1節 数列

1 数列

数を1列に並べたものを **数列** といい，数列の各数を **項** という。

例1 (1)　正の奇数を順に並べて得られる数列は

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$$

(2)　自然数の2乗を順に並べて得られる数列は

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \cdots$$

ここでは，例1のように，簡単な規則によってつくられる実数の数列について考えてみよう。

数列を一般的に表すには，1つの文字に項の番号を添えて

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

のように書く。そして，それぞれこの数列の **初項（第1項）**，**第2項**，**第3項**，$\cdots$ といい，n 番目の項 a_n を **第 n 項** という。

また，この数列を簡単に $\{a_n\}$ とも書き表す。

例1(1)の奇数の列を $\{a_n\}$ と表すと，第 n 項は $a_n=2n-1$ となる。この式に $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ を代入すると，次のように数列の各項が求められる。

初項は　　$a_1=2\times1-1=1$

第2項は　$a_2=2\times2-1=3$

第3項は　$a_3=2\times3-1=5$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

問1　第 n 項が次のように表される数列の初項から第5項までを求めよ。

(1)　$a_n=2n-3$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{2n+1}$　　(3)　$a_n=(-1)^n$

このように，数列 $\{a_n\}$ において，a_n が n の式で表されるとき，数列のすべての項が求められる。この a_n を数列 $\{a_n\}$ の **一般項** という。

例 2　(1)　数列 $\{a_n\}$ を

$$1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4,\ 4\cdot 5,\ 5\cdot 6,\ \cdots$$

とする。この数列の一般項を推定すると

$$a_n = n(n+1)$$

となる。

(2)　数列 $\{a_n\}$ を

$$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ \cdots$$

とする。数列 $\{a_n\}$ の各項の符号を除いて考えると

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

となり，この数列の第 n 項は n であるから，もとの数列の一般項を推定すると

$$a_n = (-1)^n \times n$$

となる。

問 2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定せよ。

(1)　$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ \cdots$　　(2)　$\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{3}{7},\ \dfrac{4}{9},\ \dfrac{5}{11},\ \cdots$

(3)　$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ \cdots$

項の個数が有限である数列を **有限数列** といい，項の個数が有限でない数列を **無限数列** という。有限数列では，項の個数を **項数**，最後の項を **末項** という。

例 3　3の倍数で正であるものを小さい方から順に10個並べた数列

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30$$

は有限数列で，項数は10，末項は30である。

2 等差数列

等差数列

3で割って1余る正の整数を小さい方から順に並べると

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ \cdots$$

となる。この数列は

1から始まり，前の項に3を加える

という規則でできている。

このように，初項 a から始めて，一定の数 d を次々に加えて得られる数列を **等差数列** といい，d をその等差数列の **公差** という。

例 4 (1)　正の奇数の列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$$

は，初項1，公差2の等差数列である。

(2)　初項2，公差3の等差数列は

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ \cdots$$

となる。

問 3　次の等差数列の初項から第5項までを求めよ。

(1)　初項5，公差8　　(2)　初項9，公差 -4

数列 $\{a_n\}$ が公差 d の等差数列であるとは，どのような自然数 n に対しても

$$\boxed{a_{n+1}=a_n+d}$$

が成り立つことである。

上の式を変形すると $a_{n+1}-a_n=d$ となり，差 $a_{n+1}-a_n$ は一定である。

逆に，差 $a_{n+1}-a_n$ が一定である数列は等差数列である。

等差数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ が初項 a，公差 d の等差数列であるとき

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a_1 + d = a + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a + 3d$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{array}{l} a \\ \parallel \\ a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \cdots\cdots,\quad a_{n-1},\quad a_n \\ \quad\underbrace{+d\quad +d\quad +d\cdots +d\quad +d}_{(n-1)\text{ 個}} \end{array}$$

と表されるから，第 n 項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

である。

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$$

例 5　初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項および第 20 項を求めてみよう。一般項は

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 1$$

である。また，第 20 項は

$$a_{20} = 3\cdot 20 - 1 = 59$$

である。

問 4　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 25 項を求めよ。

(1)　初項 4，公差 -3　　　(2)　初項 7，公差 $\dfrac{1}{2}$

問 5　次の等差数列 $\{a_n\}$ の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めよ。また，一般項を求めよ。

