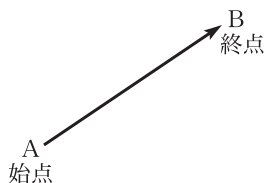


# 1 節 平面上のベクトル

## 1 ベクトルの意味

### 有向線分とベクトル

平面上で、点Aから点Bまでの移動は、右の図のように、線分ABに向きを示す矢印をつけて表すことができる。このような向きのついた線分を **有向線分** という。

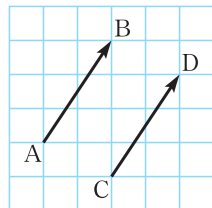


線分ABの長さを有向線分ABの **大きさ** または長さという。

ここで、有向線分の長さが移動の大きさを、有向線分につけた矢印の向きが移動の向きを表している。

また、有向線分ABにおいて、Aを **始点**、Bを **終点** という。

右の図で、有向線分ABの表す移動と有向線分CDの表す移動とは、その大きさと向きがともに一致しているので、同じ移動であるとみなすことができる。



有向線分について、その位置を問題にせず、向きと大きさだけに着目したものを **ベクトル** という。

有向線分ABの表すベクトルを、 $\overrightarrow{AB}$  と書く。

そして、有向線分ABの長さをベクトル $\overrightarrow{AB}$ の **大きさ** といい、 $|\overrightarrow{AB}|$  で表す。

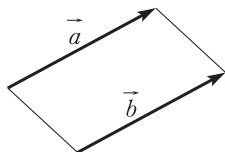
ベクトルは、大きさと向きをもつ量である。

ベクトルを、 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のように、1つの文字に矢印をつけて表すこともある。

このとき、 $\vec{a}$  の大きさを  $|\vec{a}|$  で表す。

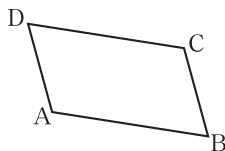
## ベクトルの相等

2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  の向きと大きさが一致するとき、これらのベクトルは **等しい** といい、 $\vec{a} = \vec{b}$  と表す。2つのベクトルが等しいときには、これらのベクトルを表す有向線分的一方を平行移動して、他方に重ね合わせることができる。たとえば、右の図の場合  $\vec{a} = \vec{b}$  である。



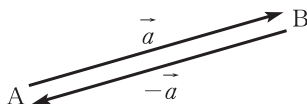
**問 1** 右の平行四辺形で、次のベクトルのうち互いに等しいものを答えよ。

- ①  $\overrightarrow{AD}$       ②  $\overrightarrow{BA}$   
 ③  $\overrightarrow{BC}$       ④  $\overrightarrow{CD}$



## 逆ベクトルと零ベクトル

ベクトル  $\vec{a}$  と大きさが同じで、向きが反対のベクトルを  $\vec{a}$  の **逆ベクトル** といい、 $-\vec{a}$  で表す。



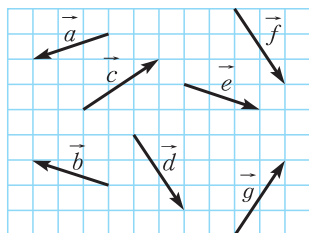
$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  のときは

$$-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$$

すなわち、 $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$  である。

**問 2** 右の図の中で、等しいベクトルを答えよ。

また、互いに逆ベクトルであるものを答えよ。



始点と終点の一致したベクトル  $\overrightarrow{AA}$  は大きさが 0 のベクトルと考えられる。このベクトルを **零ベクトル** といい、 $\vec{0}$  で表す。また、 $\vec{0}$  の向きは考えないものとする。

## 2 ベクトルの加法・減法・実数倍

### ベクトルの加法

ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  に対して, 1つの点Aをとり

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}$$

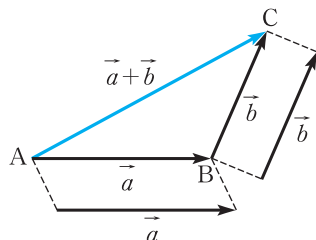
となるように点B, Cをとる。このとき,

$\overrightarrow{AC}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の **和** といい

$$\vec{a} + \vec{b}$$

と表す。すなわち

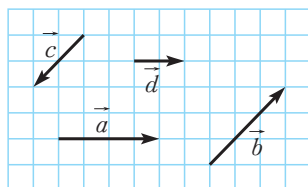
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



