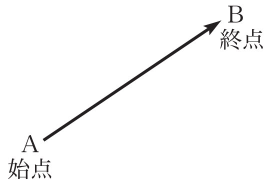
1節 平面上のベクトル

1 ベクトルの意味

有向線分とベクトル

平面上で，点Aから点Bまでの移動は，右の図のように，線分 AB に向きを示す矢印をつけて表すことができる。このような向きのついた線分を **有向線分** という。

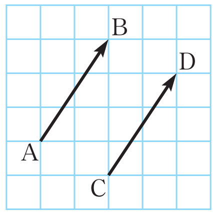


線分 AB の長さを有向線分 AB の **大きさ** または長さという。

ここで，有向線分の長さが移動の大きさを，有向線分につけた矢印の向きが移動の向きを表している。

また，有向線分 AB において，A を **始点**，B を **終点** という。

右の図で，有向線分 AB の表す移動と有向線分 CD の表す移動とは，その大きさと向きがともに一致しているので，同じ移動であるとみなすことができる。



有向線分について，その位置を問題にせず，向きと大きさだけに着目したものを **ベクトル** という。

有向線分 AB の表すベクトルを，$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ と書く。

そして，有向線分 AB の長さをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の **大きさ** といい，$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$ で表す。

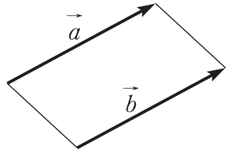
ベクトルは，大きさと向きをもつ量である。

ベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のように，1つの文字に矢印をつけて表すこともある。

このとき，$\vec{a}$ の大きさを $|\vec{a}|$ で表す。

ベクトルの相等

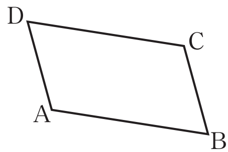
2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の向きと大きさが一致するとき，これらのベクトルは **等しい** といい，$\vec{a}=\vec{b}$ と表す。2つのベクトルが等しいときには，これらのベクトルを表す有向線分の一方を平行移動して，他方に重ね合わせることができる。たとえば，右の図の場合 $\vec{a}=\vec{b}$ である。



問 1　右の平行四辺形で，次のベクトルのうち互いに等しいものを答えよ。

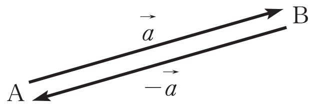
① $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　　② $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

③ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　④ $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$



逆ベクトルと零ベクトル

ベクトル $\vec{a}$ と大きさが同じで，向きが反対のベクトルを $\vec{a}$ の **逆ベクトル** といい，$-\vec{a}$ で表す。

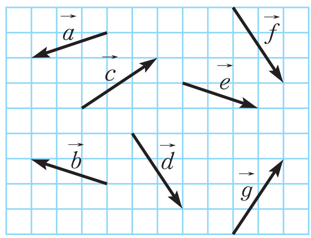


$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のときは

$$-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である。

問 2　右の図の中で，等しいベクトルを答えよ。また，互いに逆ベクトルであるものを答えよ。



始点と終点の一致したベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は大きさが0のベクトルと考えられる。このベクトルを **零ベクトル** といい，$\vec{0}$ で表す。また，$\vec{0}$ の向きは考えないものとする。

2 ベクトルの加法・減法・実数倍

ベクトルの加法

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，１つの点Aをとり

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

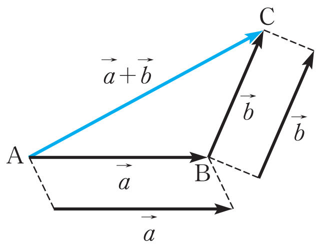
となるように点B，Cをとる。このとき，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **和** といい

$$\vec{a}+\vec{b}$$

と表す。すなわち

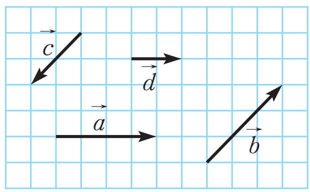
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



問 3 右の図において，次のベクトルを図示せよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\vec{c}+\vec{a}$

(3) $\vec{a}+\vec{d}$ (4) $\vec{b}+\vec{c}$



ベクトルの加法については，次のことが成り立つ。

ベクトルの加法

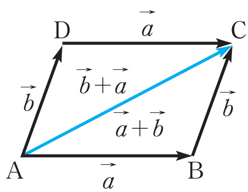
1	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	**交換法則**
2	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	**結合法則**
3	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	
4	$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$	

