

1章 数列

1節 数列

1 数列

教科書 P.6

問1 (1) $a_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$

$$a_2 = 2 \times 2 - 3 = 1$$

$$a_3 = 2 \times 3 - 3 = 3$$

$$a_4 = 2 \times 4 - 3 = 5$$

$$a_5 = 2 \times 5 - 3 = 7$$

(2) $a_1 = \frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$

$$a_2 = \frac{1}{2 \times 2 + 1} = \frac{1}{5}$$

$$a_3 = \frac{1}{2 \times 3 + 1} = \frac{1}{7}$$

$$a_4 = \frac{1}{2 \times 4 + 1} = \frac{1}{9}$$

$$a_5 = \frac{1}{2 \times 5 + 1} = \frac{1}{11}$$

(3) $a_1 = (-1)^1 = -1$

$$a_2 = (-1)^2 = 1$$

$$a_3 = (-1)^3 = -1$$

$$a_4 = (-1)^4 = 1$$

$$a_5 = (-1)^5 = -1$$

教科書 P.7

問2 (1) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, \dots$ となるから、この数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定すると

$$a_n = n^3$$

(2) 分母は

$$3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

となり、第 n 項は $2n+1$ である。

分子は

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

となり、第 n 項は n であるから、もとの数列 $\{a_n\}$

の一般項を推定すると

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の各項の符号を除いて考えると

$$2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

となり、この数列の第 n 項は 2^n であるから、も

との数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定すると

$$a_n = (-1)^n \times 2^n = (-2)^n$$

2 等差数列

教科書 P.8

問3 (1) 5, 13, 21, 29, 37

(2) 9, 5, 1, -3, -7

教科書 P.9

問4 (1) $a_n = 4 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 7$

$$a_{25} = -3 \cdot 25 + 7 = -68$$

(2) $a_n = 7 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{13}{2}$

$$a_{25} = \frac{1}{2} \cdot 25 + \frac{13}{2} = 19$$

問5 (1) 公差を d とおくと

$$d = 37 - 30 = 7$$

よって、 \square にあてはまる数は

$$30 - 7 = 23$$

一般項は

$$a_n = 23 + (n-1) \cdot 7 = 7n + 16$$

(2) 公差を d とおくと

$$d = -7 - (-4) = -3$$

よって、 \square にあてはまる数は

$$2 + (-3) = -1$$

一般項は

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 5$$

教科書 P.10

問6 初項を a 、公差を d とおくと

第3項が -6 であるから $a + 2d = -6$

第10項が 29 であるから $a + 9d = 29$

これらを連立させて解くと $a = -16, d = 5$

すなわち、初項は -16 、公差は 5 である。

したがって、一般項は

$$a_n = -16 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 21$$

問7 $a_{n+1} - a_n = \{3(n+1) - 4\} - \{3n - 4\} = 3$

よって、差 $a_{n+1} - a_n$ が一定であるから、数列 $\{a_n\}$ は等差数列となる。

また $a_1 = 3 \cdot 1 - 4 = -1$

したがって、等差数列 $\{a_n\}$ の初項は -1 、公差は 3 である。

問8 (\Rightarrow の証明)

a, b, c がこの順に等差数列となるから、 $b - a$ と $c - b$ は等しい。

よって $b - a = c - b$

すなわち $2b = a + c$

(\Leftarrow の証明)

$2b = a + c$ より、この式を変形して $b - a = c - b$

$b - a$ と $c - b$ が等しいから、 a, b, c はこの順に等差数列となる。

3 等差数列の和

教科書 P.12

問9 (1) $S_{10} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (7 + 61) = 340$

(2) $S_6 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \{2 \cdot (-10) + (6-1) \cdot 4\} = 0$

問10 (1) 53 を第 n 項とすると

$$53 = 5 + 3(n-1)$$

これより、 $n = 17$ となり、項数は 17 である。

よって、求める和 S_{17} は

$$S_{17} = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot (5 + 53) = 493$$