(1)　$\boxed{}$，30，37，$\cdots$　　　(2)　2，$\boxed{}$，-4，-7，$\cdots$

例題 1　　等差数列の一般項

第4項が14，第10項が62である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ。また，この数列の一般項を求めよ。

解　初項を a，公差を d とおくと

第4項が14であるから　　$a+3d=14$

第10項が62であるから　　$a+9d=62$

となる。

これらを連立させて解くと

$$a=-10,\quad d=8$$

すなわち，初項は -10，公差は8である。

したがって，一般項は

$$a_n=-10+(n-1)\cdot 8=8n-18$$

問 6　第3項が -6，第10項が29である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

→ p.30 問題1

例 6　数列 $\{a_n\}$ において，$a_n=5n+2$ ならば

$$a_{n+1}-a_n=\{5(n+1)+2\}-(5n+2)=5$$

よって，差 $a_{n+1}-a_n$ が一定であるから，数列 $\{a_n\}$ は等差数列となる。

また

$$a_1=5\cdot 1+2=7$$

したがって，等差数列 $\{a_n\}$ の初項は7，公差は5である。

問 7　数列 $\{a_n\}$ において，$a_n=3n-4$ ならば，この数列は等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ。

注意　一般項が $a_n=pn+q$ の形で表される数列は等差数列になる。

問 8　3つの数 a，b，c について，次のことが成り立つことを証明せよ。

a，b，c がこの順に等差数列となる　$\Longleftrightarrow$　$2b=a+c$

3 等差数列の和

等差数列の和

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおく。

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

例 7　等差数列 5，8，11，14，17，$\cdots$ の初項から第 4 項までの和 S_4 は，次のようになる。

$$S_4 = 5 + 8 + 11 + 14 = 38$$

初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S_n を求めてみよう。

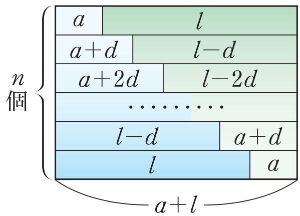
末項を l とすると，S_n は次のようになる。

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-d) + l \qquad \cdots\cdots ①$$

① の右辺の各項を逆順に並べて書くと

$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+d) + a \qquad \cdots\cdots ②$$

① と ② の辺々を加えると，右の図からわかるように右辺の和は n 個の $a+l$ の和になる。



よって　　　$2S_n = n(a+l)$

ゆえに　　　$S_n = \dfrac{1}{2}n(a+l)$

この式に $l = a + (n-1)d$ を代入すると，次のようになる。

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

したがって，次の公式が成り立つ。

等差数列の和

初項 a，公差 d，項数 n，末項 l の等差数列の和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l) = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

例 8　(1)　初項 23，末項 -5，項数 15 の等差数列の和を S_{15} とすると

$$S_{15}=\frac{1}{2}\cdot15\cdot\{23+(-5)\}=135$$

(2)　初項 3，公差 4，項数 20 の等差数列の和を S_{20} とすると

$$S_{20}=\frac{1}{2}\cdot20\cdot\{2\cdot3+(20-1)\cdot4\}=820$$

問 9　次の等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 7，末項 61，項数 10　　(2)　初項 -10，公差 4，項数 6

例 9　5 から 31 までの奇数の和 $5+7+9+\cdots+31$ を求めてみよう。

これは，初項 5，公差 2，末項 31 の等差数列の和である。

31 を第 n 項とすると　$31=5+2(n-1)$

これより，$n=14$ となり，項数は 14 である。

よって，求める和 S_{14} は　$S_{14}=\dfrac{1}{2}\cdot14\cdot(5+31)=252$

問 10　次の等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 5，公差 3，末項 53　　(2)　公差 -3，末項 4，項数 10

