数学 B　Advanced　P.167

巻末

数学でアクティブ・ラーニングをしよう

演習問題

解答

索引

数表

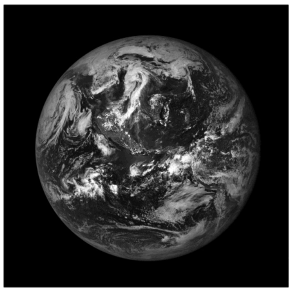
※「数学でアクティブ・ラーニングをしよう」,「演習問題」は各章の学習が終わった後や,
教科書を一通り学んだ後に取り組むと効果的です。

数学 B　Advanced　P.168

数学でアクティブ・ラーニングをしよう

アクティブ・ラーニングとは，課題の発見と解決に向けて主体的・協働的に学ぶ学習方法のことです。次の問題をペアやグループで探究してみましょう。

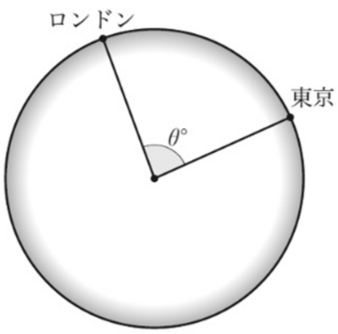
地表上の距離を測ろう



地表上の 2 点間の距離は，それぞれの緯度と経度の組から求めることができます。地球を球面として，東京とロンドンの 2 都市間の距離を考えてみよう。

東京は東経 139°，北緯 36° で，ロンドンは経度 0°，北緯 51° です。

まず，地球を右の図のような大円 (*) とし，地球の 1 周の長さを 40,000km とします。このとき，東京とロンドンを結ぶ円弧の中心角 $\theta°$ がわかれば，東京とロンドンの間の地表上の距離は，次の式で求めることができます。



$$40000 \cdot \frac{\theta}{360}\ (\text{km}) \qquad \cdots\cdots ①$$

次に，東京の経度と緯度の組を $(139°, 36°)$，ロンドンの経度と緯度の組を $(0°,\ 51°)$ とします。このとき，地球の半径を 1 とすると，地球の中心 O から各地点を指す空間ベクトルは，次のようになります。

東京　　$(\cos 36° \cos 139°,\ \cos 36° \sin 139°,\ \sin 36°)$

ロンドン　$(\cos 51°,\ 0,\ \sin 51°)$

この 2 つのベクトルから，①の $\cos\theta°$ の値と θ の値を求めてみよう。このとき，関数電卓や表計算ソフト，三角比の表などを用いるとよい。

次に，東京とロンドンの地表上の距離を求めてみよう。

さらに，ニューヨークは西経 74°，北緯 40° です。東京とニューヨークの地表上の距離を求めてみよう。

(*)球面と，その球面の中心を通る平面が交わってできる円を大円という。

何個の球が必要か

右の写真のように，底面が三角形になるように球を重ねていき，4 段まで作りました。これを 6 段まで作るにはあと何個の球が必要だろうか。

これを n 段まで作るには，全部で何個の球が必要だろうか。

また，底面が正方形になるように球を重ねていき，n 段まで作るには，全部で何個の球が必要だろうか。

選挙速報

選挙速報のテレビ番組では，開票率が 1%でも当選確実と伝えられることがあります。これはどういう仕組みだろうか。

各テレビ局では，開票前に独自の調査を行っており，その一つに出口調査というものがあります。これは，投票場に行き，誰に投票したかを調査するものです。

では，どれくらいの人に調査を行えばいいだろうか。

たとえば，ある候補者について，投票者全体での得票率を p，出口調査で無作為に選んだ n 人での得票率を p_0 とすると，p に対する信頼度 95% の信頼区間は次のようになります。

$$p_0 - 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \leqq p \leqq p_0 + 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \qquad \cdots\cdots②$$

②において，得票率が $p_0 = 0.5$ のとき，$n = 100,\ 400,\ 1000$ とした場合のそれぞれの信頼区間を調べてみよう。

また，そこからわかることを話し合ってみよう。

数学 B　Advanced　P.170

演習問題

1 章　数列

$\boxed{1}$　10 以上 100 以下で，分母を 5 とする既約分数の和を求めよ。

$\boxed{2}$　等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=12$，$S_{20}=18$ のとき，S_{30} を求めよ。

$\boxed{3}$　右のように自然数を並べる。横の並びを行，縦の並びを列とよぶことにする。たとえば，第 2 行，第 3 列の数は 8 である。このとき，次の問に答えよ。

