数学 B　Advanced　P.049

2 章　ベクトル

真理とは,
たいまつのようなものである。
揺さぶるほど輝きを増す。

アイルランドの数学者，物理学者。
幼少期から数や言語に異常な才能を示し,
10 か国語以上を理解する神童であった。
22 歳という若さで天文学教授になり,
数学や物理学の分野で数多くの業績を残したが,
古典文学や詩にも造詣が深かった。
現代のベクトル解析に現れる公式の多くは
彼が考案したものである。

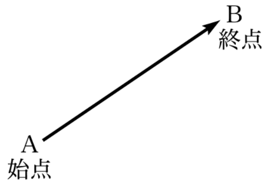
ウィリアム・ローワン・ハミルトン
（1805 年～1865 年）

数学 B　Advanced　P.050

1 節　平面上のベクトル

1　ベクトルの意味

有向線分とベクトル

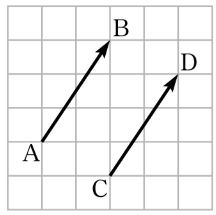


平面上で，点 A から点 B までの移動は，右の図のように，線分 AB に向きを示す矢印をつけて表すことができる。このような向きのついた線分を**有向線分**という。

線分 AB の長さを有向線分 AB の**大きさ**または長さという。

ここで，有向線分の長さが移動の大きさを，有向線分につけた矢印の向きが移動の向きを表している。

また，有向線分 AB において，A を**始点**，B を**終点**という。



右の図で，有向線分 AB の表す移動と有向線分 CD の表す移動とは，その大きさと向きがともに一致しているので，同じ移動であるとみなすことができる。

有向線分について，その位置を問題にせず，向きと大きさだけに着目したものを**ベクトル**という。

有向線分 AB の表すベクトルを，$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ と書く。

そして，有向線分 AB の長さをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**大きさ**といい，$\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|$ で表す。

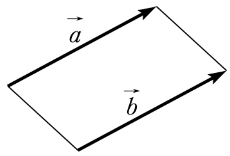
ベクトルは，大きさと向きをもつ量である。

ベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のように，1 つの文字に矢印をつけて表すこともある。

このとき，$\vec{a}$ の大きさを $|\vec{a}|$ で表す。

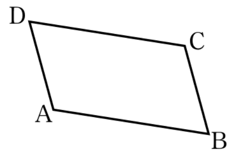
ベクトルの相等

2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の向きと大きさが一致するとき，これらのベクトルは**等しい**といい，$\vec{a}=\vec{b}$ と表す。2 つのベクトルが等しいときには，これらのベクトルを表す有向線分の一方を平行移動して，他方に重ね合わせることができる。たとえば，右の図の場合 $\vec{a}=\vec{b}$ である。



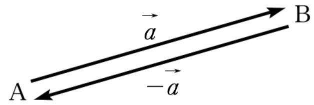
問 1　右の平行四辺形で，次のベクトルのうち互いに等しいものを答えよ。

①　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　　②　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$
③　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　④　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$



逆ベクトルと零ベクトル

ベクトル $\vec{a}$ と大きさが同じで，向きが反対のベクトルを $\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\vec{a}$ で表す。

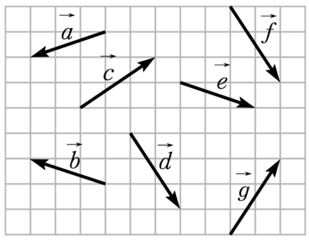


$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のときは

$$-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である。

問 2　右の図の中で，等しいベクトルを答えよ。
また，互いに逆ベクトルであるものを答えよ。



始点と終点の一致したベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は大きさが 0 のベクトルと考えられる。このベクトルを**零ベクトル**といい，$\vec{\mathbf{0}}$ で表す。また，$\vec{0}$ の向きは考えないものとする。

2　ベクトルの加法・減法・実数倍

ベクトルの加法

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，1 つの点 A をとり

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \qquad \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