例題 2　　等差数列の和

初項 3，公差 2 の等差数列において，初項から第何項までの和が 63 になるかを求めよ。

解　第 n 項までの和が 63 になるとすると，等差数列の和の公式により

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot3+(n-1)\cdot2\}=63$$

ゆえに　$n^2+2n-63=0$

$(n+9)(n-7)=0$

これを解いて　$n=-9,\ 7$

n は自然数であるから，第 7 項までの和が 63 になる。

問 11　初項 21，公差 -3 の等差数列において，初項から第何項までの和が 75 になるかを求めよ。

→ p.30 問題2

いろいろな自然数の数列の和

1から n までの自然数1，2，3，…，n の和は，初項1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから，次の公式が得られる。

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

問12　上の公式を用いて，次の和を求めよ。

(1)　1から100までの自然数の和

(2)　101から200までの自然数の和

問13　1から始まる n 個の奇数の和は，次の式で表されることを示せ。

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

例題 3　　自然数の和

2桁(けた)の自然数のうち，5で割ると2余る数の和を求めよ。

解　5で割ると2余る2桁の自然数を並べたものは，公差5の等差数列で，初項は12であるから，一般項は

10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
…	…	…	…	…

$$12+5(n-1)=5n+7$$

ここで，$5n+7\leqq 99$ を満たす最大の自然数 n は

$$n\leqq\frac{92}{5}=18.4$$

よって　　$n=18$

求める数の和は，初項12，公差5，項数18の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 18\cdot\{2\cdot 12+(18-1)\cdot 5\}=981$$

問14　2桁の自然数のうち，次の条件を満たす数の和を求めよ。

(1)　7で割り切れる　　　　(2)　7で割ると3余る

4 等比数列

等比数列

日常生活で私たちが数を表すのに用いている位取りの単位

一，十，百，千，万，十万，百万，…

は，前の項を 10 倍するという規則でつくられている。

また，数列

3，6，12，24，48，96，…

は，前の項に 2 を掛けて次の項がつくられている。

このように，初項 a から始めて，一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を **等比数列** といい，r をその等比数列の **公比** という。

例 10 (1)　等比数列　1，2，4，8，16，…

の公比は 2 である。

(2)　初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列は

$$1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad -\frac{1}{8},\quad \frac{1}{16},\quad -\frac{1}{32},\quad \cdots$$

となる。

問15　次の等比数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　初項 4，公比 3　　　(2)　初項 8，公比 -1

数列 $\{a_n\}$ が公比 r の等比数列であるとは，どのような自然数 n に対しても

$$a_{n+1}=ra_n$$

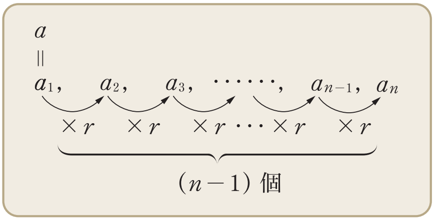
が成り立つことである。

等比数列 $\{a_n\}$ の各項が 0 にならないときには，上の式を変形すると $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ となり，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ は一定である。逆に，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が一定の数列は等比数列である。

等比数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ が初項 a，公比 r の等比数列であるとき

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a_1 \times r = ar$$
$$a_3 = a_2 \times r = ar^2$$
$$a_4 = a_3 \times r = ar^3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$



と表されるから，第 n 項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

である。

等比数列の一般項

> 初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は
> $$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$$

注意　$r \neq 0$ のとき，$r^0 = 1$ と定める。

例 11　(1)　初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

(2)　初項 4，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

問16　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　2，6，18，54，$\cdots$　　(2)　3，$-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{4}$，$-\dfrac{3}{8}$，$\cdots$

問17　次の等比数列 $\{a_n\}$ の $\boxed{}$ にあてはまる数を求めよ。また，一般項を求めよ。

(1)　2，10，$\boxed{}$，$\cdots$　　(2)　$\boxed{}$，12，-3，$\cdots$

例題 4 等比数列の一般項

第3項が28，第5項が112である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解 初項を a，公比を r とおくと

