1節 数列

1 数列

（教科書 p.6）

数を1列に並べたものを（①　　　　　）といい，数列の各数を（②　　　　　）という。

例1 (1)　正の奇数を順に並べて得られる数列は

(2)　自然数の 2 乗を順に並べて得られる数列は

数列を一般的に表すには，1 つの文字に項の番号を添えて

a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$

のように書く。そして，それぞれこの数列の（③　　　　　），…といい，n 番目の項 a_n を（④　　　　　）という。

また，この数列を簡単に（⑤　　　　　）とも書き表す。

問1　第 n 項が次のように表される数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　$a_n = 2n - 3$

(2)　$a_n = \frac{1}{2n+1}$

(3)　$a_n = (-1)^n$

このように，数列 $\{a_n\}$ において，a_n が n の式で表されるとき，数列のすべての項が求められる。この a_n を数列 $\{a_n\}$ の（⑥　　　　　）という。

例2 (1)　数列 $\{a_n\}$ を

$1 \cdot 2$，$2 \cdot 3$，$3 \cdot 4$，$4 \cdot 5$，$5 \cdot 6$，$\cdots$

とする。この数列の一般項を推定すると

となる。

(2)　数列 $\{a_n\}$ を

-1，2，-3，4，-5，$\cdots$

とする。数列 $\{a_n\}$ の各項の符号を除いて考えると

1，2，3，4，5，$\cdots$

となり，この数列の第 n 項は n であるから，もとの数列の一般項を推定すると

となる。

問2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定せよ。

(1)　1，8，27，64，125，$\cdots$

(2)　$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{11}$，…

(3)　-2，4，-8，16，-32，…

項の個数が有限である数列を（⑦　　　　　　　）といい，項の個数が有限でない数列を（⑧　　　　　　　）という。有限数列では，項の個数を（⑨　　　　　），最後の項を（⑩　　　　　）という。

例 3　3 の倍数で正であるものを小さい方から順に 10 個並べた数列

3，6，9，12，15，18，21，24，27，30

は有限数列で，項数は（　　　　　），末項は（　　　　　）である。

2 等差数列

等差数列

（教科書 p.8）

初項 a から始めて，一定の数 d を次々に加えて得られる数列を（⑪　　　　　　　）といい，d をその等差数列の（⑫　　　　　　）という。

例 4　(1)　正の奇数の列

1，3，5，7，9，…

は，初項1，公差2の等差数列である。

(2)　初項 2，公差 3 の等差数列は

2，5，8，11，14，17，20，23，…

となる。

問3　次の等差数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　初項 5，公差 8

(2)　初項 9，公差 -4

等差数列の一般項

（教科書 p.9）

等差数列の一般項
初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$$

例5 初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項および第 20 項を求めてみよう。一般項は

である。また，第 20 項は

である。

問4 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 25 項を求めよ。

(1) 初項 4，公差 -3

(2) 初項 7，公差 $\frac{1}{2}$

問5 次の等差数列 $\{a_n\}$の$\boxed{}$にあてはまる数を求めよ。また，一般項を求めよ。

(1) $\boxed{}$，30，37，…

(2) 2，$\boxed{}$，-4，-7，…

例題1 第 4 項が 14，第 10 項が 62 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ。また，この数列の一般項を求めよ。

解

問6 第 3 項が -6，第 10 項が 29 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

例6 数列 $\{a_n\}$ において，$a_n = 5n+2$ ならば

$$a_{n+1} - a_n = \{5(n+1)+2\} - (5n+2) = 5$$

よって，差 $a_{n+1} - a_n$ が一定であるから，数列 $\{a_n\}$ は等差数列となる。

また

$$a_1 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$$

したがって，等差数列 $\{a_n\}$ の初項は（　　　　），公差は（　　　　）である。

問7　数列 $\{a_n\}$ において，$a_n = 3n - 4$ ならば，この数列は等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ。

注意　一般項が $a_n = pn + q$ の形で表される数列は等差数列になる。

問8　3 つの数 a，b，c について，次のことが成り立つことを証明せよ。

a，b，c がこの順に等差数列となる　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{2b = a + c}$

3 等差数列の和

等差数列の和

（教科書 p.11）

例 7　等差数列 5，8，11，14，17，⋯ の初項から第 4 項までの和 S_4 は，次のようになる。

$$S_4 = 5 + 8 + 11 + 14 = 38$$

等差数列の和
初項 a，公差 d，項数 n，末項 l の等差数列の和を S_n とすると $\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n(a + l) = \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\}}$

例 8　(1)　初項 23，末項 -5，項数 15 の等差数列の和を S_{15} とすると

$$S_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \{23 + (-5)\} = 135$$

(2)　初項 3，公差 4，項数 20 の等差数列の和を S_{20} とすると

$$S_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \{2 \cdot 3 + (20 - 1) \cdot 4\} = 820$$

問9　次の等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 7，末項 61，項数 10

(2)　初項 -10，公差 4，項数 6

例 9　5 から 31 までの奇数の和 $5+7+9+\cdots+31$ を求めてみよう。

これは，初項 5，公差 2，末項 31 の等差数列の和である。

31 を第 n 項とすると　　$31=5+2(n-1)$

これより，$n=14$ となり，項数は 14 である。

よって，求める和 S_{14} は

問10　次の等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 5，公差 3，末項 53

(2)　公差 -3，末項 4，項数 10

例題 2　初項 3，公差 2 の等差数列において，初項から第何項までの和が 63 になるかを求めよ。

解

問11　初項 21，公差 -3 の等差数列において，初項から第何項までの和が 75 になるかを求めよ。

いろいろな自然数の数列の和

（教科書 p.13）

1 から n までの自然数 1，2，3，…，n の和は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから，次の公式が得られる。

（⑬　　　　　　　　　　　　　　　）

問12　上の公式を用いて，次の和を求めよ。

(1)　1 から 100 までの自然数の和

(2)　101 から 200 までの自然数の和

問13 1 から始まる n 個の奇数の和は，次の式で表されることを示せ。

$$\mathbf{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$$

例題 3 2 桁の自然数のうち，5 で割ると 2 余る数の和を求めよ。

解

問14 2 桁の自然数のうち，次の条件を満たす数の和を求めよ。

(1)　7 で割り切れる

(2)　7 で割ると 3 余る

4 等比数列

等比数列

（教科書 p.14）

初項 a から始めて，一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を（⑭　　　　　　　　　　）といい，r をその等比数列の（⑮　　　　　　　）という。

例10 (1)　等比数列　1, 2, 4, 8, 16, …
の公比は（　　　　　）である。

(2)　初項 1，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列は

となる。

問15 次の等比数列の初項から第 5 項までを求めよ。
(1)　初項 4，公比 3

(2)　初項 8，公比 -1

等比数列の一般項

（教科書 p.15）

等比数列の一般項
初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$

注意　$r \neq 0$ のとき，$r^0 = 1$ と定める。

例11 (1)　初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

(2)　初項 4，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

問16 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
(1)　2, 6, 18, 54, …

(2)　3, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{8}$, …

問17 次の等比数列 $\{a_n\}$ の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めよ。また，一般項を求めよ。
(1)　2, 10, $\boxed{}$, …