(2) 初項を a とおくと

$$a + (10 - 1) \cdot (-3) = 4$$

これより、 $a = 31$ となり、初項は 31 である。

よって、求める和 S_{10} は

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (31 + 4) = 175$$

問11 第 n 項までの和が 75 になるとすると、等差数列の和の公式により

$$S_n = \frac{1}{2} n \{2 \cdot 21 + (n - 1) \cdot (-3)\} = 75$$

$$\text{ゆえに } n^2 - 15n + 50 = 0$$

$$(n - 5)(n - 10) = 0$$

$$\text{これを解いて } n = 5, 10$$

よって、第 5 項、第 10 項までの和が 75 になる。

教科書 P.13

問12 (1) $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (100 + 1) = 5050$

(2) $\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot (200 + 1) - 5050 = 15050$

【別解】 (2) は、初項 101、末項 200、項数 100 の等差数列の和であるから、等差数列の和の公式を用いると

$$\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (101 + 200) = 15050$$

問13 初項 1、末項 $2n - 1$ 、項数 n の等差数列の和であるから

$$\begin{aligned} & 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \\ &= \frac{1}{2} n \{1 + (2n - 1)\} = \frac{1}{2} n \cdot 2n = n^2 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

【別証】 初項 1、公差 2、項数 n の等差数列の和であるから

$$\begin{aligned} & 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \\ &= \frac{1}{2} n \{2 \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2\} = \frac{1}{2} n \cdot 2n = n^2 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

問14 (1) 7 で割り切れる 2 桁の自然数を並べたものは、公差 7 の等差数列で、初項は 14 であるから、一般項は

$$14 + 7(n - 1) = 7n + 7$$

ここで、 $7n + 7 \leq 99$ を満たす最大の自然数 n は

$$n \leq \frac{92}{7} = 13.1 \cdots$$

よって $n = 13$

求める数の和は、初項 14、公差 7、項数 13 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \{2 \cdot 14 + (13 - 1) \cdot 7\} = 728$$

(2) 7 で割ると 3 余る 2 桁の自然数を並べたものは、公差 7 の等差数列で、初項は 10 であるから、一般項は

$$10 + 7(n - 1) = 7n + 3$$

ここで、 $7n + 3 \leq 99$ を満たす最大の自然数 n は

$$n \leq \frac{96}{7} = 13.7 \cdots$$

よって $n = 13$

求める数の和は、初項 10、公差 7、項数 13 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \{2 \cdot 10 + (13 - 1) \cdot 7\} = 676$$

4 等比数列

教科書 P.14

問15 (1) 4, 12, 36, 108, 324

(2) 8, -8, 8, -8, 8

教科書 P.15

問16 (1) 初項 2、公比 $\frac{6}{2} = 3$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般

$$\text{項は } a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

(2) 初項 3、公比 $-\frac{3}{2} \div 3 = -\frac{1}{2}$ の等比数列

$$\{a_n\} \text{ の一般項は } a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

問17 (1) 公比を r とおくと $r = \frac{10}{2} = 5$

よって、 \square にあてはまる数は

$$10 \times 5 = 50$$

したがって、一般項は $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$

(2) 公比を r とおくと $r = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$

よって、 \square にあてはまる数は

$$12 \div \left(-\frac{1}{4}\right) = -48$$

したがって、一般項は $a_n = -48 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

教科書 P.16

問18 初項を a 、公比を r とおくと

第 3 項が 18 であるから

$$ar^2 = 18 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

第 5 項が 162 であるから

$$ar^4 = 162 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ より $r^2 = 9$

したがって $r = \pm 3$

(i) $r = 3$ のとき

$\textcircled{1}$ に代入して $a = 2$

よって $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

(ii) $r = -3$ のとき

$\textcircled{1}$ に代入して $a = 2$

よって $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$

(i), (ii) より、求める一般項は

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ または } a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$$