第3項が28であるから　$ar^2 = 28$ ……①

第5項が112であるから　$ar^4 = 112$ ……②

となる。

②÷① より　$r^2 = 4$

したがって　$r = \pm 2$

(i) $r = 2$ のとき

①に代入して　$a = 7$

よって　$a_n = 7 \cdot 2^{n-1}$

(ii) $r = -2$ のとき

①に代入して　$a = 7$

よって　$a_n = 7 \cdot (-2)^{n-1}$

(i)，(ii) より，求める一般項は

$$a_n = 7 \cdot 2^{n-1} \quad \text{または} \quad a_n = 7 \cdot (-2)^{n-1}$$

問18 第3項が18，第5項が162である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

例 12 $a_n = 2^n$，$b_n = 3^n$ とするとき，$c_n = a_n b_n$ で定められる数列 $\{c_n\}$ を考えると

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1} \cdot 3^{n+1}}{2^n \cdot 3^n} = 6$$

となるから，公比が6の等比数列である。

問19 $a_n = 2^n$，$b_n = 5 \cdot 3^n$ とするとき，$c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ で定められる数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。

問20 0でない3つの数 a，b，c について，次のことが成り立つことを証明せよ。

$$a,\ b,\ c \text{ がこの順に等比数列となる} \iff \boldsymbol{b^2 = ac}$$

→ p.30 問題3

5 等比数列の和

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めてみよう。

求める和を S_n とすると

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

① の両辺に r を掛けて

$$rS_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots\cdots ②$$

① から ② を引いて

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

ここで，$1-r \neq 0$，すなわち，$r \neq 1$ のとき

$$S_n = \frac{a-ar^n}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

また，$1-r=0$，すなわち，$r=1$ のとき，① より

$$S_n = a + a + a + \cdots + a = na$$

以上をまとめると，次のようになる。

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$r \neq 1$ のとき　$\boldsymbol{S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}}$

$r = 1$ のとき　$\boldsymbol{S_n = na}$

例13　初項 6，公比 -2，項数 4 の等比数列の和 S_4 は

$$S_4 = \frac{6\{1-(-2)^4\}}{1-(-2)} = \frac{6\cdot(-15)}{3} = -30$$

問21　次の等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 2，公比 -3，項数 6　　(2)　初項 $\dfrac{3}{25}$，公比 $\dfrac{4}{3}$，項数 4

例14 初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$$

問22 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 6, 18, 54, 162, $\cdots$　　(2) 10, $-\frac{5}{2}$, $\frac{5}{8}$, $-\frac{5}{32}$, $\cdots$

応用例題 5　等比数列の和と公比

初項から第 3 項までの和が 9，初項から第 6 項までの和が -63 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解 初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ のとき　$S_3=9$ より　$3a=9$

$S_6=-63$ より　$6a=-63$

ゆえに，これらを同時に満たす a は存在しない。

よって，$r \neq 1$ であるから

$S_3=9$ より　$\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=9$　……①

$S_6=-63$ より　$\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=-63$　……②

② より　$\dfrac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=-63$

これに ① を代入して　$9(1+r^3)=-63$

$1+r^3=-7$

$r^3=-8$

r は実数であるから　$r=-2$

これを ① に代入して　$a=3$

ゆえに，この等比数列の初項は 3，公比は -2 である。

問23 初項から第 3 項までの和が 35，初項から第 6 項までの和が 315 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。 → p.30 問題4

参考 複利法

1 年ごとに利子を元金にくり入れ，その合計額を次年の元金として利子を計算する **複利法** について考えてみよう。

金額 a 円を年利率 r で預金したとき

	元金	利息	元利合計[＝元金＋利息]
1 年後	a	$a\times r$	$a(1+r)$ $[=a+ar]$
2 年後	$a(1+r)$	$a(1+r)\times r$	$a(1+r)^2$
3 年後	$a(1+r)^2$	$a(1+r)^2\times r$	$a(1+r)^3$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$