5

**問 3** 右の図において, 次のベクトルを図示せよ。

- (1)  $\vec{a} + \vec{b}$       (2)  $\vec{c} + \vec{a}$   
 (3)  $\vec{a} + \vec{d}$       (4)  $\vec{b} + \vec{c}$



10

ベクトルの加法については, 次のことが成り立つ。

### ベクトルの加法

- |          |   |      |
|----------|---|------|
| <b>①</b> | $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$                         | 交換法則 |
| <b>②</b> | $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ | 結合法則 |
| <b>③</b> | $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$                                   |      |
| <b>④</b> | $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$                                |      |

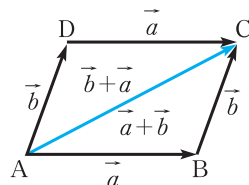
15

**証明** ①を証明する。ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  に対して, 平面上に点Aをとり,  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$  となるように点B, Dをとる。下の図のように平行四辺形 ABCD をつくと

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

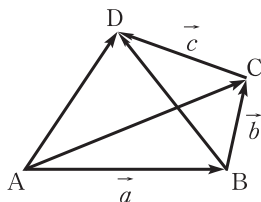
$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

であるから,  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  が成り立つ。



20

- 問 4 右の図を用いて、前ページの法則 [2] が成り立つことを確かめよ。



結合法則により、 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  と  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  は等しいから、かっこを省略して、 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  と書くことができる。

- 5 問 5 平面上に 3 点 A, B, C がある。このとき、 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$  が成り立つことを示せ。

### ベクトルの減法

ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  に対して、1つの点 O をとり、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  となる 2 点 A, B をとると  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$  である。このとき、ベクトル  $\overrightarrow{BA}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の 差 といひ

$$\vec{a} - \vec{b}$$

と表す。すなわち

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

また、 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = (-\overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OA}$  でもあるから、差  $\vec{a} - \vec{b}$  は

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

のように逆ベクトルを用いて表すこともできる。

- 問 6 前ページの問 3 の図において、次のベクトルを図示せよ。

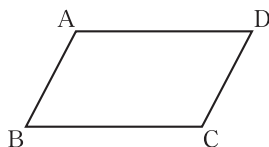
$$(1) \vec{a} - \vec{b} \quad (2) \vec{c} - \vec{a} \quad (3) \vec{a} - \vec{d}$$

- 問 7 右の図の平行四辺形において、次のベクトルの差を求めよ。

$$(1) \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$$

$$(2) \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}$$

$$(3) \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$$



## ベクトルの実数倍

ベクトル  $\vec{a}$  と実数  $k$  に対して,  $\vec{a}$  の  $k$  倍  $k\vec{a}$  を次のように定義する。

(i)  $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき,  $k\vec{a}$  は

$k > 0$  ならば,  $\vec{a}$  と同じ向きで, 大きさが  $k$  倍のベクトル

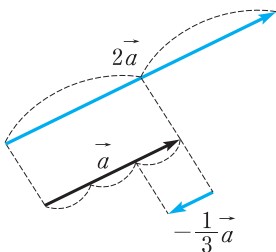
$k < 0$  ならば,  $\vec{a}$  と反対の向きで, 大きさが  $|k|$  倍のベクトル

$k = 0$  ならば,  $\vec{0}$  すなわち  $0\vec{a} = \vec{0}$

(ii)  $\vec{a} = \vec{0}$  のとき, 任意の実数  $k$  に対して  $k\vec{0} = \vec{0}$

**例 1** ベクトル  $\vec{a}$  に対して,  $2\vec{a}$  は  $\vec{a}$  と同じ向きで大きさが2倍のベクトルである。

$-\frac{1}{3}\vec{a}$  は  $\vec{a}$  と反対の向きで大きさが  $\frac{1}{3}$  倍のベクトルである。



5

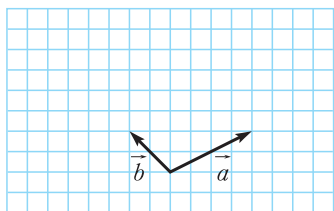
10

15

**問 8** 右の図のように  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が与えられたとき, 次のベクトルを図示せよ。

(1)  $-\frac{1}{2}\vec{a}$       (2)  $\vec{a} + 3\vec{b}$

(3)  $-\vec{a} + 2\vec{b}$       (4)  $\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}$



**注意**  $\frac{1}{k}\vec{a}$  を  $\frac{\vec{a}}{k}$  と書くことがある。

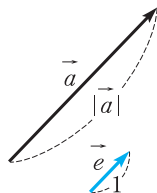
上の定義から, とくに次のことがわかる。

$$1\vec{a} = \vec{a}, \quad (-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