(1)　第 1 行，第 k 列の数を求めよ。

(2)　第 k 行，第 $2k$ 列の数を求めよ。

行＼列	1	2	3	4	5	⋯
1	1	2	4	7	11	⋯
2	3	5	8	12	⋯	
3	6	9	13	⋯		
4	10	14	⋯			
5	15	⋯				
⋯	⋯					

$\boxed{4}$　次の問に答えよ。

(1)　$f(x)=6x^5-15x^4+10x^3$ とするとき，$f(k+1)-f(k)$ を計算せよ。

(2)　$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$ を求めよ。

$\boxed{5}$　$a_1=3$，$a_{n+1}=5a_n+2\cdot 3^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　$b_n=\frac{a_n}{3^n}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{6}$　n を自然数とする。$\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ を満たす整数 a_n，b_n について，次の問に答えよ。

(1)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2)　$\left(1-\sqrt{2}\right)^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ が成り立つことを証明せよ。

数学 B　Advanced　P.171

2 章　ベクトル

$\boxed{1}$　3 つのベクトルを $\vec{a}=(p,\ 2)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$, $\vec{c}=(1,\ q)$ とする。

(1)　$(\vec{a}-\vec{b})\parallel\vec{c}$ かつ $(\vec{b}-\vec{c})\perp\vec{a}$ であるとき，p, q の値を求めよ。

(2)　$\sqrt{2}|\vec{a}|=|\vec{b}|$ が成り立ち，$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角が $60°$ であるとき，p, q の値を求めよ。

$\boxed{2}$　△ABC において, AB = 5, BC = 7, CA = 3 とする。また, △ABC の外接円の中心を P とする。

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の値を求めよ。　　(2)　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ の値を求めよ。

(3)　$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$\boxed{3}$　AB = 2, BC = 4, CA = 3 である△ABC がある。この三角形の内接円の中心を I, I から辺 AB に下ろした垂線と AB との交点を H とする。

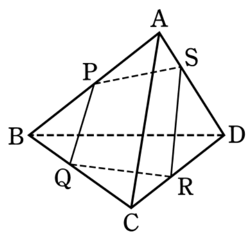
(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の値を求めよ。　　(2)　$\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$ を用いて表せ。　　(4)　内接円の半径を求めよ。

$\boxed{4}$　O を原点とする座標空間に，4 点 $A(1,\ 2,\ -3)$, $B(3,\ -1,\ 2)$, $C(4,\ -3,\ 1)$, $D(3,\ 7,\ -2)$ がある。 A を通り，ベクトル $\overrightarrow{OB}$ に平行な直線を l とし，C を通り，ベクトル $\overrightarrow{OD}$ に平行な直線を m とする。直線 l と m が交わることを示せ。また，その交点 P の座標を求めよ。

$\boxed{5}$　原点 O から 3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(-1,\ 1,\ 0)$, $C(1,\ -1,\ 1)$ を通る平面に下ろした垂線と平面 ABC との交点を H とするとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$\boxed{6}$　右の図のように，四面体 ABCD の辺 AB, BC, CD 上にそれぞれ点 P, Q, R があり，平面 PQR と辺 AD の交点を S とする。AP : PB = 1 : 1, BQ : QC = 2 : 3, AS : SD = 1 : 2 のとき，CR : RD を求めよ。



数学 B　Advanced　P.172

$\boxed{\text{総合問題}}$

$\boxed{1}$　The sums of the terms of a sequence follow the pattern

$S_1 = 1 + k,\ S_2 = 5 + 3k,\ S_3 = 12 + 7k,$

$S_4 = 22 + 15k,\ \cdots,$ where $k \in \mathbb{Z}$.

(a)　Given that $u_1 = 1 + k$, find $u_2,\ u_3$ and u_4.

(b)　Find a general expression for u_n.

$\boxed{\text{注意}}$　S_n は数列 $\{u_n\}$ の初項から第 n 項までの和を表し，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表す。

$\boxed{2}$　Consider the lines L_1 and L_2 with equations

$$L_1 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad L_2 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

The lines intersect at point P.

(a)　Find the coordinates of P.

(b)　Show that the lines are perpendicular.

(c)　The point Q$(7,\ 5,\ 3)$ lies on L_1. The point R is the reflection of Q in the line L_2. Find the coordinates of R.

$\boxed{\text{注意}}$　$\boldsymbol{r}$ は空間のベクトル $\vec{r}$ を表し，$\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $(11,\ 8,\ 2)$ のことである。

$\boxed{3}$　The time taken for a student to complete a task is normally distributed with a mean of 20 minutes and a standard deviation of 1.25 minutes.

(a)　A student is selected at random. Find the probability that the student completes the task in less than 21.8 minutes.

(b)　The probability that a student takes between k and 21.8 minutes is 0.3. Find the value of k.

(国際バカロレアのディプロマ・プログラム最終試験)