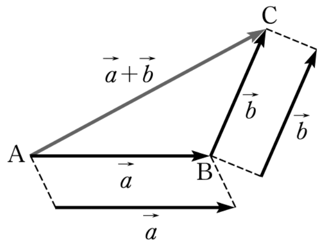
となるように点 B, C をとる。このとき，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和**といい

$$\boldsymbol{\vec{a} + \vec{b}}$$

と表す。すなわち

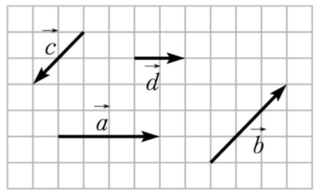
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



問 3　右の図において，次のベクトルを図示せよ。

(1)　$\vec{a} + \vec{b}$　　(2)　$\vec{c} + \vec{a}$

(3)　$\vec{a} + \vec{d}$　　(4)　$\vec{b} + \vec{c}$



ベクトルの加法については，次のことが成り立つ。

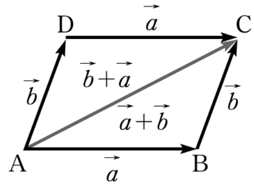
ベクトルの加法		
1	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	交換法則
2	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	結合法則
3	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	
4	$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	

証明　$\boxed{1}$ を証明する。ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，平面上に点 A をとり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となるように点 B, D をとる。下の図のように平行四辺形 ABCD をつくると

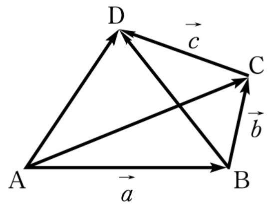
$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

であるから，$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ が成り立つ。



$\boxed{\text{問 4}}$　右の図を用いて，前ページの法則 $\boxed{2}$ が成り立つことを確かめよ。



結合法則により, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ と $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ は等しいから, かっこを省略して, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書くことができる。

$\boxed{\text{問 5}}$　平面上に 3 点 A, B, C がある。このとき，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

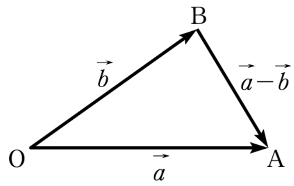
ベクトルの減法

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，1 つの点 O をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ となる 2 点 A, B をとると $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$ である。このとき，ベクトル$\overrightarrow{BA}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**差**といい

$$\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$$

と表す。すなわち

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}}$$



また，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=(-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OA}$ でもあるから，差 $\vec{a}-\vec{b}$ は

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

のように逆ベクトルを用いて表すこともできる。

$\boxed{\text{問 6}}$　前ページの問 3 の図において，次のベクトルを図示せよ。

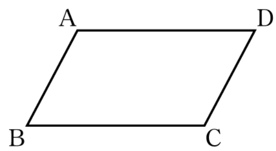
(1)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(2)　$\vec{c}-\vec{a}$　　(3)　$\vec{a}-\vec{d}$

$\boxed{\text{問 7}}$　右の図の平行四辺形において，次のベクトルの差を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

(2)　$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}$

(3)　$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$



数学 B　Advanced　P.054

ベクトルの実数倍

ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，$\vec{a}$ の k 倍 $\boldsymbol{k\vec{a}}$ を次のように定義する。

(i)　$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$k\vec{a}$ は

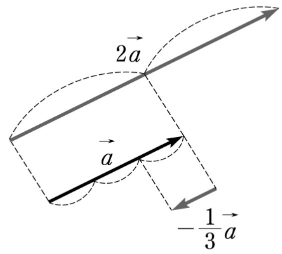
$k > 0$ ならば，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが k 倍のベクトル

$k < 0$ ならば，$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

$k = 0$ ならば，$\vec{0}$　すなわち　$0\vec{a} = \vec{0}$

(ii)　$\vec{a} = \vec{0}$ のとき，任意の実数 k に対して　$k\vec{0} = \vec{0}$

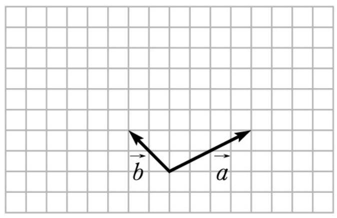
例 1　ベクトル $\vec{a}$ に対して，$2\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで大きさが 2 倍のベクトルである。
$-\frac{1}{3}\vec{a}$ は $\vec{a}$ と反対の向きで大きさが $\frac{1}{3}$ 倍のベクトルである。