証明 1 を証明する。ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，平面上に点Aをとり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となるように点B，Dをとる。下の図のように平行四辺形ABCDをつくると

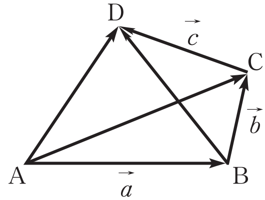
$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

であるから，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ が成り立つ。



問 4　右の図を用いて，前ページの法則 $\boxed{2}$ が成り立つことを確かめよ。



結合法則により，$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ と $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ は等しいから，かっこを省略して，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書くことができる。

問 5　平面上に 3 点 A，B，C がある。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

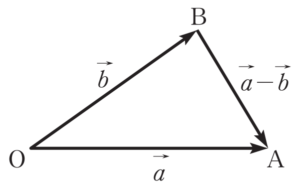
ベクトルの減法

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，1 つの点 O をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる 2 点 A，B をとると $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **差** といい

$$\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$$

と表す。すなわち

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}}$$



また，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ でもあるから，差 $\vec{a}-\vec{b}$ は

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

のように逆ベクトルを用いて表すこともできる。

問 6　前ページの問 3 の図において，次のベクトルを図示せよ。

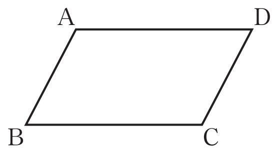
(1)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(2)　$\vec{c}-\vec{a}$　　(3)　$\vec{a}-\vec{d}$

問 7　右の図の平行四辺形において，次のベクトルの差を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}$



ベクトルの実数倍

ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，$\vec{a}$ の k 倍 $k\vec{a}$ を次のように定義する。

(i)　$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$k\vec{a}$ は

$k>0$ ならば，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが k 倍のベクトル

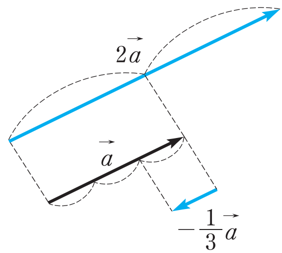
$k<0$ ならば，$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

$k=0$ ならば，$\vec{0}$　すなわち　$0\vec{a}=\vec{0}$

(ii)　$\vec{a}=\vec{0}$ のとき，任意の実数 k に対して　$k\vec{0}=\vec{0}$

例 1　ベクトル $\vec{a}$ に対して，$2\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで大きさが 2 倍のベクトルである。

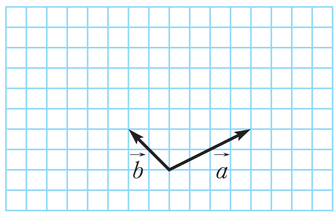
$-\dfrac{1}{3}\vec{a}$ は $\vec{a}$ と反対の向きで大きさが $\dfrac{1}{3}$ 倍のベクトルである。



問 8　右の図のように $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。

(1)　$-\dfrac{1}{2}\vec{a}$　　　(2)　$\vec{a}+3\vec{b}$

(3)　$-\vec{a}+2\vec{b}$　　　(4)　$\dfrac{3}{2}\vec{a}-\vec{b}$



注意　$\dfrac{1}{k}\vec{a}$ を $\dfrac{\vec{a}}{k}$ と書くことがある。

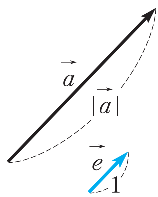
上の定義から，とくに次のことがわかる。

$$1\vec{a}=\vec{a},\qquad (-1)\vec{a}=-\vec{a}$$

大きさが 1 のベクトルを **単位ベクトル** という。

一般に，$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると，次のようになる。

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$



問 9　$|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

実数 k, l に対して，次の法則が成り立つ。

ベクトルの実数倍

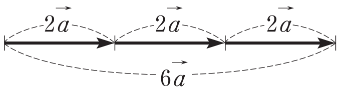
$\boxed{1}$　$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

$\boxed{2}$　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

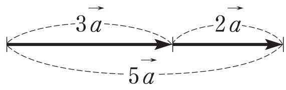
$\boxed{3}$　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