問19 $c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n}{5 \cdot 3^n}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{2^{n+1}}{5 \cdot 3^{n+1}} \div \frac{2^n}{5 \cdot 3^n} \\ &= \frac{2^{n+1} \cdot 5 \cdot 3^n}{5 \cdot 3^{n+1} \cdot 2^n} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となるから、公比が $\frac{2}{3}$ の等比数列である。

問20 (⇒ の証明)

a, b, c がこの順に等比数列となるから、 $\frac{b}{a}$ と $\frac{c}{b}$ は等しい。

$$\text{よって } \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$$\text{すなわち } b^2 = ac$$

(⇐ の証明)

$b^2 = ac$ であり、 a, b, c のいずれも 0 でないから、この式を変形すると $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$\frac{b}{a}$ と $\frac{c}{b}$ が等しいから、 a, b, c はこの順に等比数列となる。

5 等比数列の和

教科書 P.17

$$\text{問21 (1) } S_6 = \frac{2\{1 - (-3)^6\}}{1 - (-3)} = \frac{2 \cdot (-728)}{4} = -364$$

$$(2) S_4 = \frac{\frac{3}{25} \left\{ \left(\frac{4}{3} \right)^4 - 1 \right\}}{\frac{4}{3} - 1} = \frac{\frac{3}{25} \cdot \frac{175}{81}}{\frac{1}{3}} = \frac{7}{9}$$

教科書 P.18

問22 (1) 初項 6, 公比 $\frac{18}{6} = 3$ の等比数列であるから

$$S_n = \frac{6(3^n - 1)}{3 - 1} = 3(3^n - 1)$$

(2) 初項 10, 公比 $\left(-\frac{5}{2}\right) \div 10 = -\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$S_n = \frac{10 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = 8 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right\}$$

問23 初項を a , 公比を r , 初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r = 1$ のとき

$$S_3 = 35 \text{ より } 3a = 35$$

$$S_6 = 315 \text{ より } 6a = 315$$

ゆえに、これらを同時に満たす a は存在しない。

よって、 $r \neq 1$ であるから

$$S_3 = 35 \text{ より } \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 35 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = 315 \text{ より } \frac{a(1-r^6)}{1-r} = 315 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } \frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r} = 315$$

$$\text{これに } \textcircled{1} \text{ を代入して } 35(1+r^3) = 315$$

$$1+r^3 = 9$$

$$r^3 = 8$$

r は実数であるから $r = 2$

これを $\textcircled{1}$ に代入して $a = 5$

ゆえに、この等比数列の初項は 5, 公比は 2 である。

6 和の記号 Σ

教科書 P.20

$$\begin{aligned}\text{問24 (1) } \sum_{k=1}^4 (3k-1) &= (3 \cdot 1 - 1) + (3 \cdot 2 - 1) + (3 \cdot 3 - 1) + (3 \cdot 4 - 1) \\ &= 2 + 5 + 8 + 11 \\ &= 2 + 5 + 8 + 11\end{aligned}$$

$$(2) \sum_{k=1}^3 2k^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 = 2 + 8 + 18$$

$$(3) \sum_{k=1}^n 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

$$\text{問25 (1) } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3$$

$$(2) 3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1) = \sum_{k=1}^n (2k+1)$$

$$(3) 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = \sum_{k=1}^5 k(k+2)$$

教科書 P.21

$$\text{問26 (1) } \sum_{k=1}^n 2 \cdot 3^{k-1} = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

$$\begin{aligned}(2) \sum_{k=1}^n (-2)^k &= \sum_{k=1}^n \{-2 \cdot (-2)^{k-1}\} \\ &= \frac{-2\{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)} \\ &= -\frac{2}{3} \{1 - (-2)^n\}\end{aligned}$$

教科書 P.22

$$\begin{aligned}\text{問27 (1) } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2 &= \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot (20+1) \cdot (2 \cdot 20+1) = 2870\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) 11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 20^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2) \\ &\quad - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \\ &= 2870 - \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot (10+1) \cdot (2 \cdot 10+1) \\ &= 2870 - 385 = 2485\end{aligned}$$

