数学 B　Advanced　P.115

3 章　確率分布と統計的な推測

どれだけ重要な科学実験も，
1 回行うだけでは，
自然現象の実証には不十分である。

イギリスの統計学者，遺伝学者。
一部分のデータから全体を推測する
推測統計の確立者であり，
統計学の発展に大きく貢献した。
彼が考案した「実験計画法」は，
科学実験を効果的に行うための
統計学的方法として，自然科学，医学，心理学など
多くの分野で利用されている。
遺伝学への貢献もきわめて大きい。

ロナルド・エイルマー・フィッシャー
（1890 年～1962 年）

数学 B　Advanced　P.116

1 節　確率分布

1　事象の独立と従属

確率

　数学 A で学んだように，全事象を U，事象 A が起こる場合の数を $n(A)$ で表し，すべての根元事象の確率が等しいとする。このとき，事象 A が起こる確率 $P(A)$ は

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}}$$

と表される。

例 1　1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，2 つの目の和が 5 である事象を A，2 つの目の積が 4 である事象を B とする。
ここで，1 回目に 3 が出て 2 回目に 5 が出る場合を (3，5) のように表すことにすれば，事象 A，B，$A\cap B$ は，集合を用いてそれぞれ

$$A=\{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$$
$$B=\{1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)\}$$
$$A\cap B=\{(1,\ 4),\ (4,\ 1)\}$$

と表される。
したがって，これらの事象の確率は次のようになる。

$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$，$P(B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$，$P(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

問 1　例 1 において，2 つの目の積が 6 である事象を C とするとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(C)$　　　　(2)　$P(A\cap C)$

数学 B　Advanced　P.117

条件つき確率

数学 A で学んだように，事象 A が起こったときの事象 B の起こる条件つき確率 $P_A(B)$ は

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \qquad \cdots\cdots①$$

と表される。

例 2　ある地域の子どもにアンケート調査をしたところ, サッカーが好きな子どもは 75%, 野球が好きな子どもは 65%，どちらも好きな子どもは 45% であった。
サッカーが好きな子どもの中から 1 人を選び出すとき, その子どもが野球も好きである確率を求めてみよう。
選び出した子どもが，サッカーが好きである事象を A，野球が好きである事象を B とすると，求める確率は $P_A(B)$ である。
ここで

$$P(A) = \frac{75}{100}, \quad P(A \cap B) = \frac{45}{100}$$

であり，これらを①に代入すると

$$P_A(B) = \frac{45}{100} \div \frac{75}{100} = \frac{3}{5}$$

問 2　例 2 において，野球が好きな子どもの中から 1 人を選び出したとき，その子どもがサッカーも好きである確率を求めよ。

条件つき確率の式①から，次の確率の**乗法定理**が得られる。

確率の乗法定理
$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)}$

数学 B　Advanced　P.118

事象の独立と従属

例 3　1 から 10 までの数字を 1 つずつ書いた 10 枚のカードがある。
この中から 1 枚のカードを引くとき

2 の倍数が書かれたカードを引く事象を A

5 の倍数が書かれたカードを引く事象を B

3 の倍数が書かれたカードを引く事象を C

とする。

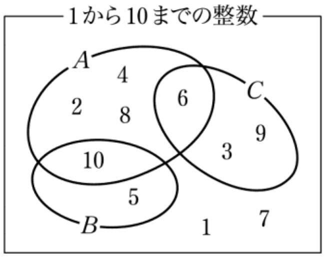
このとき，$P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，$P_A(B)=\frac{1}{5}$ であるから

$P_A(B)=P(B)$　……①

これに対して，$P(C)=\frac{3}{10}$,

$P_A(C)=\frac{1}{5}$ であるから

$P_A(C)\neq P(C)$　……②



上の例 3 の①から，事象 A の起こることと事象 B の起こることは，それらが起こる確率に互いに影響を与えないことがわかる。

一方，②より事象 A の起こることと事象 C の起こることは，互いに影響を与えることがわかる。

一般に，2 つの事象 A, B があって

$$P_A(B)=P(B),\quad P_B(A)=P(A)$$

の 2 つの式がともに成り立つとき，A と B は**独立**であるという。

A と B が独立でないとき，A と B は**従属**であるという。

問 3　2 つの式 $P_A(B)=P(B)$, $P_B(A)=P(A)$ のうち一方が成り立てば他方の式も成り立つことを，確率の乗法定理を用いて証明せよ。

2 つの事象 A と B が独立であれば $P_A(B)=P(B)$ であるから

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(A)\cdot P(B)$$

が成り立つ。また

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \text{ ならば } P_A(B)=P(B)$$

が成り立つ。したがって，次のことが成り立つ。

事象の独立
2 つの事象 A と B について **A と B が独立である** $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$