問 8　右の図のように $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。

(1)　$-\frac{1}{2}\vec{a}$　　　(2)　$\vec{a} + 3\vec{b}$

(3)　$-\vec{a} + 2\vec{b}$　　　(4)　$\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}$



注意　$\frac{1}{k}\vec{a}$ を $\frac{\vec{a}}{k}$ と書くことがある。

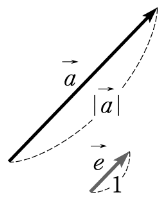
上の定義から，とくに次のことがわかる。

$$1\vec{a} = \vec{a}, \qquad (-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**という。

一般に，$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると，次のようになる。

$$\boldsymbol{\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$$



問 9　$|\vec{a}| = 3$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

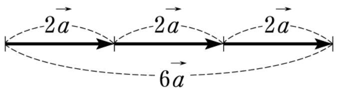
実数 k, l に対して，次の法則が成り立つ。

ベクトルの実数倍

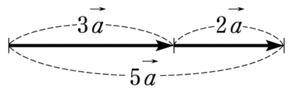
1	$\boldsymbol{k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}}$
2	$\boldsymbol{(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}}$
3	$\boldsymbol{k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}}$

次の図から上の $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が成り立つことがわかる。

(1)　$3(2\vec{a}) = 6\vec{a}$

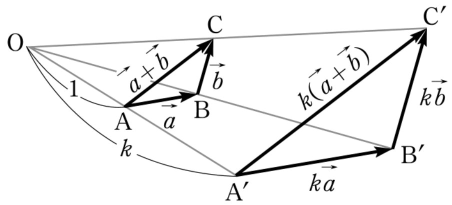


(2)　$3\vec{a} + 2\vec{a} = 5\vec{a}$



上の $\boxed{1}$ より，$k(l\vec{a})$ や $(kl)\vec{a}$ は，かっこを省略して $kl\vec{a}$ と書くことができる。

問 10　次の図を用いて，上の $\boxed{3}$ が成り立つことを確かめよ。



ベクトルの加法，減法，実数倍の計算は，これまでの法則により整式の計算と同様に行うことができる。

例 2　$2(\vec{a}-4\vec{b}) + 3(2\vec{a}+3\vec{b}) = 2\vec{a} - 8\vec{b} + 6\vec{a} + 9\vec{b}$

$$= (2+6)\vec{a} + (-8+9)\vec{b} = 8\vec{a} + \vec{b}$$

問 11　次を計算せよ。

(1)　$3\vec{a} + 4\vec{a} - 2\vec{a}$　　(2)　$3(\vec{a}+2\vec{b}) - 5(2\vec{a}-\vec{b})$

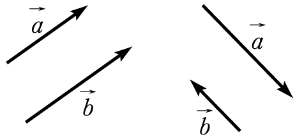
問 12　次の式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(1)　$\vec{x} - 3\vec{b} = -2\vec{x} + 9\vec{a}$

(2)　$3(\vec{x}-2\vec{a}) - 2(\vec{x}-4\vec{b}) = 2\vec{a} - 4\vec{b} - 3\vec{x}$

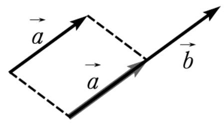
ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が，同じ向きまたは反対向きであるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行**であるといい，$\boldsymbol{\vec{a} /\!/ \vec{b}}$ と書く。

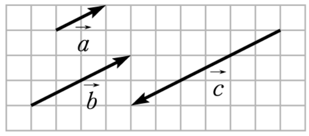


ベクトルの平行の定義と実数倍の定義から，次のことがわかる。

ベクトルの平行条件
$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき $\boldsymbol{\vec{a} /\!/ \vec{b}} \iff$ $\boldsymbol{\vec{b} = k\vec{a}}$ **となる実数** $\boldsymbol{k}$ **がある**