複利法によれば，1 年後，2 年後，3 年後，$\cdots$ の元利合計は

$$a(1+r),\ a(1+r)^2,\ a(1+r)^3,\ \cdots$$

という等比数列になる。

複利法により 10 万円を年利率 2 % で預金すると，元利合計は次のようになる。ただし，$1.02^{25}\fallingdotseq 1.641$ とする。

$$\boxed{\begin{array}{llll}
1\text{ 年後} & 100000\times(1+0.02) & =100000\times 1.02 & =102000\ (\text{円}) \\
2\text{ 年後} & 100000\times(1+0.02)^2 & =100000\times 1.02^2 & =104040\ (\text{円}) \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
25\text{ 年後} & 100000\times(1+0.02)^{25} & =100000\times 1.02^{25} & \fallingdotseq 164100\ (\text{円})
\end{array}}$$

毎年初めに一定の金額 10 万円を，複利法により年利率 2 % で積み立てるとする。25 年目の終わりには，積立金の元利合計は初項 100000×1.02，公比 1.02，項数 25 の等比数列の和となり，次のように計算される。

$$\frac{(100000\times 1.02)\times(1.02^{25}-1)}{1.02-1}\fallingdotseq\frac{102000\times 0.641}{0.02}$$

$$=3269100\ (\text{円})$$

6 和の記号 $\sum$

数列の和 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ は記号 $\sum$ を用いて

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

と書き表す。(*) すなわち，$\sum_{k=1}^{n}a_k$ は k が 1，2，3，$\cdots$，n と変わるときのすべての a_k の和を表す。

例 15　(1)　$\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+(2\cdot4-1)$

$$=1+3+5+7$$

(2)　$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

問24　次の和を，例 15 のように記号 $\sum$ を用いずに表せ。

(1)　$\sum_{k=1}^{4}(3k-1)$　　(2)　$\sum_{k=1}^{3}2k^2$　　(3)　$\sum_{k=1}^{n}2^k$

例 16　数列の和を記号 $\sum$ を用いて表すと，次のようになる。

(1)　$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$

(2)　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6=\sum_{k=1}^{5}k(k+1)$

問25　次の和を記号 $\sum$ を用いて表せ。

(1)　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$　　(2)　$3+5+7+\cdots+(2n+1)$

(3)　$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6+5\cdot7$

記号 $\sum$ では，文字 k の代わりに，i，j などを用いることもある。

例 17　次の式はいずれも $2^2+3^2+4^2+5^2$ を表している。

$$\sum_{k=2}^{5}k^2,\quad \sum_{j=2}^{5}j^2,\quad \sum_{i=1}^{4}(i+1)^2$$

(*) $\sum$ は和を意味する Sum の頭文字 S にあたるギリシャ文字で，シグマと読む。

例 18　$r \neq 1$ のとき，初項 a，公比 r の等比数列の和の公式

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

を記号 $\sum$ を用いて表すと　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

問26　次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^{k-1}$　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-2)^k$

累乗の和

13ページで求めた公式により，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$ である。

次に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ を求めてみよう。

等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ において

$k=1$ とすると　$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$

$k=2$ とすると　$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$

$k=3$ とすると　$4^3-3^3=3\cdot 3^2+3\cdot 3+1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$k=n$ とすると　$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

これら n 個の等式の辺々を加えると

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots\cdots+n)+n$$

$$=3\sum_{k=1}^{n} k^2+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

よって　$\displaystyle 3\sum_{k=1}^{n} k^2=(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

例 19　$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\dfrac{1}{6}\cdot 10\cdot(10+1)\cdot(2\cdot 10+1)=385$

問27　次の和を求めよ。

(1)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$　　(2)　$11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$

問28　等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を利用して

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

が成り立つことを示せ。

各項が定数 c である数列 $\{a_n\}$ の和は

$$\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+\cdots+c}_{n\text{ 個}}=nc$$

である。とくに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n$ である。

累乗の和

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc \qquad c\text{ は定数} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

記号 $\sum$ の性質

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

また　$ca_1+ca_2+\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

であるから，次の公式が成り立つ。

記号 $\sum$ の性質

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad c\text{ は定数}$$

数列

例 20

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+4)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}(-3k)+\sum_{k=1}^{n}4$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n$$

$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-9(n+1)+24\}$$

$$=\frac{1}{3}n(n^2-3n+8)$$

問29　次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k+1)$　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-2)$　　(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)$