例題 1　事象の独立と従属

1 個のさいころを投げるとき，偶数の目が出る事象を A，3 の倍数の目が出る事象を B，4 以上の目が出る事象を C とする。このとき，A と B，A と C はそれぞれ独立であるか，従属であるかを答えよ。

解　事象 A，B，C のそれぞれの確率は

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

であり，また，積事象 $A\cap B$，$A\cap C$ のそれぞれの確率は

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6},\quad P(A\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

であるから

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B),\quad P(A\cap C)\neq P(A)\cdot P(C)$$

したがって，A と B は独立であり，A と C は従属である。

問 4　例題 1 で，事象 B と C は独立であるか従属であるかを答えよ。

問 5　次の事象 A と B は独立であるか従属であるかを答えよ。

(1)　ジョーカーを含まない 52 枚のトランプから 1 枚のカードを引くとき，そのカードがハートである事象を A，絵札である事象を B とする。

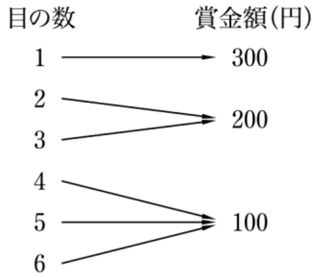
(2)　1 枚の硬貨を 2 回投げるとき，少なくとも 1 回は表が出る事象を A，1 回だけ表が出る事象を B とする。

→ p.139 問題1

2　確率変数と確率分布

$\boxed{\text{確率変数}}$

1 個のさいころを投げて，1 の目が出るときは 300 円，2 または 3 の目が出るときは 200 円，4 以上の目が出るときは 100 円の賞金が与えられるとする。このとき



300 円の賞金が与えられる確率は $\frac{1}{6}$,

200 円の賞金が与えられる確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

100 円の賞金が与えられる確率は $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

である。さいころを投げた結果として与えられる賞金を X 円とすると，X は 100，200，300 のどれかの値をとる変数であり，X がどの値をとるかは試行の結果によって定まる。

一般に，試行の結果によってその値が定まる変数を**確率変数**という。

上の X は確率変数である。確率変数は，X，Y，Z などの大文字で表すことが多い。また，$X=a$ となる確率を $P(X=a)$，$a \leqq X \leqq b$ となる確率を $P(a \leqq X \leqq b)$ のように表す。

上の X において，$X=100$ となるのは 4 以上の目が出るときであるから

$$P(X=100)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

同様に，$X \leqq 200$ となるのは $X=100$，200 のときであるから

$$P(X \leqq 200)=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

$\boxed{\text{問 6}}$　上の X に対して，$X \geqq 200$ となる確率 $P(X \geqq 200)$ を求めよ。

$\boxed{\text{問 7}}$　1 個のさいころを投げるとき，出る目の数を X とする。
次の確率を求めよ。

(1)　$P(X=3)$　　(2)　$P(2 \leqq X \leqq 5)$　　(3)　$P(X^2 \geqq 20)$

確率分布

前ページの賞金額を表す確率変数 X に対して, X のとり得る値とそれに対応する確率を表で示すと，右のようになる。

X	100	200	300	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

この表のように，確率変数のとり得る値と，その値をとる確率との対応を示したものを, その確率変数の**確率分布**または単に**分布**といい，確率変数 X はこの分布に**従う**という。

一般に, 確率変数 X のとり得る値が x_1, x_2, ⋯ , x_n であるとき, $P(X=x_i)=p_i$ とすると, 次のことが成り立つ。

1 $p_1 \geqq 0$, $p_2 \geqq 0$, ⋯ , $p_n \geqq 0$

2 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

また，このときの X の確率分布は右の表で示される。

X	x_1	x_2	⋯	x_n	計
P	p_1	p_2	⋯	p_n	1

例題 2　確率分布

白球 4 個と黒球 3 個が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出すとき，その中に含まれている白球の個数 X の確率分布を求めよ。

解　X は 0，1，2 の値をとる確率変数であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7},\ P(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

である。

したがって，X の確率分布は，右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

問 8　例題 2 で，取り出される球の中に含まれる黒球の個数 Y の確率分布を求めよ。

3　確率変数の平均と分散

確率変数の平均

100 本からなるくじがあり，その当たりくじの賞金と本数は，1 等が 600 円で 9 本，2 等が 200 円で 27 本，3 等が 100 円で 64 本である。