問 13　右の図で，$\vec{b}$, $\vec{c}$ を $\vec{a}$ で表せ。また，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を $\vec{c}$ で表せ。



ベクトルの分解

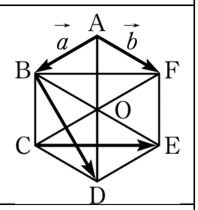
$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行でないとき，他のベクトルを $k\vec{a} + l\vec{b}$ の形に表すことを考えてみよう。

例題 1　ベクトルの分解

右の図の正六角形 ABCDEF において，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$　　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$



解　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{BF}}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \vec{b} - \vec{a}$

(2)　正六角形の中心を O とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{BE}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \vec{a} + 2\vec{b}$

問 14　例題 1 で，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

一般に，平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

分解の一意性
$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{p} = k\vec{a} + l\vec{b}$ の形にただ 1 通りに表される。ただし，k, l は実数である。

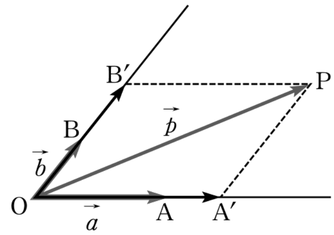
＋

このことは，次のように説明される。

1 点 O をとって

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となるように点 A, B をとる。さらに，任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となるように点 P をとる。



このとき，点 P を通り，直線 OA, OB に平行な直線を引き，直線 OA, OB との交点をそれぞれ A′, B′ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$$

となる。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 k, l が 1 通りに定まるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

すなわち　$\vec{p} = k\vec{a} + l\vec{b}$

と表され，この表し方はただ 1 通りである。

また，$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{k\vec{a} + l\vec{b} = k'\vec{a} + l'\vec{b} \iff k = k',\ l = l'}$$

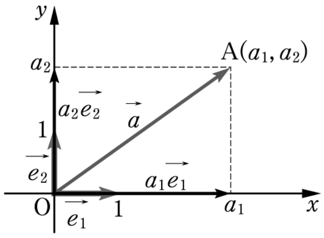
とくに　$\boldsymbol{k\vec{a} + l\vec{b} = \vec{0} \iff k = l = 0}$

$\boxed{\text{注意}}$　$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **1 次独立**であるという。

3　ベクトルの成分

座標とベクトル

O を原点とする座標平面上で，x 軸および y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを，**基本ベクトル**といい，それぞれ $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ で表す。



◀ $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ は 1 次独立であるから，この表し方はただ 1 通りである。

いま，与えられたベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A をとり，その座標を $(a_1,\ a_2)$ とすると，$\vec{a}$ は

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$$

と表される。

これを $\vec{a}$ の**基本ベクトル表示**という。この a_1，a_2 をそれぞれ $\vec{a}$ の $\boldsymbol{x}$ **成分**，$\boldsymbol{y}$ **成分**といい，$\vec{a}$ を

$$\boldsymbol{\vec{a} = (a_1,\ a_2)}$$

と表す。この表し方を，$\vec{a}$ の**成分表示**という。

ベクトルの表示	
$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$	基本ベクトル表示
$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$	成分表示

とくに，$\vec{0}$ および $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ の成分表示は次のようになる。

$$\vec{0} = (0,\ 0),\quad \overrightarrow{e_1} = (1,\ 0),\quad \overrightarrow{e_2} = (0,\ 1)$$

また，2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ に対して

$$\boldsymbol{\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2}$$

$\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は，線分 OA の長さであるから，成分表示されたベクトルの大きさは，次のようになる。

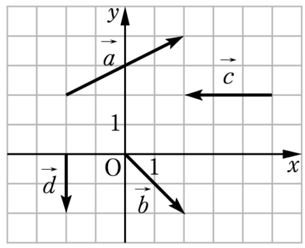
ベクトルの大きさ
$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ のとき　$\boldsymbol{|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}}$

例 3　基本ベクトル表示が $\vec{a}=4\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}$ であるベクトル $\vec{a}$ において