例 21　数列 $2\cdot3$, $3\cdot4$, $4\cdot5$, ･･･の初項から第 n 項までの和 S_n を求めてみよう。

この数列の第 k 項は $(k+1)(k+2)$ である。

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n$$

$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+9(n+1)+12\}$$

$$=\frac{1}{3}n(n^2+6n+11)$$

問30　数列 $1\cdot3$, $2\cdot4$, $3\cdot5$, $4\cdot6$, ･･･の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

→ p.30 問題5

7 いろいろな数列

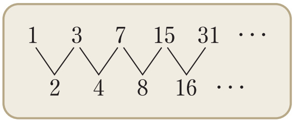
階差数列

例 22 数列 $\{a_n\}$ を　　$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ \cdots$

とする。この数列は，等差数列でも等比数列でもないが，以下のような考え方で一般項を求めてみよう。

この数列の隣り合う項の差をとると

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots$$



これは，初項 2，公比 2 の等比数列であるから，すべての自然数 k について　$a_{k+1}-a_k=2^k$

が成り立つ。右の計算から

$$\begin{array}{rl} \cancel{a_2}-a_1 & =2 \\ \cancel{a_3}-\cancel{a_2} & =4 \\ \cancel{a_4}-\cancel{a_3} & =8 \\ \cdots\cdots & \\ +)\ a_n-\cancel{a_{n-1}} & =2^{n-1} \\ \hline a_n-a_1 & =2+4+8+\cdots+2^{n-1} \end{array}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n-a_1$$
$$=2+4+8+\cdots+2^{n-1}$$
$$=\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$=2^n-2$$

ゆえに　$a_n=a_1+(2^n-2)=1+(2^n-2)=2^n-1$

$a_1=1$ であるから，$a_n=2^n-1$ は $n=1$ のときも成り立つ。

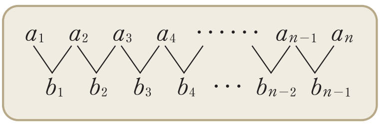
一般に，数列 $\{a_n\}$ に対して

$$b_n=a_{n+1}-a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

として得られる数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の **階差数列** という。

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$b_1=a_2-a_1$$
$$b_2=a_3-a_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$b_{n-1}=a_n-a_{n-1}$$



これら $(n-1)$ 個の等式の辺々を加えると，$n \geqq 2$ のとき

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}=a_n-a_1$$

すなわち　$a_n=a_1+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1})=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

が成り立つ。

階差数列を用いて一般項を表す式

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき

$$\boldsymbol{a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k}$$

例題 6　階差数列と一般項

数列 2，6，12，20，30，42，$\cdots$ の一般項を求めよ。

解　この数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

$$4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \cdots$$

となる。

これは，初項 4，公差 2 の等差数列であるから

$$b_n=4+(n-1)\cdot 2=2n+2$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)=2+2\sum_{k=1}^{n-1} k+\sum_{k=1}^{n-1} 2$$

$$=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=n(n+1)$$

$a_1=2$ であるから，$a_n=n(n+1)$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$a_n=n(n+1)$

問31　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　1，2，5，10，17，26，37，$\cdots$

(2)　3，4，1，10，-17，64，-179，$\cdots$

→ p.30 問題6

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$n \geqq 2$ のとき

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

であるから

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

また，$a_1 = S_1$ であるから，次のことが成り立つ。

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$\boldsymbol{a_1 = S_1}$$

$n \geqq 2$ のとき　$$\boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}}$$

例題 7　第 n 項までの和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，この数列の一般項を求めよ。

$$S_n = n^3 - n$$

解

$$a_1 = S_1 = 1^3 - 1 = 0$$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^3 - n) - \{(n-1)^3 - (n-1)\} \\ &= 3n(n-1) \end{aligned}$$

$a_1 = 0$ であるから，$a_n = 3n(n-1)$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$a_n = 3n(n-1)$

問32　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，この数列の一般項を求めよ。

(1)　$S_n = n^2 + 3n$　　(2)　$S_n = 3^n - 1$

→ p.30 問題7

分数で表された数列の和

分数で表された数列は，各項を2つの分数の差の形に分解することにより，その和を求めることができる場合がある。

たとえば，$\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{k+1-k}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k(k+1)}$ であるから