大きさが1のベクトルを **単位ベクトル** という。

一般に,  $\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき,  $\vec{a}$  と同じ向きの単位ベクトルを  $\vec{e}$  とすると, 次のようになる。

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$



20

**問 9**  $|\vec{a}| = 3$  のとき,  $\vec{a}$  と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

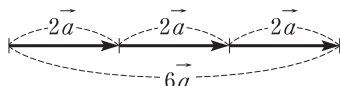
実数  $k, l$  に対して, 次の法則が成り立つ。

### ベクトルの実数倍

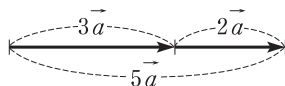
- ①  $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$
- ②  $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
- ③  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

次の図から上の ①, ② が成り立つことがわかる。

$$(1) \quad 3(2\vec{a}) = 6\vec{a}$$

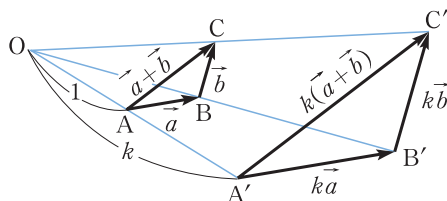


$$(2) \quad 3\vec{a} + 2\vec{a} = 5\vec{a}$$



上の ① より,  $k(l\vec{a})$  や  $(kl)\vec{a}$  は, かっこを省略して  $kl\vec{a}$  と書くことができる。

10 問10 次の図を用いて, 上の ③ が成り立つことを確かめよ。



ベクトルの加法, 減法, 実数倍の計算は, これまでの法則により整式の計算と同様に行うことができる。

例 2 
$$\begin{aligned} 2(\vec{a} - 4\vec{b}) + 3(2\vec{a} + 3\vec{b}) &= 2\vec{a} - 8\vec{b} + 6\vec{a} + 9\vec{b} \\ &= (2+6)\vec{a} + (-8+9)\vec{b} = 8\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

15 問11 次の計算せよ。

$$(1) \quad 3\vec{a} + 4\vec{a} - 2\vec{a}$$

$$(2) \quad 3(\vec{a} + 2\vec{b}) - 5(2\vec{a} - \vec{b})$$

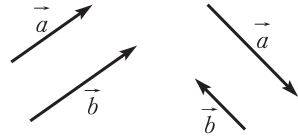
問12 次の式を満たす  $\vec{x}$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  で表せ。

$$(1) \quad \vec{x} - 3\vec{b} = -2\vec{x} + 9\vec{a}$$

$$(2) \quad 3(\vec{x} - 2\vec{a}) - 2(\vec{x} - 4\vec{b}) = 2\vec{a} - 4\vec{b} - 3\vec{x}$$

## ベクトルの平行

$\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が、同じ向きまたは反対向きであるとき、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は **平行** であるといい、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$  と書く。



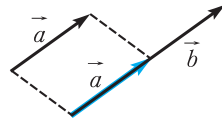
ベクトルの平行の定義と実数倍の定義から、次のことがわかる。

5

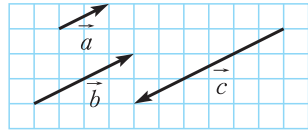
### ベクトルの平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  のとき

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a} \text{ となる実数 } k \text{ がある}$$



**問13** 右の図で、 $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を  $\vec{a}$  で表せ。また、 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を  $\vec{c}$  で表せ。



10

## ベクトルの分解

$\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が平行でないとき、他のベクトルを  $k\vec{a} + l\vec{b}$  の形に表すことを考えてみよう。

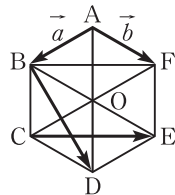
### 例題

### ベクトルの分解

15

**1** 右の図の正六角形 ABCDEF において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$  とするとき、次のベクトルを  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  で表せ。

- (1)  $\overrightarrow{CE}$  (2)  $\overrightarrow{BD}$



### 解

(1)  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BF}$  であるから  $\overrightarrow{CE} = \vec{b} - \vec{a}$

20

(2) 正六角形の中心をOとすると

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB}$$

ゆえに  $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + 2\vec{b}$

**問14** 例題1で、 $\overrightarrow{AE}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{DF}$  をそれぞれ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  で表せ。