$\vec{a}$ の成分表示は　　　$\vec{a}=(4,\ -3)$

$\vec{a}$ の大きさは　　　$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

問 15　右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を成分表示し，その大きさを求めよ。



成分による演算

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が，基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ を用いて

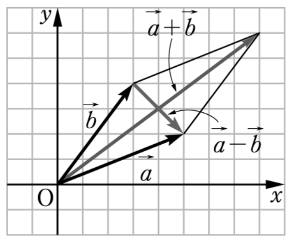
$$\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2},\ \vec{b}=b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}$$

と表されているとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和，差は

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2})+(b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2})\\&=(a_1+b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2+b_2)\overrightarrow{e_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2})-(b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2})\\&=(a_1-b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2-b_2)\overrightarrow{e_2}\end{aligned}$$

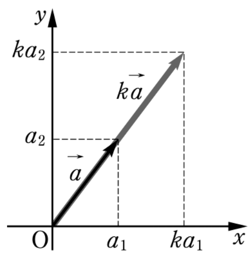
となる。



また，実数倍は

$$k\vec{a}=k(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2})=ka_1\overrightarrow{e_1}+ka_2\overrightarrow{e_2}$$

となる。



上の和, 差, 実数倍の演算を成分を用いて表すと, 次のようになる。

成分による演算		
1	$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$	
2	$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$	
3	$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$	k は実数

例 4　$\vec{a}=(5,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ 4)$ のとき

$\vec{a}+\vec{b}=(5+3,\ 2+4)=(8,\ 6)$

$3\vec{a}-2\vec{b}=3(5,\ 2)-2(3,\ 4)=(15,\ 6)-(6,\ 8)=(9,\ -2)$

問 16　$\vec{a}=(2,\ -3)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$2\vec{a}-5\vec{b}$　　(3)　$3\left(2\vec{a}-6\vec{b}\right)-5(\vec{a}-4\vec{b})$

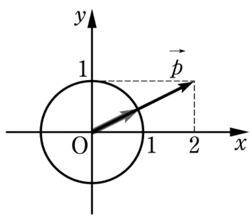
問 17　$\vec{a}=(3,\ 0)$, $\vec{b}=(4,\ -5)$ のとき，$\vec{a}-3\vec{x}=2\left(\vec{x}+\vec{b}\right)$ を満たす $\vec{x}$ の成分表示を求めよ。

例 5　$\vec{p}=(2,\ 1)$ のとき，$\vec{p}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分表示を求めてみよう。

$$|\vec{p}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

であるから，求める単位ベクトルは

$$\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{p}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$



問 18　$\vec{a}=(12,\ -5)$ と同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。　➡ p.69 問題2

例題 2　ベクトルの分解と成分

$\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(5,\ 4)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

解　$k\vec{a}+l\vec{b}=k(2,\ 3)+l(-1,\ 2)$

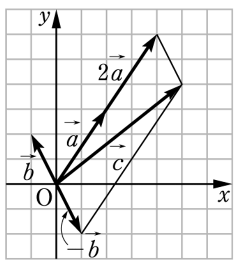
$=(2k-l,\ 3k+2l)$

これが $\vec{c}=(5,\ 4)$ に等しいから

$2k-l=5,\ 3k+2l=4$

これを解いて　$k=2,\ l=-1$

ゆえに　$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$



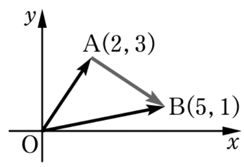
問 19　$\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，次のベクトルを $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

(1)　$\vec{c}=(5,\ 1)$　　(2)　$\vec{d}=(0,\ -3)$

数学 B　Advanced　P.061

座標と成分表示

A(2, 3), B(5, 1) について



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (5,\ 1) - (2,\ 3) = (3,\ -2)$

よって　　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

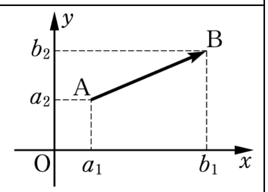
一般に，2 点 A, B に対して，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示と大きさは次のようになる。

座標と成分表示

A$(a_1,\ a_2)$, B$(b_1,\ b_2)$ のとき

1　$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (\boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{b_2} - \boldsymbol{a_2})$