次の図から上の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ が成り立つことがわかる。

(1)　$3(2\vec{a})=6\vec{a}$

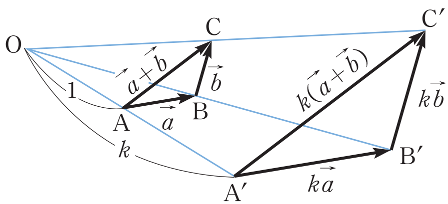


(2)　$3\vec{a}+2\vec{a}=5\vec{a}$



上の $\boxed{1}$ より，$k(l\vec{a})$ や $(kl)\vec{a}$ は，かっこを省略して $kl\vec{a}$ と書くことができる。

問10　次の図を用いて，上の $\boxed{3}$ が成り立つことを確かめよ。



ベクトルの加法，減法，実数倍の計算は，これまでの法則により整式の計算と同様に行うことができる。

例 2　$2(\vec{a}-4\vec{b})+3(2\vec{a}+3\vec{b})=2\vec{a}-8\vec{b}+6\vec{a}+9\vec{b}$

$$=(2+6)\vec{a}+(-8+9)\vec{b}=8\vec{a}+\vec{b}$$

問11　次を計算せよ。

(1)　$3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a}$　　(2)　$3(\vec{a}+2\vec{b})-5(2\vec{a}-\vec{b})$

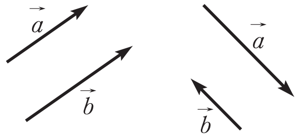
問12　次の式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(1)　$\vec{x}-3\vec{b}=-2\vec{x}+9\vec{a}$

(2)　$3(\vec{x}-2\vec{a})-2(\vec{x}-4\vec{b})=2\vec{a}-4\vec{b}-3\vec{x}$

ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，同じ向きまたは反対向きであるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **平行** であるといい，$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$ と書く。

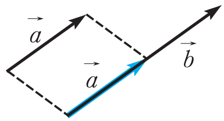


ベクトルの平行の定義と実数倍の定義から，次のことがわかる。

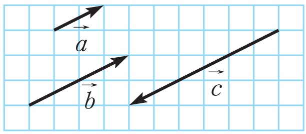
ベクトルの平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \iff$ **$\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k がある**



問13　右の図で，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{a}$ で表せ。また，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\vec{c}$ で表せ。



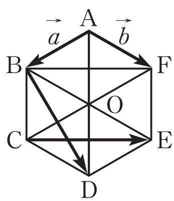
ベクトルの分解

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないとき，他のベクトルを $k\vec{a} + l\vec{b}$ の形に表すことを考えてみよう。

例題 1　ベクトルの分解

右の図の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(1)　$\overrightarrow{CE}$　　　　(2)　$\overrightarrow{BD}$



解　(1)　$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BF}$ であるから　　$\overrightarrow{CE} = \vec{b} - \vec{a}$

(2)　正六角形の中心を O とすると

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB}$$

ゆえに　　$\overrightarrow{BD} = \vec{a} + 2\vec{b}$

問14　例題 1 で，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DF}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

一般に，平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

分解の一意性

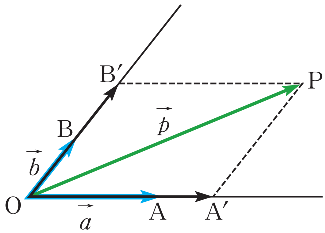
$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{p} = k\vec{a} + l\vec{b}$ の形にただ 1 通りに表される。ただし，k，l は実数である。

このことは，次のように説明される。

1 点Oをとって

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となるように点 A，B をとる。さらに，任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となるように点Pをとる。



このとき，点Pを通り，直線 OA，OB に平行な直線を引き，直線 OA，OB との交点をそれぞれ A′，B′ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$$

となる。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 k，l が 1 通りに定まるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

すなわち　　$\vec{p} = k\vec{a} + l\vec{b}$

と表され，この表し方はただ 1 通りである。

また，$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{k\vec{a} + l\vec{b} = k'\vec{a} + l'\vec{b} \iff k = k',\ l = l'}$$