(2)　$\boxed{}$, 12, -3, …

例題 4 第3項が28，第5項が112である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解

問18 第3項が18，第5項が162である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

例 12 $a_n = 2^n$，$b_n = 3^n$とするとき，$c_n = a_n b_n$ で定められる数列 $\{c_n\}$ を考えると

となるから，公比が6の等比数列である。

問19 $a_n = 2^n$，$b_n = 5 \cdot 3^n$ とするとき，$c_n = \frac{a_n}{b_n}$ で定められる数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。

問20 0でない3つの数 a，b，c について，次のことが成り立つことを証明せよ。

a，b，c がこの順に等比数列となる　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{b^2 = ac}$

5 等比数列の和

等比数列の和

（教科書 p.17）

等比数列の和
初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は $r \neq 1$ のとき　$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ $r = 1$ のとき　$S_n = na$

例13 初項 6，公比 -2，項数 4 の等比数列の和 S_4 は

問21 次の等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 2，公比 -3，項数 6

(2)　初項 $\frac{3}{25}$，公比 $\frac{4}{3}$，項数 4

例14 初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

問22 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　6，18，54，162，…

(2)　10，$-\frac{5}{2}$，$\frac{5}{8}$，$-\frac{5}{32}$，…

応 用
例題
5

初項から第 3 項までの和が 9，初項から第 6 項までの和が -63 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解

問23 初項から第 3 項までの和が 35，初項から第 6 項までの和が 315 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

参考　複利法

（教科書 p.19）

１年ごとに利子を元金にくり入れ，その合計額を次年の元金として利子を計算する（⑯　　　　　　）について考えてみよう。

金額 a 円を年利率 r で預金したとき

	元金	利息	元利合計[＝元金＋利息]
１年後	a	$a\times r$	$a(1+r)[=a+ar]$
２年後	$a(1+r)$	$a(1+r)\times \mathrm{r}$	$a(1+r)^2$
３年後	$a(1+r)^2$	$a(1+r)^2\times r$	$a(1+r)^3$
‥‥	‥‥	‥‥	‥‥

複利法によれば，1年後，2年後，3年後，‥‥の元利合計は

$a(1+r)$，$a(1+r)^2$，$a(1+r)^3$，$\cdots$

という等比数列になる。

6 和の記号Σ

（教科書 p.20）

と書き表す。すなわち，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ は k が　1，2，3，…，n と変わるときのすべての a_k の和を表す。

例15

(1) $$\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+(2\cdot4-1)$$
$$=1+3+5+7$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

問24　次の和を，例 15 のように記号 $\sum$ を用いずに表せ。

(1) $$\sum_{k=1}^{4}(3k-1)$$

(2) $$\sum_{k=1}^{3}2k^2$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n}2^k$$

例16 数列の和を記号 $\sum$ を用いて表すと，次のようになる。

(1) $1+2+3+\cdots+n=$

(2) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6=$

問25 次の和を記号 $\sum$ を用いて表せ。

(1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

(2) $3+5+7+\cdots+(2n+1)$

(3) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 7$

例17 次の式はいずれも $2^2+3^2+4^2+5^2$ を表している。

$$\sum_{k=2}^{5}k^2,\quad \sum_{j=2}^{5}j^2,\quad \sum_{i=1}^{4}(i+1)^2$$

例18 $r\neq 1$ のとき，初項 a，公比 r の等比数列の和の公式

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

を記号 $\sum$ を用いて表すと $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

問26 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot 3^{k-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2)^k$

累乗の和

（教科書 p.21）

例19 $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\frac{1}{6}\cdot 10\cdot(10+1)\cdot(2\cdot 10+1)=385$

問27 次の和を求めよ。

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

(2) $11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$

問28 等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を利用して

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

が成り立つことを示せ。

累乗の和
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{nc}$　c は定数　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{k}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{k}^2=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{k}^3=\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\right\}^2$

記号 Σ の性質

（教科書 p.22）

記号 $\sum$ の性質
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{b}_k)=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k+\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{b}_k$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{c}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k$　　c は定数

例20 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+4)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}(-3k)+\sum_{k=1}^{n}4$

問29 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k+1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-2)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)$

例21 数列 $2\cdot3,\ 3\cdot4,\ 4\cdot5,\ \cdots$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めてみよう。

この数列の第 k 項は $(k+1)(k+2)$ である。

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$$

問30 数列 $1\cdot 3$，$2\cdot 4$，$3\cdot 5$，$4\cdot 6$，$\cdots$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

7 いろいろな数列

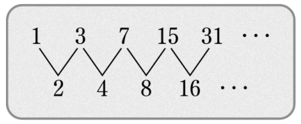
階差数列

（教科書 p.24）

例 22 数列 $\{a_n\}$ を　　$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ \cdots$

とする。この数列は，等差数列でも等比数列でもないが，以下のような考え方で一般項を求めてみよう。

この数列の隣り合う項の差をとると



$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots$

これは，初項 2，公比 2 の等比数列であるから，

すべての自然数 k について　　$a_{k+1} - a_k = 2^k$

が成り立つ。右の計算から

$$
\begin{array}{rl}
\cancel{a_2} - a_1 & = 2 \\
\cancel{a_3} - \cancel{a_2} & = 4 \\
\cancel{a_4} - \cancel{a_3} & = 8 \\
\cdots\cdots & \\
+)\ a_n - \cancel{a_{n-1}} & = 2^{n-1} \\
\hline
a_n - a_1 & = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}
\end{array}
$$

$n \geqq 2$ のとき

ゆえに　　　=

$a_1 = 1$ であるから，$a_n = 2^n - 1$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

一般に，数列 $\{a_n\}$ に対して

$b_n = a_{n+1} - a_n$　　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

として得られる数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の（⑰　　　　　　　　）という。

階差数列を用いて一般項を表す式
数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき $\boldsymbol{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$

例題 6　数列 2, 6, 12, 20, 30, 42, … の一般項を求めよ。

解

問31　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（1）　1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, …

（2）　3, 4, 1, 10, −17, 64, −179, …

数列の和と一般項

（教科書 p.26）

数列の和と一般項
数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると $a_1 = S_1$ $n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

例題 7　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，この数列の一般項を求めよ。$S_n = n^3 - n$

解

問32　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，この数列の一般項を求めよ。

(1)　$S_n = n^2 + 3n$

(2)　$S_n = 3^n - 1$

分数で表された数列の和

（教科書 p.27）

応用例題 8　次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

解

問33　$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$ が成り立つことを利用して，次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

少し複雑な数列

（教科書 p.28）

応用例題 9 $r \neq 1$ のとき，次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1}$$

考え方

解

注意　例題 9 で，$r = 1$ のときは次のようになる。

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

問34 次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-1}$$

応用例題 10 正の奇数の列を次のような群に分け，第 n 群には n 個の数が入るようにする。

1 | 3, 5 | 7, 9, 11 | 13, 15, 17, 19 |…

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

(1)　第 n 群の最初の項を求めよ。

(2)　第 n 群の項の総和を求めよ。

解

問35 自然数の列を次のような群に分ける。

$1,\ 2 \mid 3,\ 4,\ 5,\ 6 \mid 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \mid \cdots$