2　$\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right| = \sqrt{(\boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{a_1})^2 + (\boldsymbol{b_2} - \boldsymbol{a_2})^2}$



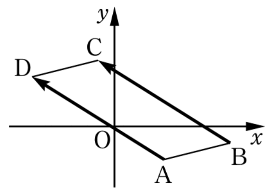
問 20　3 点 A(−2, 6), B(3, −1), C(3, −4) について，次のベクトルを成分表示し，その大きさを求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

例題 3　平行四辺形とベクトル

平面上に 3 点 A(3, −2), B(7, −1), C(−1, 4) がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ。

解　点 D の座標を$(x,\ y)$ とする。四角形 ABCD が平行四辺形となるための条件は$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$であるから



$\big(x-3,\ y-(-2)\big) = \big(-1-7,\ 4-(-1)\big)$

よって　　$x - 3 = -8,\ y + 2 = 5$

したがって　　$x = -5,\ y = 3$

ゆえに　　D(−5, 3)

問 21　例題 3 の 3 点 A, B, C を頂点にもつ平行四辺形は 3 つある。他の 2 つの平行四辺形の残りの頂点の座標を求めよ。

ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次のことが成り立つ。

ベクトルの平行条件
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\ /\!/\ \vec{b}} \iff (\boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2})=\boldsymbol{k}(\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2})$ **となる実数** $\boldsymbol{k}$ **がある**

問 22　$\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-3,\ y)$ が平行になるような y の値を求めよ。

例 6　$\vec{a}=(4,\ 3)$ と平行で，大きさが 4 であるベクトル $\vec{b}$ を求めてみよう。

k を実数として　$\vec{b}=k\vec{a}=k(4,\ 3)=(4k,\ 3k)$　　……①

となり，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(4k)^2+(3k)^2}=4$ を満たす。

これより，$25k^2=16$ であるから　　$k=\pm\frac{4}{5}$

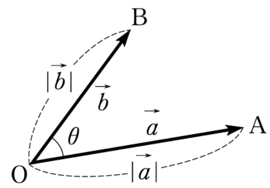
よって，①より求めるベクトルは　　$\left(\frac{16}{5},\ \frac{12}{5}\right)$, $\left(-\frac{16}{5},\ -\frac{12}{5}\right)$

問 23　$\vec{a}=(-2,\ 2)$ と平行で，大きさが 3 であるベクトルを求めよ。

例題 4　ベクトルの平行
$\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ -4)$, $\vec{c}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような実数 t の値を求めよ。
解　$\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\ /\!/\ \vec{c}$ であるから，k を実数として $\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$ と表される。 よって　　$(3,\ -2)+t(1,\ -4)=k(-1,\ 2)$ 　　　　　$(3+t,\ -2-4t)=(-k,\ 2k)$ したがって　$3+t=-k$, $-2-4t=2k$ ゆえに　　$t=2$

問 24　$\vec{a}=(6,\ -1)$, $\vec{b}=(-3,\ 2)$, $\vec{c}=(1,\ -1)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような実数 t の値を求めよ。

4　ベクトルの内積



$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，点 O を始点として，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような点 A, B をとる。このとき，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ を **$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角**という。

ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

このとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表す。

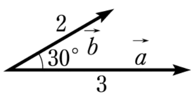
内積の定義
2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

注意　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトルではなく実数である。

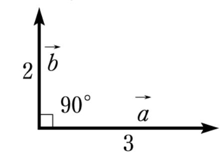
例 7　下の図について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めてみよう。

(1)



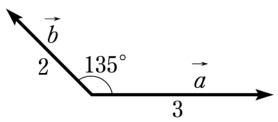
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos30^\circ=3\sqrt{3}$

(2)



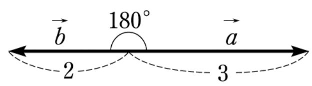
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos90^\circ=0$

(3)



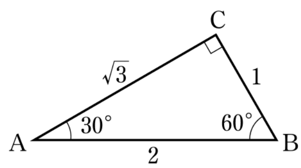
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos135^\circ=-3\sqrt{2}$

