　$\boldsymbol{y=4,\ -4}$

例題 5　$\vec{a}=(2,\ 1)$ に垂直で，大きさが 5 のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

解　$\vec{b}=(x,\ y)$ とすると

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから　$2x+y=0$　……①

$|\vec{b}|=5$ より，$|\vec{b}|^2=25$ であるから　$x^2+y^2=25$　……②

①，②から y を消去して　$x^2=5$

したがって　$x=\pm\sqrt{5}$

$x=\sqrt{5}$ のとき　$y=-2\sqrt{5}$

$x=-\sqrt{5}$ のとき　$y=2\sqrt{5}$

よって，求めるベクトル $\vec{b}$ は　$\left(\sqrt{5},\ -2\sqrt{5}\right)$, $\left(-\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}\right)$

問31　$\vec{a}=(-4,\ 3)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y)$ とすると

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$ であるから

$-4x+3y=0$　……①

$|\vec{e}|=1$ より，$|\vec{e}|^2=1$ であるから

$x^2+y^2=1$　……②

①，②から y を消去して　$x^2=\dfrac{9}{25}$

したがって　$x=\pm\dfrac{3}{5}$

$x=\dfrac{3}{5}$ のとき　$y=\dfrac{4}{5}$

$x=-\dfrac{3}{5}$ のとき　$y=-\dfrac{4}{5}$

よって，求める単位ベクトル $\vec{e}$ は

$\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$，$\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$

内積の性質

（教科書 p.67）

ベクトルの内積について，さらに，次の性質が成り立つ。

内積の性質［2］
4　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$　　k は実数
5　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
6　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

証明　5を証明する。$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$

とすると，$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\&=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2\\&=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

よって　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

問32　内積の性質［2］の4，6を証明せよ。

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ とする。

4　$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ であるから

$$\begin{aligned}(k\vec{a})\cdot\vec{b}&=(ka_1)b_1+(ka_2)b_2\\&=ka_1b_1+ka_2b_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k(\vec{a}\cdot\vec{b})&=k(a_1b_1+a_2b_2)\\&=ka_1b_1+ka_2b_2\end{aligned}$$

$k\vec{b}=(kb_1,\ kb_2)$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(k\vec{b})&=a_1kb_1+a_2kb_2\\&=ka_1b_1+ka_2b_2\end{aligned}$$

よって　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$

6　$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$ であるから

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2\\&=a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2\\&=(a_1c_1+a_2c_2)+(b_1c_1+b_2c_2)\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

よって　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

問33　$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$ を証明せよ。

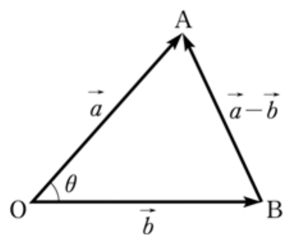
内積の性質4，5を用いる。

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})&=\vec{a}\cdot\{\vec{b}+(-\vec{c})\}\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot(-\vec{c})\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

よって　$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$

例10 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$ を示してみよう。

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\ &= \vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2\end{aligned}$$



問34 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，次の等式を証明せよ。

(1) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\ &= \vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2\end{aligned}$$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-\left|\vec{b}\right|^2$

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) &= \vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2-\left|\vec{b}\right|^2\end{aligned}$$

例題 6 $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ のとき，$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$ の値を求めよ。

解

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2 &= (\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})\\ &= \vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})+2\vec{b}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})\\ &= |\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2\\ &= 2^2+4\times4+4\times3^2=56\end{aligned}$$

$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|\geqq0$ であるから

$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$

問35 $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ のとき，$\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|^2 &= (3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})\\ &= 3\vec{a}\cdot(3\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}\cdot(3\vec{a}-\vec{b})\\ &= 9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2\\ &= 9\times1^2-6\times(-1)+3^2\\ &= 24\end{aligned}$$

$\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|\geqq0$ であるから

$\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{24}=\mathbf{2\sqrt{6}}$

応用例題 7 $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解 $\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるから，次の式が成り立つ。

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+5\vec{b})=0$

したがって　$2\vec{a}\cdot\vec{a}+5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-5\vec{b}\cdot\vec{b}=0$

$2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5\left|\vec{b}\right|^2=0$

ここで，$|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1\times\cos\theta$ であるから

$2\times2^2+3\times2\times1\times\cos\theta-5\times1^2=0$

よって　$3+6\cos\theta=0$

これより　$\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから

$\theta=120^\circ$

問36 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $6\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$\vec{a}-\vec{b}$ と $6\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるから，次の式が成り立つ。