(1)　第 n 群の最初の項を求めよ。

(2)　第 n 群の項の総和を求めよ。

問 題

（教科書 p.30）

1 初項 8，公差 7 の等差数列には 400 という項はあるか。また，あるとすれば第何項か。

2 第 5 項が 108，第 20 項が -237 の等差数列がある。

（1） この数列の初項と公差を求めよ。

⑵ この数列で，第何項が初めて負になるか。

⑶ この数列の初項から第何項までの和が最も大きくなるか。

3 3 つの数 $x-4$，x，$x+6$ がこの順で等比数列となるとき，x の値を求めよ。

4 第 3 項が 12，第 6 項が 96 の等比数列において，初項から第 n 項までの各項の平方の和を求めよ。ただし，公比は実数とする。

5　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　$1^2,\ 4^2,\ 7^2,\ 10^2,\ 13^2,\ \cdots$

(2)　$2\cdot 3^2,\ 4\cdot 4^2,\ 6\cdot 5^2,\ 8\cdot 6^2,\ 10\cdot 7^2,\ \cdots$

(3)　$1,\ 1+2,\ 1+2+4,\ 1+2+4+8,\ 1+2+4+8+16,\ \cdots$

6 数列 $2,\ 3,\ 7,\ 16,\ 32,\ 57,\ \cdots$ の一般項を求めよ。

7 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^2 - n + 1$ で表されるとき，この数列の一般項を求めよ。

8 次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

9 $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-\sqrt{1}$，　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$，　$\cdots$

が成り立つことを利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ を求めよ。

10　次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = 4\cdot 1 + 7\cdot 4 + 10\cdot 4^2 + 13\cdot 4^3 + \cdots + (3n+1)\cdot 4^{n-1}$$

1節 数列

1 数列

（教科書 p.6）

数を1列に並べたものを（① 数列 ）といい，数列の各数を（② 項 ）という。

例1 (1) 正の奇数を順に並べて得られる数列は

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$

(2) 自然数の 2 乗を順に並べて得られる数列は

$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \cdots$

数列を一般的に表すには，1 つの文字に項の番号を添えて

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$

のように書く。そして，それぞれこの数列の（③ 初項（第 1 項），第 2 項，第 3 項 ），…といい，n 番目の項 a_n を（④ 第 n 項 ）という。

また，この数列を簡単に（⑤ $\{a_n\}$ ）とも書き表す。

問1 第 n 項が次のように表される数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) $a_n = 2n - 3$

$a_1 = 2 \times 1 - 3 = \mathbf{-1}$
$a_2 = 2 \times 2 - 3 = \mathbf{1}$
$a_3 = 2 \times 3 - 3 = \mathbf{3}$
$a_4 = 2 \times 4 - 3 = \mathbf{5}$
$a_5 = 2 \times 5 - 3 = \mathbf{7}$

(2) $a_n = \frac{1}{2n+1}$

$a_1 = \frac{1}{2\times1+1} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

$a_2 = \frac{1}{2\times2+1} = \mathbf{\frac{1}{5}}$

$a_3 = \frac{1}{2\times3+1} = \mathbf{\frac{1}{7}}$

$a_4 = \frac{1}{2\times4+1} = \mathbf{\frac{1}{9}}$

$a_5 = \frac{1}{2\times5+1} = \mathbf{\frac{1}{11}}$

(3) $a_n = (-1)^n$

$a_1 = (-1)^1 = \mathbf{-1}$
$a_2 = (-1)^2 = \mathbf{1}$
$a_3 = (-1)^3 = \mathbf{-1}$
$a_4 = (-1)^4 = \mathbf{1}$
$a_5 = (-1)^5 = \mathbf{-1}$

このように，数列 $\{a_n\}$ において，a_n が n の式で表されるとき，数列のすべての項が求められる。この a_n を数列 $\{a_n\}$ の（⑥ 一般項 ）という。

例2 (1) 数列 $\{a_n\}$ を

$1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ 4\cdot5,\ 5\cdot6,\ \cdots$

とする。この数列の一般項を推定すると

$a_n = n(n+1)$

となる。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ \cdots$

とする。数列 $\{a_n\}$ の各項の符号を除いて考えると

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$

となり，この数列の第 n 項は n であるから，もとの数列の一般項を推定すると

$a_n = (-1)^n \times n$

となる。

問2 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定せよ。

(1) $1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ \cdots$

$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ \cdots$

となるから，この数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定すると

$\boldsymbol{a_n = n^3}$

(2)　$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{11}$，…

分母は

3，5，7，9，11，…

となり，第 n 項は $2n+1$ である。

分子は

1，2，3，4，5，…

となり，第 n 項は n であるから，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定すると

$$\boldsymbol{a_n = \frac{n}{2n+1}}$$

(3)　-2，4，-8，16，-32，…

数列 $\{a_n\}$ の各項の符号を除いて考えると

2，4，8，16，32，…

となり，この数列の第 n 項は 2^n であるから，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定すると

$$a_n = (-1)^n \times 2^n = (-2)^n$$

項の個数が有限である数列を（⑦　有限数列　）といい，項の個数が有限でない数列を（⑧　無限数列　）という。有限数列では，項の個数を（⑨　項数　），最後の項を（⑩　末項　）という。

例 3　3 の倍数で正であるものを小さい方から順に 10 個並べた数列

3，6，9，12，15，18，21，24，27，30

は有限数列で，項数は（　10　），末項は（　30　）である。

2 等差数列

等差数列

（教科書 p.8）

初項 a から始めて，一定の数 d を次々に加えて得られる数列を（⑪　等差数列　）といい，d をその等差数列の（⑫　公差　）という。

例 4　(1)　正の奇数の列

1，3，5，7，9，…

は，初項1，公差2の等差数列である。

(2)　初項 2，公差 3 の等差数列は

2，5，8，11，14，17，20，23，…

となる。

問3　次の等差数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　初項 5，公差 8

5，13，21，29，37

(2)　初項 9，公差 -4

9，5，1，-3，-7

等差数列の一般項

（教科書 p.9）

等差数列の一般項
初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$

例 5 初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項および第 20 項を求めてみよう。一般項は

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 1$$

である。また，第 20 項は

$$a_{20} = 3\cdot 20 - 1 = 59$$

である。

問4 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 25 項を求めよ。

(1)　初項 4，公差 -3

$\boldsymbol{a_n} = 4 + (n-1)\cdot(-3) = \boldsymbol{-3n+7}$

$\boldsymbol{a_{25}} = -3\cdot 25 + 7 = \boldsymbol{-68}$

(2)　初項 7，公差 $\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{a_n} = 7 + (n-1)\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n + \frac{13}{2}}$

$\boldsymbol{a_{25}} = \frac{1}{2}\cdot 25 + \frac{13}{2} = \boldsymbol{19}$

問5 次の等差数列 $\{a_n\}$ の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めよ。また，一般項を求めよ。

(1)　$\boxed{}$，30，37，…

公差を d とおくと

$d = 37 - 30 = 7$

よって，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$30 - 7 = \boldsymbol{23}$