(4)



$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos180^\circ=-6$

問 25　右の図の直角三角形 ABC について，次の内積を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の符号については，次のことが成り立つ。

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta$ の値は θ が鋭角，直角，鈍角のとき，それぞれ正，0，負となるから

$0 \leqq \theta < 90^\circ$　　のとき　　$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$

$\theta = 90^\circ$　　のとき　　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$　　のとき　　$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$

$\theta = 90^\circ$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**垂直**であるといい，$\boldsymbol{\vec{a}} \perp \boldsymbol{\vec{b}}$ と書く。

ベクトルの垂直と内積
$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき $\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$

問 26　基本ベクトル $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ について，$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}$ を求めよ。

内積の定義から，明らかに　　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

また，$\vec{a}$ と $\vec{a}$ のなす角は 0° で，$\cos 0^\circ = 1$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

次に，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ について

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \leqq \vec{a}\cdot\vec{b} \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$$

すなわち，$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$ が成り立つ。

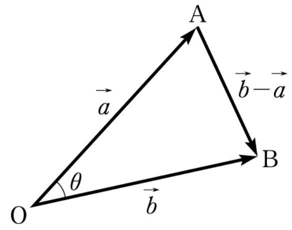
内積の性質［1］	
$\boxed{1}$	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
$\boxed{2}$	$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
$\boxed{3}$	$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$

問 27　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，次のことを証明せよ。

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ ならば，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ または $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

内積と成分

　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ の内積を成分で表してみよう。右の図のように



　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$,　　$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$,　　$\angle\mathrm{AOB}=\theta$

とし，△ AOB に余弦定理を用いると

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\cos\theta$$

この式は，$\theta=0°$, $180°$ のときも成り立つ。

よって　　　$2\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\cos\theta=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2$　　……①

ここで　　　$\mathrm{OA}^2=|\vec{a}|^2={a_1}^2+{a_2}^2$

$$\mathrm{OB}^2=\left|\vec{b}\right|^2={b_1}^2+{b_2}^2$$

$$\mathrm{AB}^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$

であるから，①において

$$\text{左辺}=2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

$$\text{右辺}=({a_1}^2+{a_2}^2)+\left({b_1}^2+{b_2}^2\right)-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}$$

$$=2(a_1b_1+a_2b_2)$$

したがって，次のことが成り立つ。

内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$$

注意　この式は，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときも成り立つ。

例 8　$\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+3\times4=10$$

問 28　次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-2,\ 3)$, $\vec{b}=(5,\ 4)$

(2)　$\vec{a}=\left(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{2}\right)$, $\vec{b}=\left(\sqrt{3}+1,\ -\sqrt{2}\right)$

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より，$\cos\theta$ の値は次のようになる。

$$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}}$$

ただし，$0°\leqq\theta\leqq 180°$

例 9　ベクトル $\vec{a}=(4,\ 2)$, $\vec{b}=(-3,\ 1)$ のなす角 θ を求めてみよう。

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{4\times(-3)+2\times1}{\sqrt{4^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+1^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから，$\theta=135°$ である。

問 29　次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(3,\ 0)$, $\vec{b}=\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$　　　(2)　$\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(3,\ -1)$

とくに，$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}\iff a_1b_1+a_2b_2=0}$$

問 30　次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が垂直になるような x, y の値を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-3,\ 1)$, $\vec{b}=(x,\ 6)$　　　(2)　$\vec{a}=(2,\ y)$, $\vec{b}=(8,\ -y)$

例題 5　ベクトルの垂直

$\vec{a}=(2,\ 1)$ に垂直で，大きさが 5 のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

解　$\vec{b}=(x,\ y)$ とすると

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから　$2x+y=0$　……①

$|\vec{b}|=5$ より，$|\vec{b}|^2=25$ であるから　$x^2+y^2=25$　……②

①，②から y を消去して　$x^2=5$

したがって　$x=\pm\sqrt{5}$

$x=\sqrt{5}$ のとき　$y=-2\sqrt{5}$

$x=-\sqrt{5}$ のとき　$y=2\sqrt{5}$

よって，求めるベクトル $\vec{b}$ は　$\left(\sqrt{5},\ -2\sqrt{5}\right)$, $\left(-\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}\right)$