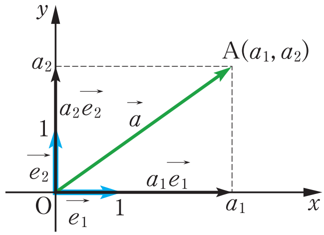
とくに　$\boldsymbol{k\vec{a} + l\vec{b} = \vec{0} \iff k = l = 0}$

注意　$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **1 次独立** であるという。

3 ベクトルの成分

座標とベクトル

Oを原点とする座標平面上で，x 軸および y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを，**基本ベクトル** といい，それぞれ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ で表す。



いま，与えられたベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点Aをとり，その座標を $(a_1,\ a_2)$ とすると，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

と表される。

◀ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ は1次独立であるから，この表し方はただ1通りである。

これを $\vec{a}$ の **基本ベクトル表示** という。この a_1，a_2 をそれぞれ $\vec{a}$ の **x 成分**，**y 成分** といい，$\vec{a}$ を

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

と表す。この表し方を，$\vec{a}$ の **成分表示** という。

ベクトルの表示

$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$	**基本ベクトル表示**
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$	**成分表示**

とくに，$\vec{0}$ および $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ の成分表示は次のようになる。

$$\vec{0}=(0,\ 0),\qquad \vec{e_1}=(1,\ 0),\qquad \vec{e_2}=(0,\ 1)$$

また，2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ に対して

$$\vec{a}=\vec{b}\iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

$\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は，線分OAの長さであるから，成分表示されたベクトルの大きさは，次のようになる。

ベクトルの大きさ

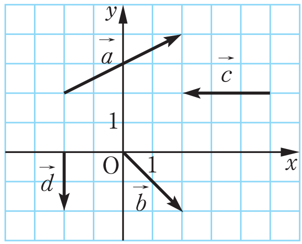
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

例 3　基本ベクトル表示が $\vec{a}=4\vec{e_1}-3\vec{e_2}$ であるベクトル $\vec{a}$ において

$\vec{a}$ の成分表示は　　$\vec{a}=(4,\ -3)$

$\vec{a}$ の大きさは　　$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

問15　右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を成分表示し，その大きさを求めよ。



成分による演算

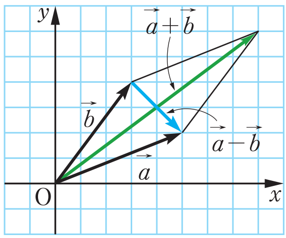
ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いて

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2},\quad \vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$$

と表されているとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和，差は

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}\\\vec{a}-\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}\end{aligned}$$

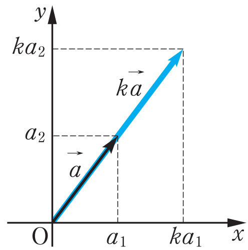
となる。



また，実数倍は

$$k\vec{a}=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})=ka_1\vec{e_1}+ka_2\vec{e_2}$$

となる。



上の和，差，実数倍の演算を成分を用いて表すと，次のようになる。

成分による演算

$\boxed{1}$　$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

$\boxed{2}$　$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

$\boxed{3}$　$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　　k は実数

例 4　$\vec{a}=(5,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ のとき

$$\vec{a}+\vec{b}=(5+3,\ 2+4)=(8,\ 6)$$

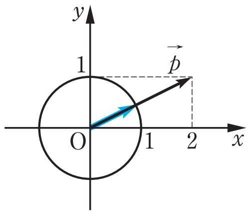
$$3\vec{a}-2\vec{b}=3(5,\ 2)-2(3,\ 4)=(15,\ 6)-(6,\ 8)=(9,\ -2)$$

問16　$\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$2\vec{a}-5\vec{b}$　　(3)　$3(2\vec{a}-6\vec{b})-5(\vec{a}-4\vec{b})$

問17　$\vec{a}=(3,\ 0)$，$\vec{b}=(4,\ -5)$ のとき，$\vec{a}-3\vec{x}=2(\vec{x}+\vec{b})$ を満たす $\vec{x}$ の成分表示を求めよ。

例 5　$\vec{p}=(2,\ 1)$ のとき，$\vec{p}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分表示を求めてみよう。



$$|\vec{p}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

であるから，求める単位ベクトルは

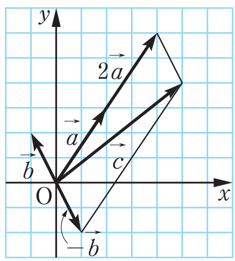
$$\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{p}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