一般に、平面上の2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について、次のことが成り立つ。

### 分解の一意性

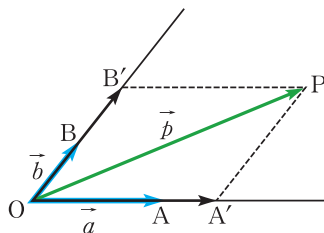
$\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  かつ  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  が平行でないとき、平面上の任意のベクトル  $\vec{p}$  は、 $\vec{p} = k\vec{a} + l\vec{b}$  の形にただ1通りに表される。ただし、 $k, l$  は実数である。

このことは、次のように説明される。

1 点  $O$  をとって

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$$

となるように点  $A, B$  をとる。さらに、任意のベクトル  $\vec{p}$  に対して、 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$  となるように点  $P$  をとる。



このとき、点  $P$  を通り、直線  $OA$ ,  $OB$  に平行な直線を引き、直線  $OA$ ,  $OB$  との交点をそれぞれ  $A'$ ,  $B'$  とすると

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB'} = l\overrightarrow{OB}$  となる実数  $k, l$  が1通りに定まるから

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB}$$

すなわち  $\vec{p} = k\vec{a} + l\vec{b}$

と表され、この表し方はただ1通りである。

また、 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  かつ  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  が平行でないとき、次のことが成り立つ。

$$k\vec{a} + l\vec{b} = k'\vec{a} + l'\vec{b} \iff k = k', l = l'$$

とくに  $k\vec{a} + l\vec{b} = \vec{0} \iff k = l = 0$

**注意**  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  かつ  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  が平行でないとき、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は1次独立であるという。



### 3 ベクトルの成分

#### 座標とベクトル

Oを原点とする座標平面上で、 $x$ 軸および $y$ 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを、**基本ベクトル**といい、それぞれ $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ で表す。

いま、与えられたベクトル $\vec{a}$ に対して、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ となる点Aをとり、その座標を $(a_1, a_2)$ とすると、 $\vec{a}$ は

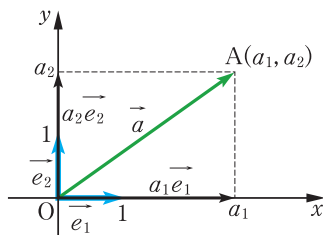
$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

と表される。

これを $\vec{a}$ の**基本ベクトル表示**という。この $a_1$ 、 $a_2$ をそれぞれ $\vec{a}$ の **$x$ 成分**、 **$y$ 成分**といい、 $\vec{a}$ を

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

と表す。この表し方を、 $\vec{a}$ の**成分表示**という。



$\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ は1次独立であるから、この表し方はただ1通りである。

#### ベクトルの表示

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

**基本ベクトル表示**

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

**成分表示**

とくに、 $\vec{0}$  および  $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$  の成分表示は次のようになる。

$$\vec{0} = (0, 0), \quad \vec{e}_1 = (1, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1)$$

また、2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ に対して

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

$\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は、線分OAの長さであるから、成分表示されたベクトルの大きさは、次のようになる。

#### ベクトルの大きさ

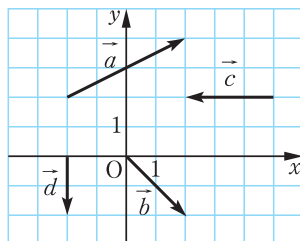
$$\vec{a} = (a_1, a_2) \text{ のとき } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

**例 3** 基本ベクトル表示が  $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$  であるベクトル  $\vec{a}$  において

$\vec{a}$  の成分表示は  $\vec{a} = (4, -3)$

$\vec{a}$  の大きさは  $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

**問 15** 右の図のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  を成分表示し, その大きさを求めよ。



### 成分による演算

ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が, 基本ベクトル  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  を用いて

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$$

と表されているとき,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の和, 差は

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) + (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2)$$

$$= (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) - (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2)$$

$$= (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2$$

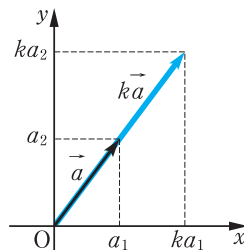
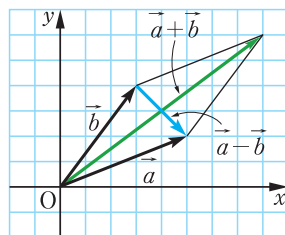
となる。

また, 実数倍は

$$k\vec{a} = k(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) = ka_1\vec{e}_1 + ka_2\vec{e}_2$$