一般項は

$\boldsymbol{a_n} = 23 + (n-1)\cdot 7 = \boldsymbol{7n+16}$

(2)　2，$\boxed{}$，-4，-7，…

公差を d とおくと

$d = -7 - (-4) = -3$

よって，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$2 + (-3) = \boldsymbol{-1}$

一般項は

$\boldsymbol{a_n} = 2 + (n-1)\cdot(-3) = \boldsymbol{-3n+5}$

例題 1 第 4 項が 14，第 10 項が 62 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ。また，この数列の一般項を求めよ。

解 初項を a，公差を d とおくと

第 4 項が 14 であるから　　$a + 3d = 14$

第 10 項が 62 であるから　　$a + 9d = 62$

となる。

これらを連立させて解くと

$a = -10,\quad d = 8$

すなわち，初項は -10，公差は 8 である。

したがって，一般項は

$a_n = -10 + (n-1)\cdot 8 = 8n - 18$

問6 第 3 項が -6，第 10 項が 29 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初項を a，公差を d とおくと

第 3 項が -6 であるから　$a + 2d = -6$

第 10 項が 29 であるから　$a + 9d = 29$

これらを連立させて解くと

$a = -16,\ d = 5$

すなわち，初項は -16，公差は 5 である。

したがって，一般項は

$a_n = -16 + (n-1)\cdot 5 = \boldsymbol{5n - 21}$

例 6 数列 $\{a_n\}$ において，$a_n = 5n + 2$ ならば

$$a_{n+1} - a_n = \{5(n+1) + 2\} - (5n + 2) = 5$$

よって，差 $a_{n+1} - a_n$ が一定であるから，数列 $\{a_n\}$ は等差数列となる。

また

$$a_1 = 5\cdot 1 + 2 = 7$$

したがって，等差数列 $\{a_n\}$ の初項は（　7　），公差は（　5　）である。

問7　数列 $\{a_n\}$ において，$a_n = 3n - 4$ ならば，この数列は等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ。

$$a_{n+1} - a_n = \{3(n+1) - 4\} - (3n - 4)$$
$$= 3$$

よって，差 $a_{n+1} - a_n$ が一定であるから，数列 $\{a_n\}$ は等差数列となる。

また　$a_1 = 3 \cdot 1 - 4 = -1$

したがって，等差数列 $\{a_n\}$ の初項は $\mathbf{-1}$，公差は $\mathbf{3}$ である。

注意　一般項が $a_n = pn + q$ の形で表される数列は等差数列になる。

問8　3 つの数 $a,\ b,\ c$ について，次のことが成り立つことを証明せよ。

$a,\ b,\ c$ がこの順に等差数列となる　$\Longleftrightarrow$　$\mathbf{2b = a + c}$

($\Longrightarrow$ の証明)

a，b，c がこの順に等差数列となるから，$b - a$ と $c - b$ は等しい。

よって　$b - a = c - b$

すなわち　$2b = a + c$

($\Longleftarrow$ の証明)

$2b = a + c$ より，この式を変形して

$b - a = c - b$

$b - a$ と $c - b$ が等しいから，a，b，c はこの順に等差数列となる。

3 等差数列の和

等差数列の和

（教科書 p.11）

例 7　等差数列 5，8，11，14，17，… の初項から第 4 項までの和 S_4 は，次のようになる。

$$S_4 = 5 + 8 + 11 + 14 = 38$$

等差数列の和

初項 a，公差 d，項数 n，末項 l の等差数列の和を S_n とすると

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n(a + l) = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}}$$

例 8　(1)　初項 23，末項 -5，項数 15 の等差数列の和を S_{15} とすると

$$S_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \{23 + (-5)\} = 135$$

(2)　初項 3，公差 4，項数 20 の等差数列の和を S_{20} とすると

$$S_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \{2 \cdot 3 + (20 - 1) \cdot 4\} = 820$$

問9　次の等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 7，末項 61，項数 10

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (7 + 61) = \mathbf{340}$$

(2)　初項 -10，公差 4，項数 6

$$S_6 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \{2 \cdot (-10) + (6 - 1) \cdot 4\} = \mathbf{0}$$

例 9　5 から 31 までの奇数の和 $5+7+9+\cdots+31$ を求めてみよう。

これは，初項 5，公差 2，末項 31 の等差数列の和である。

31 を第 n 項とすると　　$31=5+2(n-1)$

これより，$n=14$ となり，項数は 14 である。

よって，求める和 S_{14} は　　$S_{14}=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot(5+31)=252$

問10　次の等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 5，公差 3，末項 53

53 を第 n 項とすると

$53=5+3(n-1)$

これより，$n=17$ となり，項数は 17 である。

よって，求める和 S_{17} は

$$S_{17}=\frac{1}{2}\cdot 17\cdot(5+53)=\mathbf{493}$$

(2)　公差 -3，末項 4，項数 10

初項を a とおくと

$a+(10-1)\cdot(-3)=4$

これより，$a=31$ となり，初項は 31 である。

よって，求める和 S_{10} は

$$S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(31+4)=\mathbf{175}$$

例題 2　初項 3，公差 2 の等差数列において，初項から第何項までの和が 63 になるかを求めよ。

解　第 n 項までの和が 63 になるとすると，等差数列の和の公式により

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 3+(n-1)\cdot 2\}=63$$

ゆえに　　$n^2+2n-63=0$

$(n+9)(n-7)=0$

これを解いて　　$n=-9,\ 7$

n は自然数であるから，第 7 項までの和が 63 になる。

問11　初項 21，公差 -3 の等差数列において，初項から第何項までの和が 75 になるかを求めよ。

第 n 項までの和が 75 になるとすると，等差数列の和の公式により

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 21+(n-1)\cdot(-3)\}=75$$

ゆえに　　$n^2-15n+50=0$

$(n-5)(n-10)=0$

これを解いて　　$n=5,\ 10$

よって，第 **5** 項，第 **10** 項までの和が 75 になる。

いろいろな自然数の数列の和

（教科書 p.13）

1 から n までの自然数 1，2，3，…，n の和は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから，次の公式が得られる。

（⑬　$\mathbf{1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)}$　）

問12　上の公式を用いて，次の和を求めよ。

(1)　1 から 100 までの自然数の和

$$\frac{1}{2}\cdot 100\cdot(100+1)=\mathbf{5050}$$

(2)　101 から 200 までの自然数の和

$$\frac{1}{2}\cdot 200\cdot(200+1)-5050=\mathbf{15050}$$

問13 1 から始まる n 個の奇数の和は，次の式で表されることを示せ。

$$\mathbf{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$$

初項 1，末項 $2n-1$，項数 n の等差数列の和であるから

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

$$=\frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}=\frac{1}{2}n\cdot 2n=n^2$$

ゆえに　$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

〔別証〕初項1，公差2，項数n の等差数列の和であるから

$$1+3+5+:::+(2n-1)$$

$$=\frac{1}{2}n\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 2\}=\frac{1}{2}n\cdot 2n=n^2$$