問18　$\vec{a}=(12,\ -5)$ と同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。➡ p.69 問題2

例題 2　ベクトルの分解と成分

$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(5,\ 4)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

解



$$k\vec{a}+l\vec{b}=k(2,\ 3)+l(-1,\ 2)$$
$$=(2k-l,\ 3k+2l)$$

これが $\vec{c}=(5,\ 4)$ に等しいから

$$2k-l=5,\quad 3k+2l=4$$

これを解いて　$k=2,\quad l=-1$

ゆえに　$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$

問19　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，次のベクトルを $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

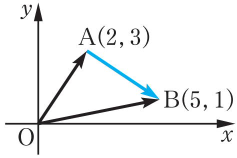
(1)　$\vec{c}=(5,\ 1)$　　(2)　$\vec{d}=(0,\ -3)$

座標と成分表示

$A(2,\ 3)$, $B(5,\ 1)$ について

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(5,\ 1)-(2,\ 3)=(3,\ -2)$$

よって　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$



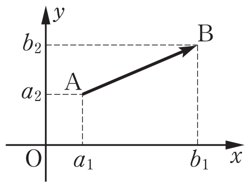
一般に，2点A，Bに対して，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の成分表示と大きさは次のようになる。

座標と成分表示

$A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$ のとき

1　$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(\boldsymbol{b_1-a_1},\ \boldsymbol{b_2-a_2})$

2　$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{(\boldsymbol{b_1-a_1})^2+(\boldsymbol{b_2-a_2})^2}$



問20　3点 $A(-2,\ 6)$, $B(3,\ -1)$, $C(3,\ -4)$ について，次のベクトルを成分表示し，その大きさを求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}$　　(2)　$\overrightarrow{BC}$　　(3)　$\overrightarrow{CA}$

例題 3　平行四辺形とベクトル

平面上に3点 $A(3,\ -2)$, $B(7,\ -1)$, $C(-1,\ 4)$ がある。四角形ABCDが平行四辺形となるような点Dの座標を求めよ。

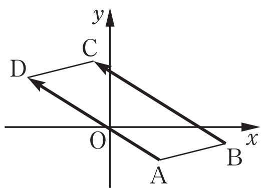
解　点Dの座標を $(x,\ y)$ とする。四角形ABCDが平行四辺形となるための条件は $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ であるから

$$(x-3,\ y-(-2))=(-1-7,\ 4-(-1))$$

よって　$x-3=-8$, $y+2=5$

したがって　$x=-5$, $y=3$

ゆえに　$D(-5,\ 3)$



問21　例題3の3点A，B，Cを頂点にもつ平行四辺形は3つある。他の2つの平行四辺形の残りの頂点の座標を求めよ。

ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次のことが成り立つ。

ベクトルの平行条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff (b_1,\ b_2)=k(a_1,\ a_2)$ **となる実数 k がある**

問22 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-3,\ y)$ が平行になるような y の値を求めよ。

例 6 $\vec{a}=(4,\ 3)$ と平行で，大きさが4であるベクトル $\vec{b}$ を求めてみよう。

k を実数として　$\vec{b}=k\vec{a}=k(4,\ 3)=(4k,\ 3k)$　……①

となり，$|\vec{b}|=\sqrt{(4k)^2+(3k)^2}=4$ を満たす。

これより，$25k^2=16$ であるから　$k=\pm\dfrac{4}{5}$

よって，① より求めるベクトルは　$\left(\dfrac{16}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{16}{5},\ -\dfrac{12}{5}\right)$

問23 $\vec{a}=(-2,\ 2)$ と平行で，大きさが3であるベクトルを求めよ。

例題 4　ベクトルの平行

$\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ -4)$, $\vec{c}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような実数 t の値を求めよ。

解 $(\vec{a}+t\vec{b})\parallel\vec{c}$ であるから，k を実数として $\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$ と表される。

よって　$(3,\ -2)+t(1,\ -4)=k(-1,\ 2)$

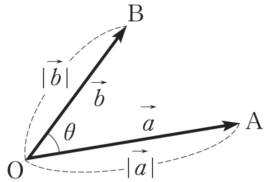
$(3+t,\ -2-4t)=(-k,\ 2k)$

したがって　$3+t=-k$, $-2-4t=2k$

ゆえに　$t=2$

問24 $\vec{a}=(6,\ -1)$, $\vec{b}=(-3,\ 2)$, $\vec{c}=(1,\ -1)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような実数 t の値を求めよ。