となる。

上の和, 差, 実数倍の演算を成分を用いて表すと, 次のようになる。



### 成分による演算

**①**  $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

**②**  $(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

**③**  $k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$   $k$  は実数

**例 4**  $\vec{a} = (5, 2)$ ,  $\vec{b} = (3, 4)$  のとき

$$\vec{a} + \vec{b} = (5+3, 2+4) = (8, 6)$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(5, 2) - 2(3, 4) = (15, 6) - (6, 8) = (9, -2)$$

**問16**  $\vec{a} = (2, -3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2)$  のとき, 次のベクトルを成分表示せよ。

(1)  $\vec{a} + \vec{b}$                       (2)  $2\vec{a} - 5\vec{b}$                       (3)  $3(2\vec{a} - 6\vec{b}) - 5(\vec{a} - 4\vec{b})$       5

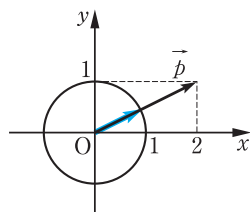
**問17**  $\vec{a} = (3, 0)$ ,  $\vec{b} = (4, -5)$  のとき,  $\vec{a} - 3\vec{x} = 2(\vec{x} + \vec{b})$  を満たす  $\vec{x}$  の成分表示を求めよ。

**例 5**  $\vec{p} = (2, 1)$  のとき,  $\vec{p}$  と同じ向きの単位ベクトルの成分表示を求めてみよう。

$$|\vec{p}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

であるから, 求める単位ベクトルは

$$\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{p} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$



10

**問18**  $\vec{a} = (12, -5)$  と同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。 → p.69 問題2

**例題** ベクトルの分解と成分

**2**  $\vec{a} = (2, 3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2)$  のとき,  $\vec{c} = (5, 4)$  を  $k\vec{a} + l\vec{b}$  の形で表せ。      15

**解** 
$$k\vec{a} + l\vec{b} = k(2, 3) + l(-1, 2)$$

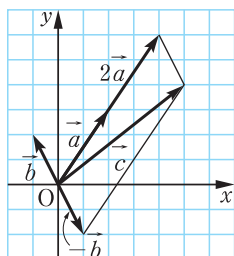
$$= (2k - l, 3k + 2l)$$

これが  $\vec{c} = (5, 4)$  に等しいから

$$2k - l = 5, \quad 3k + 2l = 4$$

これを解いて  $k = 2, l = -1$

ゆえに  $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$



20

**問19**  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (1, -1)$  のとき, 次のベクトルを  $k\vec{a} + l\vec{b}$  の形で表せ。

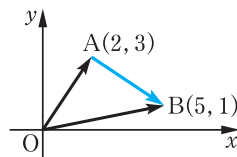
(1)  $\vec{c} = (5, 1)$                       (2)  $\vec{d} = (0, -3)$

## 座標と成分表示

$A(2, 3)$ ,  $B(5, 1)$  について

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5, 1) - (2, 3) = (3, -2)$$

よって  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$



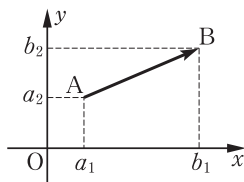
- 5 一般に, 2 点  $A, B$  に対して, ベクトル  $\overrightarrow{AB}$  の成分表示と大きさは次のようになる。

## 座標と成分表示

$A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  のとき

①  $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

②  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$



問20 3 点  $A(-2, 6)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(3, -4)$  について, 次のベクトルを成分表示し, その大きさを求めよ。

(1)  $\overrightarrow{AB}$

(2)  $\overrightarrow{BC}$

(3)  $\overrightarrow{CA}$

## 例題

## 平行四辺形とベクトル

3

15 平面上に 3 点  $A(3, -2)$ ,  $B(7, -1)$ ,  $C(-1, 4)$  がある。四角形  $ABCD$  が平行四辺形となるような点  $D$  の座標を求めよ。

## 解

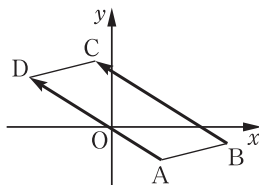
点  $D$  の座標を  $(x, y)$  とする。四角形  $ABCD$  が平行四辺形となるための条件は  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  であるから

$$(x - 3, y - (-2)) = (-1 - 7, 4 - (-1))$$

よって  $x - 3 = -8, y + 2 = 5$

したがって  $x = -5, y = 3$

ゆえに  $D(-5, 3)$



問21 例題 3 の 3 点  $A, B, C$  を頂点にもつ平行四辺形は 3 つある。他の 2 つの平行四辺形の残りの頂点の座標を求めよ。

## ベクトルの平行

$\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  について, 次のことが成り立つ。

## ベクトルの平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  のとき

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff (b_1, b_2) = k(a_1, a_2) \text{ となる実数 } k \text{ がある}$$