例題 3　2 桁の自然数のうち，5 で割ると 2 余る数の和を求めよ。

解　5 で割ると 2 余る 2 桁の自然数を並べたものは，公差 5 の等差数列で，初項は 12 であるから，一般項は

$$12+5(n-1)=5n+7$$

10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
……	……	……	……	……

ここで，$5n+7\leqq 99$ を満たす最大の自然数 n は

$$n\leqq\frac{92}{5}=18.4$$

よって　$n=18$

求める数の和は，初項 12，公差 5，項数 18 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 18\cdot\{2\cdot 12+(18-1)\cdot 5\}=981$$

問14 2 桁の自然数のうち，次の条件を満たす数の和を求めよ。

(1)　7 で割り切れる

7 で割り切れる 2 桁の自然数を並べたものは，公差 7 の等差数列で，初項は 14 であるから，一般項は

$$14+7(n-1)=7n+7$$

ここで，$7n+7\leqq 99$ を満たす最大の自然数 n は

$$n\leqq\frac{92}{7}=13.1\cdots$$

よって　$n=13$

求める数の和は，初項 14，公差 7，項数 13 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot\{2\cdot 14+(13-1)\cdot 7\}=\mathbf{728}$$

(2)　7 で割ると 3 余る

7 で割ると 3 余る 2 桁の自然数を並べたものは，公差 7 の等差数列で，初項は 10 であるから，一般項は

$$10+7(n-1)=7n+3$$

ここで，$7n+3\leqq 99$ を満たす最大の自然数 n は

$$n\leqq\frac{96}{7}=13.7\cdots$$

よって　$n=13$

求める数の和は，初項 10，公差 7，項数 13 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot\{2\cdot 10+(13-1)\cdot 7\}=\mathbf{676}$$

4 等比数列

等比数列

（教科書 p.14）

初項 a から始めて，一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を（⑭　等比数列　）といい，r をその等比数列の（⑮　公比　）という。

例10 (1)　等比数列　1，2，4，8，16，…
の公比は（　2　）である。

(2)　初項 1，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列は

$1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad -\frac{1}{8},\quad \frac{1}{16},\quad -\frac{1}{32},\quad \cdots$

となる。

問15　次の等比数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　初項 4，公比 3

4，12，36，108，324

(2)　初項 8，公比 −1

8，−8，8，−8，8

等比数列の一般項

（教科書 p.15）

等比数列の一般項
初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$

注意　$r \neq 0$ のとき，$r^0 = 1$ と定める。

例11 (1)　初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

(2)　初項 4，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

問16　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　2，6，18，54，…

初項 2，公比 $\frac{6}{2} = 3$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$

(2)　3，$-\frac{3}{2}$，$\frac{3}{4}$，$-\frac{3}{8}$，…

初項 3，公比 $-\frac{3}{2} \div 3 = -\frac{1}{2}$ の等比数列$\{a_n\}$ の一般項は

$\boldsymbol{a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

問17　次の等比数列 $\{a_n\}$ の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めよ。また，一般項を求めよ。

(1)　2，10，$\boxed{}$，…

公比を r とおくと　$r = \frac{10}{2} = 5$

よって，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$10 \times 5 = \boldsymbol{50}$

したがって，一般項は

$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 5^{n-1}}$

(2)　$\boxed{}$，12，−3，…

公比を r とおくと　$r = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$

よって，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$12 \div \left(-\frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{-48}$

したがって，一般項は

$\boldsymbol{a_n = -48 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$

例題 4　第 3 項が 28，第 5 項が 112 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解　初項を a，公比を rとおくと

第 3 項が 28 であるから　　$ar^2 = 28$　……①

第 5 項が 112 であるから　　$ar^4 = 112$　……②

となる。

②÷①より　　$r^2 = 4$

したがって　　$r = \pm 2$

(i)　$r = 2$ のとき

①に代入して　　$a = 7$

よって　　$a_n = 7 \cdot 2^{n-1}$

(ii)　$r = -2$ のとき

①に代入して　　$a = 7$

よって　　$a_n = 7 \cdot (-2)^{n-1}$

(i)，(ii) より，求める一般項は

$a_n = 7 \cdot 2^{n-1}$　または　$a_n = 7 \cdot (-2)^{n-1}$

問18　第 3 項が 18，第 5 項が 162 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初項を a，公比を r とおくと

第 3 項が 18 であるから

$ar^2 = 18$　……①

第 5 項が 162 であるから

$ar^4 = 162$　……②

②÷①より　　$r^2 = 9$

したがって　　$r = \pm 3$

(i)　$r = 3$ のとき

①に代入して　　$a = 2$

よって　　$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

(ii)　$r = -3$ のとき

①に代入して　　$a = 2$

よって　　$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$

(i)，(ii) より，求める一般項は

$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$　または$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}}$

例 12　$a_n = 2^n$，$b_n = 3^n$とするとき，$c_n = a_n b_n$ で定められる数列 $\{c_n\}$ を考えると

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1} \cdot 3^{n+1}}{2^n \cdot 3^n} = 6$$

となるから，公比が6 の等比数列である。

問19　$a_n = 2^n$，$b_n = 5 \cdot 3^n$ とするとき，$c_n = \frac{a_n}{b_n}$ で定められる数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。

$c_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2^n}{5 \cdot 3^n}$ であるから

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1}}{5 \cdot 3^{n+1}} \div \frac{2^n}{5 \cdot 3^n}$$

$$= \frac{2^{n+1} \cdot 5 \cdot 3^n}{5 \cdot 3^{n+1} \cdot 2^n} = \frac{2}{3}$$

となるから，公比が $\frac{2}{3}$ の等比数列である。

問20　0 でない 3 つの数 a，b，c について，次のことが成り立つことを証明せよ。

a，b，c がこの順に等比数列となる　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{b^2 = ac}$

($\Rightarrow$ の証明)

a，b，c がこの順に等比数列となるから，$\frac{b}{a}$ と $\frac{c}{b}$ は等しい。

よって　　$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

すなわち　　$b^2 = ac$

($\Leftarrow$ の証明)

$b^2 = ac$ であり，a，b，c のいずれも 0 でないから，

この式を変形すると　　$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$\frac{b}{a}$ と $\frac{c}{b}$ が等しいから，a，b，c はこの順に等比数列となる。

5 等比数列の和

等比数列の和

（教科書 p.17）

等比数列の和
初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は $r \neq 1$ のとき　$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ $r = 1$ のとき　$S_n = na$

例 13 初項 6，公比 -2，項数 4 の等比数列の和 S_4 は

$$S_4 = \frac{6\{1-(-2)^4\}}{1-(-2)} = \frac{6\cdot(-15)}{3} = -30$$

問21 次の等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 2，公比 -3，項数 6

$$S_6 = \frac{2\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)} = \frac{2\cdot(-728)}{4} = \mathbf{-364}$$

(2)　初項 $\frac{3}{25}$，公比 $\frac{4}{3}$，項数 4

$$S_4 = \frac{\frac{3}{25}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^4-1\right\}}{\frac{4}{3}-1} = \frac{\frac{3}{25}\cdot\frac{175}{81}}{\frac{1}{3}} = \mathbf{\frac{7}{9}}$$