4 ベクトルの内積



$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，点Oを始点として，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ となるような点A，Bをとる。このとき，$\angle AOB=\theta$ を **$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角** という。

ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

このとき，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **内積** といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表す。

内積の定義

2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

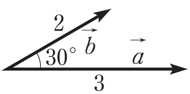
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

注意　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトルではなく実数である。

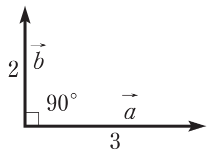
例 7　下の図について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めてみよう。

(1)



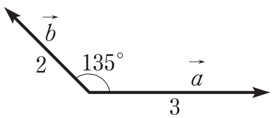
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos30^\circ=3\sqrt{3}$

(2)



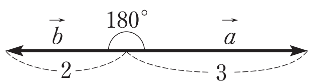
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos90^\circ=0$

(3)



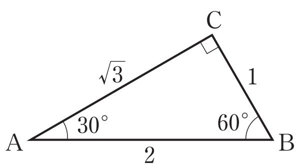
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos135^\circ=-3\sqrt{2}$

(4)



$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos180^\circ=-6$

問25　右の図の直角三角形ABCについて，次の内積を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　　(2)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

(3)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(4)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の符号については，次のことが成り立つ。

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta$ の値は θ が鋭角，直角，鈍角のとき，それぞれ正，0，負となるから

$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ のとき $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$

$\theta = 90^\circ$ のとき $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$

$\theta = 90^\circ$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **垂直** であるといい，$\boldsymbol{\vec{a}} \perp \boldsymbol{\vec{b}}$ と書く。

ベクトルの垂直と内積

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$$\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$$

問26 基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ について，$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}$ を求めよ。

内積の定義から，明らかに　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

また，$\vec{a}$ と $\vec{a}$ のなす角は 0° で，$\cos 0^\circ = 1$ であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

次に，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ について

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \leqq \vec{a}\cdot\vec{b} \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$$

すなわち，$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$ が成り立つ。

内積の性質［1］

$\boxed{1}$　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

$\boxed{2}$　$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

$\boxed{3}$　$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$

問27 $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，次のことを証明せよ。

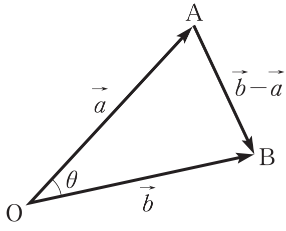
$\vec{a} /\!/ \vec{b}$ ならば $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ または $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

内積と成分

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ の内積を成分で表してみよう。右の図のように

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \angle\mathrm{AOB}=\theta$$

とし，$\triangle\mathrm{AOB}$ に余弦定理を用いると



$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\cos\theta$$

この式は，$\theta=0°$，$180°$ のときも成り立つ。

よって　$2\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\cos\theta=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2$　……①

ここで　$\mathrm{OA}^2=|\vec{a}|^2={a_1}^2+{a_2}^2$

$\mathrm{OB}^2=|\vec{b}|^2={b_1}^2+{b_2}^2$

$\mathrm{AB}^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$

であるから，① において

$$\text{左辺}=2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=({a_1}^2+{a_2}^2)+({b_1}^2+{b_2}^2)-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}\\&=2(a_1b_1+a_2b_2)\end{aligned}$$

したがって，次のことが成り立つ。

内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$$

注意　この式は，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときも成り立つ。

例 8　$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+3\times4=10$$

問28　次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(5,\ 4)$

(2)　$\vec{a}=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{2})$，$\vec{b}=(\sqrt{3}+1,\ -\sqrt{2})$

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より，$\cos\theta$ の値は次のようになる。

$$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}}\qquad \text{ただし，}0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$$

例 9　ベクトル $\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(-3,\ 1)$ のなす角 θ を求めてみよう。

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{4\times(-3)+2\times1}{\sqrt{4^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+1^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから，$\theta=135^\circ$ である。

問29　次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(3,\ 0)$，$\vec{b}=(-1,\ \sqrt{3})$　　(2)　$\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$

とくに，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b}\iff a_1b_1+a_2b_2=0}$$