5

**問22**  $\vec{a} = (1, -2)$ ,  $\vec{b} = (-3, y)$  が平行になるような  $y$  の値を求めよ。

**例 6**  $\vec{a} = (4, 3)$  と平行で, 大きさが4であるベクトル  $\vec{b}$  を求めてみよう。

$$k \text{ を実数として } \vec{b} = k\vec{a} = k(4, 3) = (4k, 3k) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

となり,  $|\vec{b}| = \sqrt{(4k)^2 + (3k)^2} = 4$  を満たす。

10

$$\text{これより, } 25k^2 = 16 \text{ であるから } k = \pm \frac{4}{5}$$

$$\text{よって, } \textcircled{1} \text{ より求めるベクトルは } \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right), \left(-\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

**問23**  $\vec{a} = (-2, 2)$  と平行で, 大きさが3であるベクトルを求めよ。

## 例題

## ベクトルの平行

**4**  $\vec{a} = (3, -2)$ ,  $\vec{b} = (1, -4)$ ,  $\vec{c} = (-1, 2)$  のとき,  $\vec{a} + t\vec{b}$  が  $\vec{c}$  と平行になるような実数  $t$  の値を求めよ。

15

**解**  $(\vec{a} + t\vec{b}) \parallel \vec{c}$  であるから,  $k$  を実数として  $\vec{a} + t\vec{b} = k\vec{c}$  と表される。

$$\text{よって} \quad (3, -2) + t(1, -4) = k(-1, 2)$$

$$(3+t, -2-4t) = (-k, 2k)$$

20

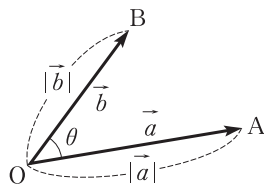
$$\text{したがって} \quad 3+t = -k, \quad -2-4t = 2k$$

$$\text{ゆえに} \quad t = 2$$

**問24**  $\vec{a} = (6, -1)$ ,  $\vec{b} = (-3, 2)$ ,  $\vec{c} = (1, -1)$  のとき,  $\vec{a} + t\vec{b}$  が  $\vec{c}$  と平行になるような実数  $t$  の値を求めよ。

## 4 ベクトルの内積

$\vec{0}$  でない 2 つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  に対して, 点  $O$  を始点として,  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  となるような点  $A$ ,  $B$  をとる。このとき,  $\angle AOB = \theta$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角 という。



ただし,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。

このとき,  $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積 といい,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  で表す。

### 内積の定義

2 つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると

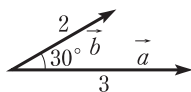
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$\vec{a} = \vec{0}$  または  $\vec{b} = \vec{0}$  のときは,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  と定める。

**注意** 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  はベクトルではなく実数である。

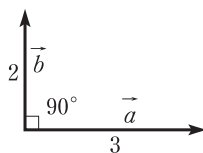
**例 7** 下の図について, 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めてみよう。

(1)



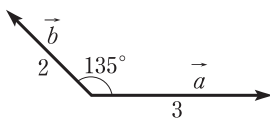
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 \times \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}$$

(2)



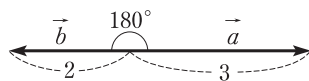
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 \times \cos 90^\circ = 0$$

(3)



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 \times \cos 135^\circ = -3\sqrt{2}$$

(4)



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 \times \cos 180^\circ = -6$$

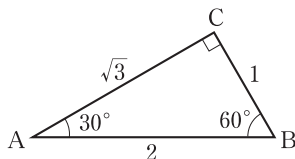
**問25** 右の図の直角三角形  $ABC$  について, 次の内積を求めよ。

(1)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

(2)  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

(3)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

(4)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$



内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の符号については、次のことが成り立つ。

$\vec{0}$  でない 2 つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると、 $\cos \theta$  の値は  $\theta$  が鋭角、直角、鈍角のとき、それぞれ正、0、負となるから

$$0^\circ \leq \theta < 90^\circ \quad \text{のとき} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

$$\theta = 90^\circ \quad \text{のとき} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$90^\circ < \theta \leq 180^\circ \quad \text{のとき} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

$\theta = 90^\circ$  のとき、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は **垂直** であるといい、 $\vec{a} \perp \vec{b}$  と書く。