この中から 1 本のくじを引く試行を 1 回行ったときに得られる賞金の平均は, 賞金総額をくじの総数で割ったものであるから，次の式で求められる。

$$\frac{600\cdot 9+200\cdot 27+100\cdot 64}{100}=172(\text{円})$$

これは次のように考えることもできる。

$$600\cdot\frac{9}{100}+200\cdot\frac{27}{100}+100\cdot\frac{64}{100}=172(\text{円}) \qquad \cdots\cdots①$$

この値を確率変数とその確率分布を用いて考えてみよう。上の賞金額を確率変数 X で表すと，X のそれぞれの値に対する確率は

$$P(X=600)=\frac{9}{100},\quad P(X=200)=\frac{27}{100},\quad P(X=100)=\frac{64}{100}$$

であるから，①の左辺は次のように書くことができる。

$$600\cdot P(X=600)+200\cdot P(X=200)+100\cdot P(X=100)$$

一般に，確率変数 X のとる値が x_1, x_2, $\cdots$, x_n で，X がそれぞれの値をとる確率が p_1, p_2, $\cdots$, p_n のとき

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n} \quad ^{(*1)}$$

を確率変数 X の**平均**または**期待値**といい，$\boldsymbol{E(X)}$ で表す。(*2)

確率変数の平均
$\boldsymbol{E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}$

(*1)和の記号 $\sum$ に関しては，20~23 ページを参照。

(*2) $E(X)$の E は期待値を意味する Expectation の頭文字である。

$\boxed{\text{例 4}}$　1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とするとき，X の平均を求めてみよう。

確率分布は右の表のようになるから，X の平均は次のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$\boxed{\text{問 9}}$　3 枚の 100 円硬貨を同時に投げるとき，表の出る枚数を X とする。X の平均を求めよ。

例題 3　確率変数の平均［1］

2 本の当たりくじを含む 10 本のくじがある。この中から同時に 3 本のくじを引くとき，その中に含まれる当たりくじの本数 X の平均を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$　X のとる値は，0，1，2 であり，それぞれの値をとる確率は

$$P(X = 0) = \frac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{7}{15}$$

$$P(X = 1) = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{7}{15}$$

$$P(X = 2) = \frac{{}_2\mathrm{C}_2 \times {}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{1}{15}$$

したがって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

よって，X の平均は次のようになる。

$$E(X) = 0 \cdot \frac{7}{15} + 1 \cdot \frac{7}{15} + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{15}$$

$\boxed{\text{問 10}}$　赤球 2 個，白球 6 個が入っている袋がある。この中から同時に 4 個の球を取り出すとき，その中に含まれる赤球の個数 X の平均を求めよ。

例題 4　確率変数の平均［2］

0 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 5 枚のカードがある。この中から同時に 2 枚のカードを取り出すとき，取り出したカードに書かれている数字の大きい方から小さい方を引いた値を X とする。
このとき，X の平均を求めよ。

解　2 枚のカードを取り出すとき，書かれている数字の組合せは ${}_5\mathrm{C}_2=10$（通り）あり，数字の組合せと数字の差は右の表で表される。
この表から，X のとる値は 1，2，3，4 であり，X の確率分布は右の表のようになる。

組合せ	(0，1) (1，2) (2，3) (3，4)	(0，2) (1，3) (2，4)	(0，3) (1，4)	(0，4)
差	1	2	3	4

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

したがって，X の平均は次のようになる。

$$E(X)=1\cdot\frac{4}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{2}{10}+4\cdot\frac{1}{10}=\frac{20}{10}=2$$

問 11　2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の大きい方の値 X の平均を求めよ。ただし，同じ目のときはその目の数を X の値とする。

確率変数 $aX+b$ と X^2 の平均

確率変数 X のとり得る値が x_1，x_2，…，x_n のとき，X の 1 次式 $aX+b$ は，ax_1+b，ax_2+b，…，ax_n+b という値をとる確率変数である。
X が x_i という値をとる確率 $P(X=x_i)$ を p_i とすると

$$P(aX+b=ax_i+b)=P(X=x_i)=p_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

が成り立つ。
したがって，確率変数 $aX+b$ の平均について，次のことが成り立つ。

$$E(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i=\sum_{i=1}^{n}(ax_ip_i+bp_i)$$
$$=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=aE(X)+b\cdot 1=aE(X)+b$$

$aX+b$ の平均
a, b を定数とするとき　　$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b}$