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

が成り立つ。よって

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$$

$$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

応用 例題 8　分数で表された数列の和

次の和 S_n を求めよ。

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

解

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

が成り立つから

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

問33　$\dfrac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}$ が成り立つことを利用して，次の和 S_n を求めよ。

$$S_n=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

→ p.30 問題8

少し複雑な数列

さらに，いろいろな数列やその和の求め方について学ぼう。

応用例題 9　　等差数列×等比数列

$r \neq 1$ のとき，次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1}$$

考え方　等比数列の和の公式の導き方と同様に $S_n - rS_n$ を計算する。

解

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

① の両辺に r を掛けて

$$rS_n = \qquad r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② より

$$(1-r)S_n = (1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}) - nr^n$$

$r \neq 1$ であるから

$$(1-r)S_n = \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$

$$= \frac{1 - r^n - nr^n(1-r)}{1-r}$$

$$= \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{1-r}$$

よって

$$S_n = \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

注意　例題 9 で，$r = 1$ のときは次のようになる。

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

問34　次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-1}$$

→ p.30 問題10

応用例題 10　　群数列

正の奇数の列を次のような群に分け，第 n 群には n 個の数が入るようにする。

$$1 \;|\; 3,\ 5 \;|\; 7,\ 9,\ 11 \;|\; 13,\ 15,\ 17,\ 19 \;|\; \cdots$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

(1)　第 n 群の最初の項を求めよ。

(2)　第 n 群の項の総和を求めよ。

解　(1)　$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる奇数の個数は

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$$

ゆえに，第 n 群の最初の項は，奇数の列の

$$\frac{1}{2}(n-1)n+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

番目である。

また，k 番目の奇数は $2k-1$ であるから，求める数は

$$2\cdot\frac{1}{2}(n^2-n+2)-1=n^2-n+1$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

(2)　第 n 群は初項 n^2-n+1，公差 2，項数 n の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2}n\{2(n^2-n+1)+(n-1)\cdot 2\}=n^3$$

問35　自然数の列を次のような群に分ける。

$$1,\ 2 \;|\; 3,\ 4,\ 5,\ 6 \;|\; 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \;|\; \cdots$$

(1)　第 n 群の最初の項を求めよ。

(2)　第 n 群の項の総和を求めよ。

→ p.43 練習問題13

問題

1　初項 8，公差 7 の等差数列には 400 という項はあるか。また，あるとすれば第何項か。

2†　第 5 項が 108，第 20 項が -237 の等差数列がある。

(1)　この数列の初項と公差を求めよ。

(2)　この数列で，第何項が初めて負になるか。

(3)　この数列の初項から第何項までの和が最も大きくなるか。

3　3 つの数 $x-4$，x，$x+6$ がこの順で等比数列となるとき，x の値を求めよ。

→ p.43 練習問題11

4　第 3 項が 12，第 6 項が 96 の等比数列において，初項から第 n 項までの各項の平方の和を求めよ。ただし，公比は実数とする。

5　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　1^2，4^2，7^2，10^2，13^2，$\cdots$

(2)　$2\cdot 3^2$，$4\cdot 4^2$，$6\cdot 5^2$，$8\cdot 6^2$，$10\cdot 7^2$，$\cdots$

(3)†　1，$1+2$，$1+2+4$，$1+2+4+8$，$1+2+4+8+16$，$\cdots$

6　数列 2，3，7，16，32，57，$\cdots$ の一般項を求めよ。

7　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n^2-n+1$ で表されるとき，この数列の一般項を求めよ。

→ p.43 練習問題15

8　次の和 S_n を求めよ。

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

9　$\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{1}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$\cdots$

が成り立つことを利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ を求めよ。

→ p.43 練習問題12

10　次の和 S_n を求めよ。

$S_n=4\cdot 1+7\cdot 4+10\cdot 4^2+13\cdot 4^3+\cdots+(3n+1)\cdot 4^{n-1}$

→ p.42 練習問題6