### ベクトルの垂直と内積

$\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

5

10

**問26** 基本ベクトル  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  について、 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$  を求めよ。

内積の定義から、明らかに  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

また、 $\vec{a}$  と  $\vec{a}$  のなす角は  $0^\circ$  で、 $\cos 0^\circ = 1$  であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

次に、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  であるから、

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$  について

$$-|\vec{a}| |\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

すなわち、 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$  が成り立つ。

### 内積の性質 [1]

$$\text{①} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\text{②} \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$\text{③} \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

15

20

**問27**  $\vec{0}$  でない 2 つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  に対して、次のことを証明せよ。

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ ならば } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{ または } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

## 内積と成分

$\vec{0}$  でない 2 つのベクトル  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  の内積を成分で表してみよう。右の図のように

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \angle AOB = \theta$$

とし,  $\triangle AOB$  に余弦定理を用いると

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \cos \theta$$

この式は,  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$  のときも成り立つ。

$$\text{よって} \quad 2OA \times OB \cos \theta = OA^2 + OB^2 - AB^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで} \quad OA^2 = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$OB^2 = |\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$AB^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

であるから,  $\textcircled{1}$  において

$$\text{左辺} = 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{右辺} = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - \{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\}$$

$$= 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

したがって, 次のことが成り立つ。

## 内積と成分

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \quad \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ のとき}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

**注意** この式は,  $\vec{a} = \vec{0}$  または  $\vec{b} = \vec{0}$  のときも成り立つ。

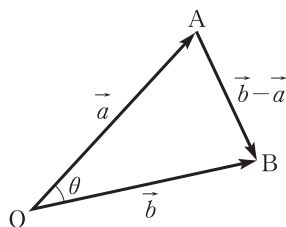
**例 8**  $\vec{a} = (2, 3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 4)$  のとき,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-1) + 3 \times 4 = 10$$

**問 28** 次のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  の内積を求めよ。

$$(1) \quad \vec{a} = (-2, 3), \quad \vec{b} = (5, 4)$$

$$(2) \quad \vec{a} = (\sqrt{3} - 1, \sqrt{2}), \quad \vec{b} = (\sqrt{3} + 1, -\sqrt{2})$$





## ベクトルのなす角

$\vec{0}$  でない 2 つのベクトル  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  のなす角を  $\theta$  とすると,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$  より,  $\cos \theta$  の値は次のようになる。

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad \text{ただし, } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

**例 9** ベクトル  $\vec{a} = (4, 2)$ ,  $\vec{b} = (-3, 1)$  のなす角  $\theta$  を求めてみよう。 5

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{4 \times (-3) + 2 \times 1}{\sqrt{4^2 + 2^2} \sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから,  $\theta = 135^\circ$  である。

**問29** 次のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角  $\theta$  を求めよ。

$$(1) \vec{a} = (3, 0), \vec{b} = (-1, \sqrt{3}) \quad (2) \vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (3, -1)$$

とくに,  $\vec{0}$  でない 2 つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について, 次のことが成り立つ。 10

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

**問30** 次のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が垂直になるような  $x$ ,  $y$  の値を求めよ。

$$(1) \vec{a} = (-3, 1), \vec{b} = (x, 6) \quad (2) \vec{a} = (2, y), \vec{b} = (8, -y)$$

## 例題

## ベクトルの垂直

**5**  $\vec{a} = (2, 1)$  に垂直で, 大きさが 5 のベクトル  $\vec{b}$  を求めよ。 15

**解**  $\vec{b} = (x, y)$  とすると

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ より, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ であるから } 2x + y = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$|\vec{b}| = 5 \text{ より, } |\vec{b}|^2 = 25 \text{ であるから } x^2 + y^2 = 25 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } y \text{ を消去して } x^2 = 5$$

$$\text{したがって } x = \pm \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{5} \text{ のとき } y = -2\sqrt{5}$$

$$x = -\sqrt{5} \text{ のとき } y = 2\sqrt{5}$$

よって, 求めるベクトル  $\vec{b}$  は  $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

**問31**  $\vec{a} = (-4, 3)$  に垂直な単位ベクトルを求めよ。

## 内積の性質

ベクトルの内積について、さらに、次の性質が成り立つ。

### 内積の性質 [2]

$$\text{[4]} \quad (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) \quad k \text{ は実数}$$

$$\text{[5]} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\text{[6]} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

▶証明 [5] を証明する。  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ,  $\vec{c} = (c_1, c_2)$

とすると、 $\vec{b} + \vec{c} = (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$  であるから