例 14 初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = 3(2^n-1)$$

問22 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　6，18，54，162，…

初項 6，公比 $\frac{18}{6} = 3$ の等比数列であるから

$$S_n = \frac{6(3^n-1)}{3-1} = \mathbf{3(3^n-1)}$$

(2)　10，$-\frac{5}{2}$，$\frac{5}{8}$，$-\frac{5}{32}$，…

初項 10，公比 $\left(-\frac{5}{2}\right) \div 10 = -\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$S_n = \frac{10\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \mathbf{8\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}$$

応用例題 5 初項から第 3 項までの和が 9，初項から第 6 項までの和が -63 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解 初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ のとき　$S_3=9$ より　$3a=9$

$S_6=-63$ より　$6a=-63$

ゆえに，これらを同時に満たす a は存在しない。

よって，$r\neq 1$ であるから

$S_3=9$ より　$\frac{a(1-r^3)}{1-r}=9$　……①

$S_6=-63$ より　$\frac{a(1-r^6)}{1-r}=-63$　……②

②より　$\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=-63$

これに①を代入して　$9(1+r^3)=-63$

$1+r^3=-7$

$r^3=-8$

r は実数であるから　$r=-2$

これを①に代入して　$a=3$

ゆえに，この等比数列の初項は 3，公比は -2 である。

問23 初項から第 3 項までの和が 35，初項から第 6 項までの和が 315 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ のとき

$S_3=35$ より　$3a=35$

$S_6=315$ より　$6a=315$

ゆえに，これらを同時に満たす a は存在しない。

よって，$r\neq 1$ であるから

$S_3=35$ より　$\frac{a(1-r^3)}{1-r}=35$　……①

$S_6=315$ より　$\frac{a(1-r^6)}{1-r}=315$　……②

②より　$\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=315$

これに①を代入して　$35(1+r^3)=315$

$1+r^3=9$

$r^3=8$

r は実数であるから　$r=2$

これを①に代入して　$a=5$

ゆえに，この等比数列の初項は **5**，公比は **2** である。

参考　複利法

（教科書 p.19）

１年ごとに利子を元金にくり入れ，その合計額を次年の元金として利子を計算する（⑯　　複利法　　）について考えてみよう。

金額 a 円を年利率 r で預金したとき

	元金	利息	元利合計[＝元金＋利息]
１年後	a	$a\times r$	$a(1+r)[=a+ar]$
２年後	$a(1+r)$	$a(1+r)\times r$	$a(1+r)^2$
３年後	$a(1+r)^2$	$a(1+r)^2\times r$	$a(1+r)^3$
....	....	....	....

複利法によれば，1年後，2年後，3年後，･･･の元利合計は

$a(1+r)$，$a(1+r)^2$，$a(1+r)^3$，･･･

という等比数列になる。

6 和の記号 Σ

（教科書 p.20）

と書き表す。すなわち，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ は k が　1，2，3，…，n と変わるときのすべての a_k の和を表す。

例15 (1)

$$\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+(2\cdot4-1)$$
$$=1+3+5+7$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

問24 次の和を，例 15 のように記号 Σ を用いずに表せ。

(1) $\sum_{k=1}^{4}(3k-1)$

$=(3\cdot1-1)+(3\cdot2-1)+(3\cdot3-1)+(3\cdot4-1)$

$=\mathbf{2+5+8+11}$

(2) $\sum_{k=1}^{3}2k^2$

$=2\cdot1^2+2\cdot2^2+2\cdot3^2$

$=\mathbf{2+8+18}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}2^k$

$=\mathbf{2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n}$

例16 数列の和を記号 $\sum$ を用いて表すと，次のようになる。

（1）$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$

（2）$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6=\sum_{k=1}^{5} k(k+1)$

問25 次の和を記号 $\sum$ を用いて表せ。

（1）$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

$=\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k^3}$

（2）$3+5+7+\cdots+(2n+1)$

$=\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{2k+1})$

（3）$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 7$

$=\sum_{k=1}^{5} \boldsymbol{k(k+2)}$

例17 次の式はいずれも $2^2+3^2+4^2+5^2$ を表している。

$$\sum_{k=2}^{5} k^2, \quad \sum_{j=2}^{5} j^2, \quad \sum_{i=1}^{4} (i+1)^2$$

例18 $r\neq 1$ のとき，初項 a，公比 r の等比数列の和の公式

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

を記号 $\sum$ を用いて表すと　$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

問26 次の和を求めよ。

（1）$\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^{k-1}$

$=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=\boldsymbol{3^n-1}$

（2）$\sum_{k=1}^{n} (-2)^k$

$=\sum_{k=1}^{n} \{-2\cdot(-2)^{k-1}\}$

$=\frac{-2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$

$=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\{1-(-2)^n\}}$

累乗の和

（教科書 p.21）

例19 $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\frac{1}{6}\cdot 10\cdot(10+1)\cdot(2\cdot 10+1)=385$

問27 次の和を求めよ。

（1）$1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

$=\frac{1}{6}\cdot 20\cdot(20+1)\cdot(2\cdot 20+1)=\boldsymbol{2870}$

（2）$11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

$=2870-\frac{1}{6}\cdot 10\cdot(10+1)\cdot(2\cdot 10+1)$

$=2870-385=\boldsymbol{2485}$

問28　等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を利用して

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

が成り立つことを示せ。

等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ において

$k=1$ とすると

$2^4-1^4=4\cdot 1^3+6\cdot 1^2+4\cdot 1+1$

$k=2$ とすると

$3^4-2^4=4\cdot 2^3+6\cdot 2^2+4\cdot 2+1$

$k=3$ とすると

$4^4-3^4=4\cdot 3^3+6\cdot 3^2+4\cdot 3+1$

…………………

$k=n$ とすると

$(n+1)^4-n^4=4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1$

これら n 個の等式の辺々を加えると

$$(n+1)^4-1^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

よって

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n}k^3&=(n+1)^4-1-6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\\&=(n+1)^4-1-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\\&=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)\\&=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}\\&=(n+1)(n^3+n^2)\\&=n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

ゆえに　$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^3&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\\&=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2\end{aligned}$$

累乗の和	
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c=nc$　　c は定数	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

記号 Σ の性質

（教科書 p.22）

記号 ∑ の性質
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$　　c は定数

例20

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+4)&=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}(-3k)+\sum_{k=1}^{n}4\\&=\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n\\&=\frac{1}{6}n\{(n+1)+(2n+1)-9(n+1)+24\}\\&=\frac{1}{3}n(n^2-3n+8)\end{aligned}$$

問29　次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k+1)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}5k+\sum_{k=1}^{n}1$

$\displaystyle=5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$\displaystyle=5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n\{5(n+1)+2\}$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(5n+7)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-2)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k-2)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)-2n$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-3(n+1)-12\}$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(2n^2-14)=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2-7)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-2\}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2)$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)}$

例21 数列 $2\cdot3,\ 3\cdot4,\ 4\cdot5,\ \cdots$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めてみよう。

この数列の第 k 項は $(k+1)(k+2)$ である。

よって，求める和 S_n は

$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+9(n+1)+12\}$

$\displaystyle=\frac{1}{3}n(n^2+6n+11)$

問30 数列 $1\cdot3,\ 2\cdot4,\ 3\cdot5,\ 4\cdot6,\ \cdots$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

この数列の第 k 項は $k(k+2)$ である。

よって，求める和 S_n は

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} k(k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k^2+2k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)}
\end{aligned}
$$