例 5　1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X で表すと，123 ページの例 4 より $E(X)=\frac{7}{2}$ であるから，確率変数 $4X+1$ の平均は

$$E(4X+1)=4E(X)+1=4\cdot\frac{7}{2}+1=15$$

問 12　例 5 の X に対して，次の確率変数の平均を求めよ。

(1)　$X+4$　　(2)　$-X$　　(3)　$5X-1$

確率変数 X に対して，X の平均を m とするとき，確率変数 $X-m$ を X の平均からの**偏差**という。偏差 $X-m$ の平均 $E(X-m)$ は

$$E(X-m)=E(X)-m=m-m=0$$

すなわち，次の式が成り立つ。

$$E(X-m)=0$$

確率変数 X のとり得る値が x_1, x_2, $\cdots$, x_n のとき，X^2 は ${x_1}^2$, ${x_2}^2$, $\cdots$, ${x_n}^2$ という値をとる確率変数である。X が x_i という値をとる確率 $P(X=x_i)$ を p_i とすると，確率変数 X^2 の平均は次のようになる。

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2p_i$$

例 6　1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とすると

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{6}\left(i^2\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+\cdots+6^2)=\frac{91}{6}$$

問 13　例 6 の X に対して，次の確率変数の平均を求めよ。

(1)　$3X^2$　　(2)　$2X^2-1$

確率変数の分散・標準偏差

確率変数の平均からの散らばり具合いを表す数値を考えてみよう。

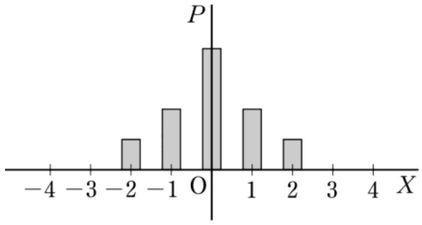
X および Y は，それぞれ次の確率分布に従う確率変数とする。

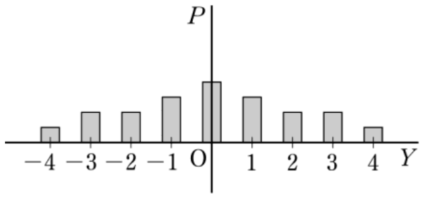
X	-2	-1	0	1	2	計
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	1

Y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	計
P	0.05	0.1	0.1	0.15	0.2	0.15	0.1	0.1	0.15	1

このとき，X と Y の平均はともに 0 である。よって，平均の値だけでは，このような 2 つの確率分布の違いを示すことはできない。

X，Y のとり得る値を横軸，その値をとる確率を縦軸として右のような棒グラフをかけば，X のグラフに比べて Y のグラフの方が散らばっていることがわかる。





確率変数 X のとる値を x_1，x_2，$\cdots$，x_n とし，確率 $P(X=x_i)$ を p_i，X の平均を m とするとき

$$(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

を確率変数 X の**分散**といい，$\boldsymbol{V(X)}$ で表す。 (*)

すなわち

$$\boldsymbol{V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\,p_i}$$

分散は X の平均 m からの偏差の 2 乗 $(X-m)^2$ の平均であるから，次のように表される。

(*) $V(X)$ の V は分散を意味する Variance の頭文字である。

数学 B　Advanced　P.127

確率変数の分散
$\boldsymbol{V(X) = E((X-m)^2)}$

$\boxed{\text{例 7}}$ 前ページの確率変数 X と Y の分散を求め，比較してみよう。

$E(X) = E(Y) = 0$ であるから

$$V(X) = (-2)^2\cdot 0.1 + (-1)^2\cdot 0.2 + 0^2\cdot 0.4 + 1^2\cdot 0.2 + 2^2\cdot 0.1 = 1.2$$

$$V(Y) = (-4)^2\cdot 0.05 + (-3)^2\cdot 0.1 + (-2)^2\cdot 0.1 + (-1)^2\cdot 0.15 + 0^2\cdot 0.2 + 1^2\cdot 0.15 + 2^2\cdot 0.1 + 3^2\cdot 0.1 + 4^2\cdot 0.05 = 4.5$$

よって，$V(Y) > V(X)$ が成り立つことがわかる。

これは，Y の確率分布の方が X の確率分布より平均からの散らばり具合いが大きいことを示している。

X の分散の式を変形すると

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 - 2mx_i + m^2)p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 p_i - 2m\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + m^2\sum_{i=1}^{n}p_i$$

ここで　$\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 p_i = E(X^2)$,　$\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = E(X) = m$,　$\sum_{i=1}^{n}p_i = 1$

であるから　$V(X) = E(X^2) - 2m\cdot m + m^2\cdot 1 = E(X^2) - m^2$

したがって，次の式により分散が計算できる。

分散の計算
$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - m^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2}$

確率変数 X の分散 $V(X)$ の正の平方根を X の**標準偏差**といい，$\boldsymbol{\sigma(X)}$ で表す。(*)すなわち　$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

(*)標準偏差は standard deviationといい，$\sigma(X)$ の σ は，この頭文字 s に相当するギリシャ文字である。

$\boxed{\text{例 8}}$　1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X として，X の分散と標準偏差を求めてみよう。