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2)$$

$$= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2$$

$$= (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

よって  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

問32 上の [4], [6] を証明せよ。

上の [4] より、 $k(\vec{a} \cdot \vec{b})$  は  $k\vec{a} \cdot \vec{b}$  と書くことができる。

問33  $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$  を証明せよ。

ベクトルの内積の性質によって、次のような計算ができる。

例10  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$  を示してみよう。

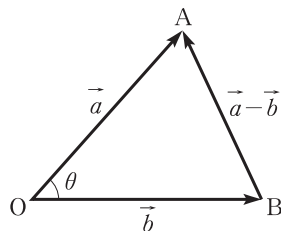
$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$



問34 ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  に対して、次の等式を証明せよ。

$$(1) \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$(2) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

## 例題

## 内積の性質の利用 [1]

6  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = 4$  のとき,  $|\vec{a} + 2\vec{b}|$  の値を求めよ。

## 解

$$\begin{aligned} |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 &= (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 2^2 + 4 \times 4 + 4 \times 3^2 = 56 \end{aligned}$$

5

$|\vec{a} + 2\vec{b}| \geq 0$  であるから

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

問35  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$  のとき,  $|3\vec{a} - \vec{b}|$  の値を求めよ。

応用  
例題

## 内積の性質の利用 [2]

7  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$  で,  $\vec{a} - \vec{b}$  と  $2\vec{a} + 5\vec{b}$  が垂直であるとき,  $\vec{a}, \vec{b}$  のなす角  $\theta$  を求めよ。

10

## 解

$\vec{a} - \vec{b}$  と  $2\vec{a} + 5\vec{b}$  が垂直であるから, 次の式が成り立つ。

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 5\vec{b}) = 0$$

$$\text{したがって} \quad 2\vec{a} \cdot \vec{a} + 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 5\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

15

$$2|\vec{a}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 5|\vec{b}|^2 = 0$$

ここで,  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 \times \cos \theta$  であるから

$$2 \times 2^2 + 3 \times 2 \times 1 \times \cos \theta - 5 \times 1^2 = 0$$

$$\text{よって} \quad 3 + 6 \cos \theta = 0$$

$$\text{これより} \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

20

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから

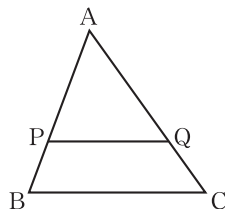
$$\theta = 120^\circ$$

問36  $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 3$  で,  $\vec{a} - \vec{b}$  と  $6\vec{a} - \vec{b}$  が垂直であるとき,  $\vec{a}, \vec{b}$  のなす角  $\theta$  を求めよ。

## 問題

- 1  $\triangle ABC$  の辺  $AB$ ,  $AC$  を  $m:n$  に内分する点をそれぞれ  $P$ ,  $Q$  とするとき、次の間に答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{PQ}$  を  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  を用いて表せ。  
 (2)  $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{BC}$  となることを示せ。



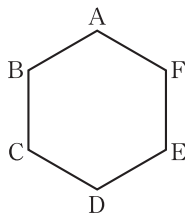
- 2  $\vec{a} = (\sqrt{3}, -1)$  と反対向きの単位ベクトルを成分表示せよ。

- 3<sup>+</sup>  $\vec{a} = (6, -2)$ ,  $\vec{b} = (0, 2)$ ,  $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$  とするとき、次の間に答えよ。  
 ただし、 $t$  は実数とする。

- (1)  $|\vec{p}| = 10$  となるような  $t$  の値を求めよ。  
 (2)  $|\vec{p}|$  の最小値を求めよ。また、そのときの  $t$  の値を求めよ。

- 4 1 辺の長さが 1 の正六角形  $ABCDEF$  について、次の内積を求めよ。

- (1)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$                       (2)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$   
 (3)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$                       (4)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CE}$   
 (5)  $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CF}$



- 5<sup>+</sup> 次のそれぞれの場合について、ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角  $\theta$  を求めよ。

- (1)  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$   
 (2)  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{10}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$

- 6  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{17}$  のとき、次の間に答えよ。

- (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値を求めよ。  
 (2)  $|\vec{a} - \vec{b}|$  の値を求めよ。  
 (3)  $\vec{a} + t\vec{b}$  と  $\vec{a} - \vec{b}$  が垂直になるような実数  $t$  の値を求めよ。

→ p.108 練習問題2

- 7  $\vec{0}$  でない 2 つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について、 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$  ならば、 $\vec{a} \perp \vec{b}$  であることを証明せよ。