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(6\vec{a}-\vec{b})=0$

したがって

$6\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=0$

$6|\vec{a}|^2-7\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=0$

ここで，　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$,　$|\vec{b}|=3$,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}\times 3\times\cos\theta$ であるから

$6\times(\sqrt{2})^2-7\times\sqrt{2}\times 3\times\cos\theta+3^2=0$

よって　$21-21\sqrt{2}\cos\theta=0$

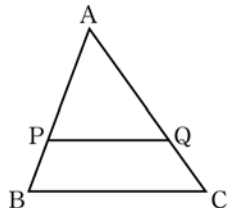
これより　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから　$\boldsymbol{\theta=45°}$

問 題

（教科書 p.69）

1　△ ABC の辺 AB，AC を $m:n$ に内分する点をそれぞれ P，Q とするとき，次の問に答えよ。



(1)　$\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

よって

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}}$$

(2)　$\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{BC}$ となることを示せ。

(1)より

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}$$

$\overrightarrow{PQ}$ が $\overrightarrow{BC}$ の実数倍で表されるから

$\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{BC}$

2　$\vec{a}=\left(\sqrt{3},\ -1\right)$ と反対向きの単位ベクトルを成分表示せよ。

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$$

よって，求める単位ベクトルは

$$-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\frac{1}{2}\vec{a}=\left(\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}}\right)$$

3　$\vec{a}=(6,\ -2)$，$\vec{b}=(0,\ 2)$，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とするとき，次の問に答えよ。

ただし，t は実数とする。

(1)　$|\vec{p}|=10$ となるような t の値を求めよ。

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}=(6,\ -2)+t(0,\ 2)$$
$$=(6,\ -2+2t)$$

$|\vec{p}|=10$ より，$|\vec{p}|^2=10^2$ であるから

$$6^2+(-2+2t)^2=10^2$$
$$t^2-2t-15=0$$

よって　$\boldsymbol{t=-3,\ 5}$

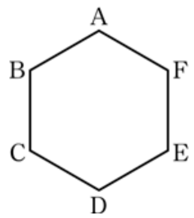
(2)　$|\vec{p}|$ の最小値を求めよ。また，そのときの t の値を求めよ。

$$|\vec{p}|^2=6^2+(-2+2t)^2$$
$$=4t^2-8t+40=4(t-1)^2+36$$

$t=1$ のとき，$|\vec{p}|^2$ は最小値 36 をとるから

$\boldsymbol{t=1}$ のとき，$|\vec{p}|$ は最小値 $\boldsymbol{6}$ をとる。

4 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF について，次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$ (2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$

(3) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$ (4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CE}$

(5) $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}$

$|\overrightarrow{AC}|$，$|\overrightarrow{AE}|$，$|\overrightarrow{CE}|$ を求める。

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$

両辺を 2 乗して

$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BC}|^2$

ここで $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 1\times1\times\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

よって $|\overrightarrow{AC}|^2 = 1^2 + 2\times\dfrac{1}{2} + 1^2 = 3$

したがって $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$

同様に $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{CE}| = \sqrt{3}$

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = 1\times1\times\cos 120^\circ = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} = \sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\cos 60^\circ = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

(3) $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AF}$ より $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF} = \mathbf{0}$

(4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CE} = \sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\cos 120^\circ = \boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$

(5) $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF} = 2\times2\times\cos 60^\circ = \mathbf{2}$

5 次のそれぞれの場合について，ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{6}{3\times4} = \dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから $\boldsymbol{\theta = 60^\circ}$

(2) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{a}-2\vec{b}| = \sqrt{10}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2$

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2 = (\sqrt{10})^2$

$|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 10$

$|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2$ であるから

$(\sqrt{2})^2 - 4\times2 + 4|\vec{b}|^2 = 10$

よって $|\vec{b}| = 2$

ゆえに $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}\times2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから $\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$

6 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{17}$ のとき，次の問に答えよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$(\sqrt{17})^2 = 2^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 3^2$

よって $2\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$

ゆえに $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = 2}$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 2^2 - 2\times2 + 3^2$

$= 9$

ゆえに $\boldsymbol{|\vec{a}-\vec{b}| = 3}$

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような実数 t の値を求めよ。

$\vec{a}+t\vec{b}$と$\vec{a}-\vec{b}$が垂直になるから

$$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

$|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$

よって　　$2^2-2+2t-3^2t=0$

ゆえに　　$\boldsymbol{t=\frac{2}{7}}$

7　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ について，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ならば，$\vec{a}\perp\vec{b}$ であることを証明せよ。

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ より

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから　　$\vec{a}\perp\vec{b}$