123 ページの例 4 と 125 ページの例 6 より，X の分散は

$$V(X) = E(X^2) - m^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

X の標準偏差は　　$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6}$

$\boxed{\text{問 14}}$　硬貨を 3 回投げるとき，表が出る回数 X の標準偏差を求めよ。

例題 5　平均と分散・標準偏差

1，2，3 の番号を 1 つずつ記入した 3 枚の封筒と 3 枚のカードがある。このカードを 1 枚ずつ封筒に入れるとき，カードの番号とそれを入れた封筒の番号が一致するカードの枚数 X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$　右の表からわかるように，封筒にカードを入れる方法は 6 通りあり，X のとるである値は 0，1，3 である。これより，Xの確率分布は下の表のようになる。

	封筒 1	封筒 2	封筒 3	Xの値
カード	1	2	3	3
カード	1	3	2	1
カード	2	1	3	1
カード	2	3	1	0
カード	3	1	2	0
カード	3	2	1	1

X	0	1	3	計
P	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって，X の平均，分散，標準偏差は

$$E(X) = 0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{3}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$V(X) = 0^2 \cdot \frac{2}{6} + 1^2 \cdot \frac{3}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} - 1^2 = \frac{12}{6} - 1 = 1$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1} = 1$$

$\boxed{\text{問 15}}$　例題 5 において，封筒とカードをそれぞれ 1 枚ずつ増やして 1，2，3，4 の番号を 1 つずつ記入するとき，X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

→ p.139 問題2, 3

確率変数 $\boldsymbol{aX+b}$ の分散と標準偏差

　確率変数 X の平均を m とするとき，X の 1 次式 $aX+b$ で表される確率変数の平均は

$$E(aX+b)=aE(X)+b=am+b$$

であった。ここで，X の 1 次式 $aX+b$ で表される確率変数の分散と標準偏差を考えてみよう。

$$V(aX+b)=E\left(\left(aX+b-(am+b)\right)^2\right)=E((aX-am)^2)$$

$$=E(a^2(X-m)^2)=a^2E((X-m)^2)=a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=\sqrt{V(aX+b)}=\sqrt{a^2V(X)}$$

$$=|\,a\,|\sqrt{V(X)}=|\,a\,|\sigma(X)$$

　一般に，確率変数 $aX+b$ の平均と分散，標準偏差は次のようになる。

$\boldsymbol{aX+b}$ **の平均と分散・標準偏差**
$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b,\qquad V(aX+b)=a^2V(X),}$ $\boldsymbol{\sigma(aX+b)=|\,a\,|\sigma(X)}$

例 9　1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とするとき，前ページの例 8 より $V(X)=\frac{35}{12}$，$\sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}$ であるから，確率変数 $4X+5$ の分散と標準偏差は，次のようになる。

$$V(4X+5)=4^2V(X)=16\cdot\frac{35}{12}=\frac{140}{3}$$

$$\sigma(4X+5)=|\,4\,|\sigma(X)=4\cdot\frac{\sqrt{105}}{6}=\frac{2\sqrt{105}}{3}$$

注意　$\sigma(4X+5)$ は $\sqrt{V(4X+5)}=\sqrt{\frac{140}{3}}$ としても求めることができる。

問 16　例 9 の X について，次の確率変数の分散と標準偏差を求めよ。

(1)　$3X+1$　　　(2)　$-X$　　　(3)　$-6X+5$

4　確率変数の和と積

確率変数の和の平均

1 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げる試行で，硬貨の表が出るとき 1，裏が出るとき 0 を対応させる確率変数を X，さいころの出る目の数を Y とする。X が値 i ($i=0,\ 1$)をとり Y が値 j ($j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$) をとる確率を $P(X=i,\ Y=j)$ と表すと，すべての $i,\ j$ の組に対して

$$P(X=i,\ Y=j)=\frac{1}{12}$$

である。このとき, $Z=X+Y$ も確率変数で, そのとる値は 1 から 7 までの整数である。この Z の確率分布と平均を求めてみよう。

X \ Y	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7

$Z=X+Y$ の値の表

たとえば，$Z=3$ となるのは，$X=0,\ Y=3$ であるか，$X=1,\ Y=2$ であるかのいずれかの場合である。これらは互いに排反であるから

$$P(Z=3)=P(X=0,\ Y=3)+P(x=1,\ Y=2)=\frac{2}{12}$$

である。同様にして計算すると，次の確率分布が得られる。

Z	1	2	3	4	5	6	7	計
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

したがって，Z の平均は，次のようになる。

$$E(Z)=1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{2}{12}+\cdots+7\cdot\frac{1}{12}=\frac{48}{12}=4$$