7 いろいろな数列

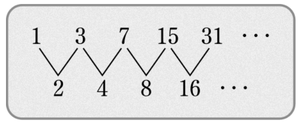
階差数列

（教科書 p.24）

例 22 数列 $\{a_n\}$ を　　$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ \cdots$

とする。この数列は，等差数列でも等比数列でもないが，以下のような考え方で一般項を求めてみよう。

この数列の隣り合う項の差をとると



$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots$

これは，初項 2，公比 2 の等比数列であるから，

すべての自然数 k について　　$a_{k+1}-a_k=2^k$

が成り立つ。右の計算から

$$
\begin{aligned}
\cancel{a_2} - a_1 &= 2 \\
\cancel{a_3} - \cancel{a_2} &= 4 \\
\cancel{a_4} - \cancel{a_3} &= 8 \\
&\cdots\cdots \\
+)\ a_n - \cancel{a_{n-1}} &= 2^{n-1} \\
\hline
a_n - a_1 &= 2+4+8+\cdots+2^{n-1}
\end{aligned}
$$

$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
&a_n - a_1 \\
&= 2+4+8+\cdots+2^{n-1} \\
&= \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} \\
&= 2^n - 2
\end{aligned}
$$

ゆえに　　$a_n = a_1 + (2^n-2) = 1 + (2^n-2) = 2^n - 1$

$a_1 = 1$ であるから，$a_n = 2^n - 1$ は $n=1$ のときも成り立つ。

一般に，数列 $\{a_n\}$ に対して

$b_n = a_{n+1} - a_n$　　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

として得られる数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の（⑰　　階差数列　　）という。

階差数列を用いて一般項を表す式
数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき $\boldsymbol{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$

例題 6　列 2, 6, 12, 20, 30, 42, … の一般項を求めよ。

解　この数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$とすると，$\{b_n\}$ は

$4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \cdots$

となる。

これは，初項 4，公差 2 の等差数列であるから

$b_n = 4 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 2$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+2) = 2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 2$$

$$= 2 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + 2(n-1) = n(n+1)$$

$a_1 = 2$ であるから，$a_n = n(n+1)$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$a_n = n(n+1)$

問31　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, …

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots$

これは，初項 1，公差 2 の等差数列であるから

$b_n = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 1$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 1 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n - (n-1)$$

$$= n^2 - 2n + 2$$

$a_1 = 1$ であるから，$a_n = n^2 - 2n + 2$ は$n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n = n^2 - 2n + 2}$

(2)　3, 4, 1, 10, −17, 64, −179, …

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

$1,\ -3,\ 9,\ -27,\ 81,\ -243,\ \cdots$

これは，初項 1，公比 −3 の等比数列であるから

$b_n = 1\cdot(-3)^{n-1} = (-3)^{n-1}$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(-3)^{k-1}$$

$$= 3 + \frac{1\cdot\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)}$$

$$= 3 + \frac{1}{4}\{1-(-3)^{n-1}\}$$

$$= \frac{1}{4}\{13-(-3)^{n-1}\}$$

$a_1 = 3$ であるから，

$a_n = \frac{1}{4}\{13-(-3)^{n-1}\}$ は

$n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{4}\{13-(-3)^{n-1}\}}$

数列の和と一般項

（教科書 p.26）

数列の和と一般項
数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると $a_1 = S_1$ $n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

例題 7　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，この数列の一般項を求めよ。$S_n = n^3 - n$

解　$a_1 = S_1 = 1^3 - 1 = 0$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^3 - n) - \{(n-1)^3 - (n-1)\} \\ &= 3n(n-1) \end{aligned}$$

$a_1 = 0$ であるから，$a_n = 3n(n-1)$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$a_n = 3n(n-1)$

問32　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，この数列の一般項を求めよ。

(1)　$S_n = n^2 + 3n$

$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

$a_1 = 4$ であるから，$a_n = 2n + 2$ は$n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = 2n + 2}$

(2)　$S_n = 3^n - 1$

$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \\ &= 3 \cdot 3^{n-1} - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

$a_1 = 2$ であるから，$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$

分数で表された数列の和

（教科書 p.27）

応用例題 8　次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

解

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

問33　$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$ が成り立つことを利用して，次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} = \boldsymbol{\frac{2n}{2n+1}} \end{aligned}$$

少し複雑な数列

（教科書 p.28）

応用例題 9

$r \neq 1$ のとき，次の和 S_n を求めよ。

$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1}$

考え方 等比数列の和の公式の導き方と同様に $S_n - rS_n$ を計算する。

解

$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1}$ ……①

①の両辺に r を掛けて

$rS_n = \quad r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n$ ……②

①－②より

$(1-r)S_n = (1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}) - nr^n$

$r \neq 1$ であるから

$$(1-r)S_n = \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$

$$= \frac{1 - r^n - nr^n(1-r)}{1-r}$$

$$= \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{1-r}$$

よって

$$S_n = \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

注意 例題 9 で，$r = 1$ のときは次のようになる。

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

問34 次の和 S_n を求めよ。

$S_n = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-1}$

$S_n = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-1}$ ……①

①の両辺に 3 を掛けて

$3S_n = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + \cdots + 2(n-1) \cdot 3^{n-1} + 2n \cdot 3^n$ ……②

①－②より

$-2S_n = 2(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) - 2n \cdot 3^n$

$$= 2 \cdot \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3-1} - 2n \cdot 3^n$$

$= 3^n - 1 - 2n \cdot 3^n$

$= -(2n-1) \cdot 3^n - 1$

よって　$\boldsymbol{S_n = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{2}}$

応用例題 10

正の奇数の列を次のような群に分け，第 n 群には n 個の数が入るようにする。

1　| 3, 5　| 7, 9, 11 | 13, 15, 17, 19 | …

第 1 群　第 2 群　第 3 群　　第 4 群

(1)　第 n 群の最初の項を求めよ。

(2)　第 n 群の項の総和を求めよ。

解

(1)　$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる奇数の個数は

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n$$

ゆえに，第 n 群の最初の項は，奇数の列の

$$\frac{1}{2}(n-1)n + 1 = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$$

番目である。

また，k 番目の奇数は $2k-1$ であるから，求める数は

$$2 \cdot \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) - 1 = n^2 - n + 1$$

これは，$n = 1$ のときも成り立つ。

(2)　第 n 群は初項 $n^2 - n + 1$，公差 2，項数 n の等差数列であるから，その和は

$\frac{1}{2}n\{2(n^2 - n + 1) + (n-1) \cdot 2\} = n^3$

問35　自然数の列を次のような群に分ける。

1, 2 | 3, 4, 5, 6 | 7, 8, 9, 10, 11, 12 | …

(1)　第 n 群の最初の項を求めよ。

第 n 群の項の個数は $2n$ であるから，$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = n(n-1)$$

ゆえに，第 n 群の最初の項は

$$n(n-1)+1 = \boldsymbol{n^2 - n + 1}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