問30　次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるような x，y の値を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-3,\ 1)$，$\vec{b}=(x,\ 6)$　　(2)　$\vec{a}=(2,\ y)$，$\vec{b}=(8,\ -y)$

例題 5　　ベクトルの垂直

$\vec{a}=(2,\ 1)$ に垂直で，大きさが5のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

解　$\vec{b}=(x,\ y)$ とすると

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから　$2x+y=0$　……①

$|\vec{b}|=5$ より，$|\vec{b}|^2=25$ であるから　$x^2+y^2=25$　……②

①，②から y を消去して　$x^2=5$

したがって　$x=\pm\sqrt{5}$

$x=\sqrt{5}$ のとき　$y=-2\sqrt{5}$

$x=-\sqrt{5}$ のとき　$y=2\sqrt{5}$

よって，求めるベクトル $\vec{b}$ は　$(\sqrt{5},\ -2\sqrt{5})$，$(-\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$

問31　$\vec{a}=(-4,\ 3)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

内積の性質

ベクトルの内積について，さらに，次の性質が成り立つ。

内積の性質［2］

$\boxed{4}$　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$　　k は実数

$\boxed{5}$　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\boxed{6}$　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

証明　$\boxed{5}$ を証明する。$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ とすると，$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\&=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2\\&=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

よって　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

問32　上の $\boxed{4}$，$\boxed{6}$ を証明せよ。

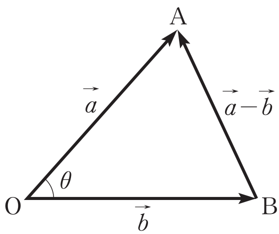
上の $\boxed{4}$ より，$k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ は $k\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書くことができる。

問33　$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$ を証明せよ。

ベクトルの内積の性質によって，次のような計算ができる。

例10　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ を示してみよう。

$$\begin{aligned}&|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\end{aligned}$$



問34　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，次の等式を証明せよ。

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

例題 6　内積の性質の利用［1］

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ のとき，$|\vec{a}+2\vec{b}|$ の値を求めよ。

解

$$\begin{aligned}|\vec{a}+2\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})\\ &= \vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})+2\vec{b}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})\\ &= |\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2\\ &= 2^2+4\times4+4\times3^2=56\end{aligned}$$

$|\vec{a}+2\vec{b}|\geqq0$ であるから

$$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$$

問35　$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ のとき，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

応用 例題 7　内積の性質の利用［2］

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解　$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるから，次の式が成り立つ。

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+5\vec{b})=0$$

したがって　$2\vec{a}\cdot\vec{a}+5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-5\vec{b}\cdot\vec{b}=0$

$$2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$$

ここで，$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1\times\cos\theta$ であるから

$$2\times2^2+3\times2\times1\times\cos\theta-5\times1^2=0$$

よって　$3+6\cos\theta=0$

これより　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

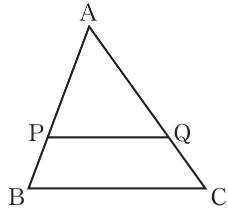
$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから

$$\theta=120^\circ$$

問36　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $6\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

問題

1　△ABC の辺 AB，AC を $m:n$ に内分する点をそれぞれ P，Q とするとき，次の問に答えよ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となることを示せ。

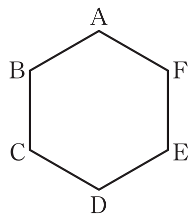
2　$\vec{a}=(\sqrt{3},\ -1)$ と反対向きの単位ベクトルを成分表示せよ。

3†　$\vec{a}=(6,\ -2)$，$\vec{b}=(0,\ 2)$，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とするとき，次の問に答えよ。ただし，t は実数とする。

(1)　$|\vec{p}|=10$ となるような t の値を求めよ。

(2)　$|\vec{p}|$ の最小値を求めよ。また，そのときの t の値を求めよ。

4　1辺の長さが1の正六角形 ABCDEF について，次の内積を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

5†　次のそれぞれの場合について，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$

(2)　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{10}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

6　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{17}$ のとき，次の問に答えよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2)　$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような実数 t の値を求めよ。

→ p.108 練習問題2

7　$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ならば，$\vec{a}\perp\vec{b}$ であることを証明せよ。