一方，X の平均は　$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Y の平均は　$E(Y)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+\cdots+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

であるから，$E(Z)=E(X)+E(Y)$ が成り立つ。

一般に，2 つの確率変数 X, Y の和について，次の等式が成り立つ。

確率変数の和の平均
$\boldsymbol{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$

上の式は，3 つ以上の確率変数の和に対しても成り立つ。

例 10　2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数をそれぞれ X, Y とする。このとき，出る目の数の和 $X+Y$ の平均は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$$

である。同様に，3 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数を X, Y, Z とすると，出る目の数の和 $X+Y+Z$ の平均は

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$$

である。

問 17　1，2，3 の数字を 1 つずつ書いた札がそれぞれ 1 枚，2 枚，3 枚ある。この 6 枚の札から 1 枚引き，書かれている数字を記録してもとに戻す。これを 3 回くり返すとき，引く札に書かれた数の和の平均を求めよ。

独立な確率変数

前ページの硬貨を投げる試行とさいころを投げる試行は独立であるから，確率変数 X, Y のとる値のすべての i, j の組に対して

$$P(X=i,\ Y=j)=P(X=i)\cdot P(Y=j)$$

が成り立つ。

一般に，2 つの確率変数 X, Y について，X のとる任意の値 x_i と Y のとる任意の値 y_j について

$$\boldsymbol{P\left(X=x_i, Y=y_j\right)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)}$$

が成り立つとき，確率変数 X, Y は**独立**であるという。

例 11　2 つの確率変数 X, Y のとる値と X, Y の値の組に対する確率が右の表で与えられている。

Y ＼ X	1	2	計
2	0.28	0.42	0.7
4	0.12	0.18	0.3
計	0.4	0.6	1

たとえば，$X=2,\ Y=2$ となる確率は

$$P(X=2,\ Y=2)=0.42$$

一方　$P(X=2)\cdot P(Y=2)=0.7\cdot 0.6=0.42$

であるから　$P(X=2,\ Y=2)=P(X=2)\cdot P(Y=2)$

が成り立つ。X, Y の他の値のすべての組の確率に対しても同様な式が成り立つから，確率変数 X, Y は独立であることがわかる。

一般に，2 つの独立な試行 T_1, T_2 があるとき，T_1 に関する確率変数 X と T_2 に関する確率変数 Y は独立である。

独立な確率変数の積の平均と和の分散

130 ページの確率変数 X, Y は独立である。ここで，X, Y の積 U の平均を求めてみよう。

U の確率分布は，右の表にもとづいて求めると，下の表のようになる。

Y ＼ X	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6

$U=XY$ の値の表

U	0	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

したがって，U の平均は

$$E(U)=0\cdot\frac{6}{12}+1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{12}+4\cdot\frac{1}{12}+5\cdot\frac{1}{12}+6\cdot\frac{1}{12}$$

$$=\frac{21}{12}=\frac{7}{4}$$

$E(X)=\frac{1}{2}$, $E(Y)=\frac{7}{2}$ であるから　$E(U)=E(X)\cdot E(Y)$

一般に，次のことが成り立つ。

独立な確率変数の積の平均
確率変数 X, Y が独立であるとき　$\boldsymbol{E(XY) = E(X) \cdot E(Y)}$

$\boxed{\text{例 12}}$　2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の数の積の平均を求めてみよう。
それぞれのさいころの出る目の数を X, Y とする。 X, Y の平均は $E(X) = E(Y) = \frac{7}{2}$ であり，それぞれのさいころを投げる試行は独立であるから，出る目の数の積の平均は次のようになる。

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

$\boxed{\text{問 18}}$　2 つの袋 A, B があり，袋 A には 1, 3, 5, 7, 9 の数字を 1 つずつ書いた札が 5 枚入っており，袋 B には 2, 4, 6, 8 の数字を 1 つずつ書いた札が 4 枚入っている。2 つの袋から 1 枚ずつ札を取り出すとき，2 枚の札に書かれた数の積の平均を求めよ。

➡ p.139 問題4

確率変数 X, Y が独立であるとき，和 $X + Y$ の分散を求めてみよう。
127 ページの分散の計算の式により

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - \{E(X+Y)\}^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - \{E(X) + E(Y)\}^2 \\ &= \{E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)\} \\ &\qquad -[\{E(X)\}^2 + 2E(X) \cdot E(Y) + \{E(Y)\}^2] \end{aligned}$$

ここで，X, Y は独立であるから

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= [E(X^2) - \{E(X)\}^2] + [E(Y^2) - \{E(Y)\}^2] \\ &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