(2)　第 n 群の項の総和を求めよ。

第 n 群は初項 n^2-n+1，公差 1，項数 $2n$ の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2} \cdot 2n\{2(n^2-n+1)+(2n-1)\cdot 1\}$$

$$= \boldsymbol{n(2n^2+1)}$$

〔別解〕第 n 群の項の総和S を求めるには，第 1 群から第 n 群までの項の総和 T から第 1 群から第$(n-1)$ 群までの項の総和 U を引けばよい。

第 1 群から第 n 群までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 \cdot \frac{1}{2}(n+1)n = n(n+1)$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$S = T - U = \sum_{k=1}^{n(n+1)} k - \sum_{k=1}^{n(n-1)} k$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)\{n(n+1)+1\} - \frac{1}{2}n(n-1)\{n(n-1)+1\}$$

$$= \frac{1}{2}n\{(n+1)(n^2+n+1)-(n-1)(n^2-n+1)\}$$

$$= \frac{1}{2}n(4n^2+2) = n(2n^2+1)$$

これは，$n = 1$ のときも成り立つ。

問 題

（教科書 p.30）

1　初項 8，公差 7 の等差数列には 400 という項はあるか。また，あるとすれば第何項か。

初項 8，公差 7 の等差数列の第 n 項が 400 であるとすると

$8+(n-1)\cdot 7=400$

よって　$n=57$

ゆえに，この等差数列には 400 という項が，第**57** 項にある。

2　第 5 項が 108，第 20 項が -237 の等差数列がある。

(1)　この数列の初項と公差を求めよ。

初項を a，公差を d とおくと

第 5 項が 108 であるから

$a+4d=108$

第 20 項が -237 であるから

$a+19d=-237$

これらを連立させて解くと

$a=200$，$d=-23$

ゆえに　初項は **200**，公差は **−23**

(2)　この数列で，第何項が初めて負になるか。

この数列の第 n 項を a_n とすると

$a_n=200+(n-1)\cdot(-23)$

$=-23n+223$

$a_n<0$ となる条件は

$-23n+223<0$

$n>\dfrac{223}{23}=9.6\cdots$

ゆえに，第 **10** 項が初めて負になる。

(3)　この数列の初項から第何項までの和が最も大きくなるか。

(2) より，この数列の初項から第 9 項までが正で，第 10 項からは負である。

ゆえに，正の項のみをすべて加えれば和が最も大きくなるから，初項から第 **9** 項までの和が最も大きくなる。

3　3 つの数 $x-4$，x，$x+6$ がこの順で等比数列となるとき，x の値を求めよ。

$x-4$，x，$x+6$ がこの順に等比数列となるから

$x^2=(x-4)(x+6)$

$-2x=-24$

よって　$\boldsymbol{x=12}$

4　第 3 項が 12，第 6 項が 96 の等比数列において，初項から第 n 項までの各項の平方の和を求めよ。ただし，公比は実数とする。

初項を a，公比を r とおくと

第 3 項が 12 であるから　$ar^2=12$　……①

第 6 項が 96 であるから　$ar^5=96$　……②

②÷①より　$r^3=8$

r は実数であるから　$r=2$

これを①に代入して　$a=3$

よって，第 n 項は　$3\cdot 2^{n-1}$

ゆえに，各項を平方して得られる数列の第 n 項は

$(3\cdot 2^{n-1})^2=9\cdot 4^{n-1}$

よって，初項 9，公比 4 の等比数列である。

したがって，求める和は

$\dfrac{9(4^n-1)}{4-1}=\boldsymbol{3(4^n-1)}$

5　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

（1）　1^2，4^2，7^2，10^2，13^2，$\cdots$

数列 $\{a_n\}$ の各項の指数を除いて考えると

1，4，7，10，13，$\cdots$

となり，この数列の第 n 項は

$1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=\boldsymbol{(3n-2)^2}$

また，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2&=\sum_{k=1}^{n}(9k^2-12k+4)\\&=9\sum_{k=1}^{n}k^2-12\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4\\&=9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-12\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n\\&=\frac{1}{2}n\{3(n+1)(2n+1)-12(n+1)+8\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(6n^2-3n-1)}\end{aligned}$$

（2）　$2\cdot 3^2$，$4\cdot 4^2$，$6\cdot 5^2$，$8\cdot 6^2$，$10\cdot 7^2$，$\cdots$

2，4，6，8，10，$\cdots$

という数列の第 n 項は $2n$ であり

3^2，4^2，5^2，6^2，7^2，$\cdots$

という数列の第 n 項は $(n+2)^2$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=\boldsymbol{2n(n+2)^2}$

また，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}2k\,(k+2)^2&=\sum_{k=1}^{n}(2k^3+8k^2+8k)\\&=2\sum_{k=1}^{n}k^3+8\sum_{k=1}^{n}k^2+8\sum_{k=1}^{n}k\\&=2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+8\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{2}n^2(n+1)^2+\frac{4}{3}n(n+1)(2n+1)+4n(n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\{3n(n+1)+8(2n+1)+24\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(3n^2+19n+32)}\end{aligned}$$

（3）　1，$1+2$，$1+2+4$，$1+2+4+8$，$1+2+4+8+16$，$\cdots$

数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}a_n&=1+2+4+8+16+\cdots+2^{n-1}\\&=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{2^n-1}\end{aligned}$$

また，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)&=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1\\&=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n\\&=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2}\end{aligned}$$

6　数列 2，3，7，16，32，57，… の一般項を求めよ。

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。その階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，4，9，16，25，…

よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$b_n = n^2$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$
$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$
$$= 2 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$
$$= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 12)$$

$a_1 = 2$ であるから，

$a_n = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 12)$は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 12)}$

7　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^2 - n + 1$ で表されるとき，この数列の一般項を求めよ。

$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= (n^2 - n + 1) - \{(n-1)^2 - (n-1) + 1\}$$
$$= 2n - 2$$

よって，一般項 a_n は

$\boldsymbol{a_1 = 1}$，$\boldsymbol{n \geqq 2}$ **のとき**，$\boldsymbol{a_n = 2n - 2}$

8　次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right)$$

が成り立つ。

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{n}{3n+1}}$$

9　$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{1}$，　$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$，　…

が成り立つことを利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ を求めよ。

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$= \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$
$$= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{n+1} - 1}$$

10　次の和 S_n を求めよ。

$S_n=4\cdot 1+7\cdot 4+10\cdot 4^2+13\cdot 4^3+\cdots+(3n+1)\cdot 4^{n-1}$

$S_n=4\cdot 1+7\cdot 4+10\cdot 4^2+13\cdot 4^3+\cdots+(3n+1)\cdot 4^{n-1}$　……①

①の両辺に 4 を掛けて

$4S_n=4\cdot 4+7\cdot 4^2+\cdots+(3n-2)\cdot 4^{n-1}+(3n+1)\cdot 4^n$　……②

①　－②より，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}-3S_n&=4\cdot 1+3(4+4^2+\cdots+4^{n-1})-(3n+1)\cdot 4^n\\&=4+3\cdot\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}-(3n+1)\cdot 4^n\\&=4+4^n-4-(3n+1)\cdot 4^n\\&=-3n\cdot 4^n\end{aligned}$$

よって $S_n=n\cdot 4^n$ で，$S_1=4$ であるからこれは $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{S_n=n\cdot 4^n}$