問 31　$\vec{a}=(-4,\ 3)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

内積の性質

ベクトルの内積について，さらに，次の性質が成り立つ。

内積の性質［2］

$\boxed{4}$　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$　　k は実数

$\boxed{5}$　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\boxed{6}$　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

証明　$\boxed{5}$ を証明する。$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$

とすると，$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\&=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2\\&=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

よって　　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

問 32　上の $\boxed{4}$，$\boxed{6}$ を証明せよ。

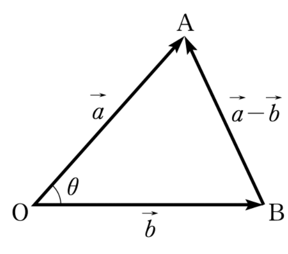
上の $\boxed{4}$ より，$k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ は $k\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書くことができる。

問 33　$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$ を証明せよ。

ベクトルの内積の性質によって，次のような計算ができる。

例 10　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ を示してみよう。

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2&=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\end{aligned}$$



問 34　ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，次の等式を証明せよ。

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$

(2)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

例題 6　内積の性質の利用［1］

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=4$ のとき，$|\vec{a}+2\vec{b}|$ の値を求めよ。

解

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$$
$$=\vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})+2\vec{b}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$$
$$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$
$$=2^2+4\times4+4\times3^2=56$$

$|\vec{a}+2\vec{b}|\geqq0$ であるから

$$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$$

問 35　$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ のとき，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

応用例題 7　内積の性質の利用［2］

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解　$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるから，次の式が成り立つ。

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+5\vec{b})=0$$

したがって　$2\vec{a}\cdot\vec{a}+5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-5\vec{b}\cdot\vec{b}=0$

$$2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$$

ここで，$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1\times\cos\theta$ であるから

$$2\times2^2+3\times2\times1\times\cos\theta-5\times1^2=0$$

よって　$3+6\cos\theta=0$

これより　$\cos\theta=-\frac{1}{2}$

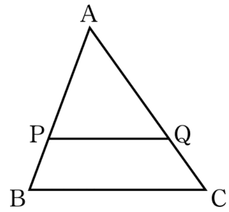
$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから

$$\theta=120°$$

問 36　$|\vec{a}|=\sqrt{2},\ |\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $6\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

問題

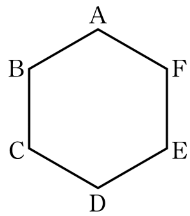
1　△ ABC の辺 AB，AC を $m:n$ に内分する点を
それぞれ P，Q とするとき，次の問に答えよ。
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となることを示せ。



2　$\vec{a} = \left(\sqrt{3},\ -1\right)$ と反対向きの単位ベクトルを成分表示せよ。

3　$\vec{a} = (6,\ -2)$，$\vec{b} = (0,\ 2)$，$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$ とするとき，次の問に答えよ。
ただし，t は実数とする。
(1)　$|\vec{p}| = 10$ となるような t の値を求めよ。
(2)　$|\vec{p}|$ の最小値を求めよ。また，そのときの t の値を求めよ。

4　1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF について，次の内積を求めよ。
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$
(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}}$
(5)　$\overrightarrow{\mathrm{BE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CF}}$



5　次のそれぞれの場合について，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。
(1)　$|\vec{a}| = 3$，$\left|\vec{b}\right| = 4$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$
(2)　$|\vec{a}| = \sqrt{2}$，$\left|\vec{a} - 2\vec{b}\right| = \sqrt{10}$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$

6　$|\vec{a}| = 2$，$\left|\vec{b}\right| = 3$，$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{17}$ のとき，次の問に答えよ。
(1)　$\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。
(2)　$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ の値を求めよ。
(3)　$\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{a} - \vec{b}$ が垂直になるような実数 t の値を求めよ。

➡ p.108 練習問題2

7　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ ならば，$\vec{a} \perp \vec{b}$ であることを証明せよ。