一般に，次のことが成り立つ。

独立な確率変数の和の分散
確率変数 $X,\ Y$ が独立であるとき $\boldsymbol{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$

$\boxed{\text{例 13}}$　2 個のさいころを同時に投げるとき，それぞれのさいころの出る目の数を $X,\ Y$ とする。X と Y は独立であり，128 ページの例 8 より $V(X)=V(Y)=\frac{35}{12}$ であるから，$X+Y$ の分散，標準偏差は次のようになる。

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{70}{12}=\frac{35}{6}$$

$$\sigma(X+Y)=\sqrt{V(X+Y)}=\sqrt{\frac{35}{6}}=\frac{\sqrt{210}}{6}$$

$\boxed{\text{問 19}}$　1 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げる試行で，硬貨の表が出るとき 1，裏が出るとき 0 を対応させる確率変数を X，さいころの出る目の数を Y とする。このとき，確率変数 $X+Y$ の分散と標準偏差を求めよ。

3 つの確率変数 $X,\ Y,\ Z$ について，X のとる任意の値 x_i と Y のとる任意の値 y_j と Z のとる任意の値 z_k に対して

$P\left(X=x_i,\ Y=y_j,\ Z=z_k\right)=P(X=x_i)\cdot P\left(Y=y_j\right)\cdot P(Z=z_k)$

が成り立つとき，確率変数 $X,\ Y,\ Z$ は独立であるという。

独立な確率変数 $X,\ Y,\ Z$ に対して，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{E(XYZ)=E(X)\cdot E(Y)\cdot E(Z)}$$
$$\boldsymbol{V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)}$$

3 つの独立な試行 $\mathrm{T}_1,\ \mathrm{T}_2,\ \mathrm{T}_3$ があるとき，$\mathrm{T}_1,\ \mathrm{T}_2,\ \mathrm{T}_3$ に関する確率変数を $X,\ Y,\ Z$ とすると，確率変数 $X,\ Y,\ Z$ は独立である。

$\boxed{\text{問 20}}$　1 個のさいころを 3 回投げるとき，出る目の数の積の平均を求めよ。また，出る目の数の和の分散を求めよ。

数学 B　Advanced　P.135

5　二項分布

1 個のさいころを 5 回くり返し投げる反復試行において，1 の目が r 回出る事象は，5 回のうち r 回 1 の目が出て残りの $(5-r)$ 回 1 以外の目が出る事象である。したがって，この事象の確率 p_r は

$$p_r = {}_5\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{5-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

である。この反復試行で，1 の目が出る回数を表す確率変数を X とすると，事象 $X=r$ の確率は p_r であり，次のように表すことができる。

$$P(X=r) = {}_5\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{5-r}$$

一般に，ある試行で事象 A が起こる確率を p とし，A が起こらない確率を $q=1-p$ とおく。この試行を n 回くり返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすると X は確率変数であり，そのとる値は 0 から n までの整数である。また，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r) = {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r} \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

である。したがって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	$\cdots$	r	$\cdots$	n	計
P	${}_n\mathrm{C}_0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n p^n$	1

確率変数 X の確率分布が上の表のようになるとき，この確率分布を確率 p に対する次数 n の**二項分布**といい，$\boldsymbol{B(n,\ p)}$ で表す。(*)

この二項分布の確率 ${}_n\mathrm{C}_0 q^n$，${}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1}$，$\cdots$，${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$\cdots$，${}_n\mathrm{C}_n p^n$
は，二項定理

$$(q+p)^n = {}_n\mathrm{C}_0 q^n + {}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n p^n$$

の右辺の各項に等しい。ここで，$p+q=1$ であるから，上の式に代入すれば二項分布の各確率の和が 1 に等しいことが確かめられる。

(*) B は二項分布を意味する Binomial distribution の頭文字である。

例 14　1 個のさいころを 5 回くり返し投げるとき，1 の目が出る回数を X とすると，確率変数 X は二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。

したがって，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_5\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{5-r}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{1250}{7776}$	$\frac{250}{7776}$	$\frac{25}{7776}$	$\frac{1}{7776}$	1

問 21　次の二項分布に従う確率変数に対して，それぞれの二項分布 $B(n,\ p)$ における $n,\ p$ の値を求めよ。

(1)　1 枚の硬貨を 10 回投げるとき，表の出る回数 X

(2)　2 個のさいころを同時に投げる試行を 8 回くり返すとき，2 個とも 6 の目が出る回数 Y

問 22　確率変数 X が二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$ に従うとき，$X=3$ となる確率を求めよ。

例題 6　二項分布の計算

1 個のさいころを 4 回投げるとき，1 の目が出る回数が 2 回以下である確率を求めよ。

解　1 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(4,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。

求める確率は $P(X\leqq 2)$ であるから

$$\begin{aligned}P(X\leqq 2)&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&=\left(\frac{5}{6}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\\&=\frac{5^4}{6^4}+4\cdot\frac{5^3}{6^4}+6\cdot\frac{5^2}{6^4}=\frac{425}{432}\end{aligned}$$

問 23　1 枚の硬貨を 5 回投げるとき，表が 3 回以上出る確率を求めよ。

二項分布の平均と分散

二項分布の平均と分散を求めてみよう。(*)

1 回の試行で事象 A の起こる確率が p である試行を 4 回くり返すことを考える。

第 i 回目の試行で事象 A が起これば 1，起こらなければ 0 の値をとる確率変数を X_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とすると，X_i の確率分布は右の表のようになる。ただし，$p + q = 1$ とする。

X_i	0	1	計
P	q	p	1

このとき

$$E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$E(X_i^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$$

であるから

$$V(X_i) = E(X_i^2) - \{E(X_i)\}^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

ここで，4 回の反復試行で事象 A の起こる回数 X は

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

と表されるから，X の平均は

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) \\ &= p + p + p + p = 4p \end{aligned}$$

また，確率変数 X_1，X_2，X_3，X_4 は互いに独立であるから，X の分散は

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) \\ &= pq + pq + pq + pq = 4pq \end{aligned}$$

このように，二項分布の平均と分散は，1 回の試行での確率 p と試行の回数 $n = 4$ を用いて求めることができる。

(*)確率変数 X の平均，分散，標準偏差のことを，それぞれ X の確率分布の平均，分散，標準偏差ともいう。

一般に，二項分布 $B(n,\ p)$ に対して，次のことが成り立つ。

二項分布の平均と分散

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき

$$\boldsymbol{E(X) = np}$$

$$\boldsymbol{V(X) = npq} \qquad \text{ただし，} q = 1 - p$$

例 15　確率変数 X が二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$ に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めてみよう。

$$E(X) = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$V(X) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

問 24　確率変数 X が次の二項分布に従うとき，X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

(1)　$B\left(30,\ \frac{1}{6}\right)$　　(2)　$B\left(50,\ \frac{1}{2}\right)$　　(3)　$B(100,\ 0.36)$

例題 7　二項分布の平均と標準偏差

赤球 3 個と黒球 1 個が入っている袋から 1 個の球を取り出し，色を調べてから袋に戻す。これを 100 回くり返すとき，赤球を取り出す回数 X の平均と標準偏差を求めよ。

解　X は二項分布 $B\left(100,\ \frac{3}{4}\right)$ に従う。

したがって，X の平均と標準偏差は次のようになる。

$$E(X) = 100 \cdot \frac{3}{4} = 75 \text{ (回)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{100 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (回)}$$

$\boxed{\text{問 25}}$ A と B の 2 人が 20 回続けて試合を行う。A の勝つ確率は $\frac{2}{3}$ で A の勝つ回数を X とする。 X の平均と標準偏差を求めよ。
ただし，引き分けはないものとする。

→ p.139 問題5

$\boxed{\text{問題}}$

1　a，b，c，d，e の 5 人が 1 列に並ぶとき，a，b が隣り合う事象を F，a が端にくる事象を G とする。このとき，2 つの事象 F と G は独立であるか従属であるかを答えよ。

2　1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚の札の中から同時に 2 枚の札を引くとき，書かれた大きい方の数字を X とする。X の平均と標準偏差を求めよ。

3　赤球 2 個と白球 4 個が入った袋から同時に 2 個の球を取り出すことをくり返す。ただし，取り出した球はもとに戻さないものとする。ここで，取り出した 2 個の球の中に，初めて赤球が含まれるまでくり返す回数を X とする。X の平均と標準偏差を求めよ。

4　1 個のさいころと 1 枚の硬貨を投げる。硬貨の表が出ればさいころの目の数の 3 倍を得点とし，裏が出ればさいころの目の数を得点とする。
このときの得点の平均を求めよ。

5　1 枚の硬貨を投げるとき，表が出れば得点は 10 点とし，裏が出れば得点は -5 点とする。これを 20 回くり返すとき，得られる得点の平均と標準偏差を求めよ。

6　原点 O から出発して数直線上を動く点 P がある。1 個のさいころを投げて，4 以下の目が出れば P は $+2$ だけ進み，5 以上の目が出れば P は -1 だけ進むという。さいころを 6 回投げたときの点 P の座標を X とするとき，次の問に答えよ。

(1)　$X > 0$ となる確率を求めよ。　　　(2)　X の平均と分散を求めよ。

→ p.165 練習問題6