問28 等式 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ において

$$k=1 \text{ とすると } 2^4 - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

$$k=2 \text{ とすると } 3^4 - 2^4 = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$$

$$k=3 \text{ とすると } 4^4 - 3^4 = 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$k=n \text{ とすると } (n+1)^4 - n^4 = 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1$$

$$\text{これら } n \text{ 個の等式の辺々を加えると } (n+1)^4 - 1^4 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

よって

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k=1}^n k^3 &= (n+1)^4 - 1 - 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= (n+1)^4 - 1 - 6 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &\quad - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - n \\ &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) \\ &\quad - (n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (n+1)\{(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\} \\ &= (n+1)(n^3 + n^2) \\ &= n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

教科書 P.23

$$\begin{aligned} \text{問29 (1)} \quad \sum_{k=1}^n (5k+1) &= \sum_{k=1}^n 5k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 5 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 5 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{2} n\{5(n+1) + 2\} \\ &= \frac{1}{2} n(5n+7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \sum_{k=1}^n (k+1)(k-2) &= \sum_{k=1}^n (k^2 - k - 2) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 2 \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) - 2n \\ &= \frac{1}{6} n\{(n+1)(2n+1) - 3(n+1) - 12\} \\ &= \frac{1}{6} n(2n^2 - 14) = \frac{1}{3} n(n^2 - 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad \sum_{k=1}^n (k^3 - k) &= \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k \\ &= \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 - \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)\{n(n+1) - 2\} \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)(n^2 + n - 2) \\ &= \frac{1}{4} (n-1)n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

問30 この数列の第 k 項は $k(k+2)$ である。よって、求める和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)\{(2n+1) + 6\} \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+7) \end{aligned}$$

7 いろいろな数列

教科書 P.25

問31 (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、 $\{b_n\}$ は

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

これは、初項 1、公差 2 の等差数列であるから

$$b_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n - (n-1) \\ &= n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

 $a_1 = 1$ であるから、 $a_n = n^2 - 2n + 2$ は $n = 1$ のときも成り立つ。ゆえに $a_n = n^2 - 2n + 2$ (2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、 $\{b_n\}$ は

$$1, -3, 9, -27, 81, -243, \dots$$

これは、初項 1、公比 -3 の等比数列であるから

$$b_n = 1 \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^{n-1}$$

したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (-3)^{k-1} \\ &= 3 + \frac{1 \cdot \{1 - (-3)^{n-1}\}}{1 - (-3)} \\ &= 3 + \frac{1}{4} \{1 - (-3)^{n-1}\} \\ &= \frac{1}{4} \{13 - (-3)^{n-1}\} \end{aligned}$$

 $a_1 = 3$ であるから、 $a_n = \frac{1}{4} \{13 - (-3)^{n-1}\}$ は $n = 1$ のときも成り立つ。ゆえに $a_n = \frac{1}{4} \{13 - (-3)^{n-1}\}$

教科書 P.26

問32 (1) $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$ また、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

 $a_1 = 4$ であるから、 $a_n = 2n + 2$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに $a_n = 2n + 2$

(2) $a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$

また、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) = 3 \cdot 3^{n-1} - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$a_1 = 2$ であるから、 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

教科書 P.27

問33
$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$$

が成り立つから

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$$

教科書 P.28

問34 $S_n = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3 + \dots + 2n \cdot 3^{n-1}$ ①

①の両辺に3を掛けて

$$3S_n = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + \dots + 2(n-1) \cdot 3^{n-1} + 2n \cdot 3^n \dots\dots ②$$

①-②より

$$\begin{aligned} -2S_n &= 2(1+3+3^2+\dots+3^{n-1}) - 2n \cdot 3^n \\ &= 2 \cdot \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} - 2n \cdot 3^n \\ &= 3^n - 1 - 2n \cdot 3^n = -(2n-1) \cdot 3^n - 1 \end{aligned}$$

よって $S_n = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{2}$

教科書 P.29

問35 (1) 第 n 群の項の個数は $2n$ であるから、 $n \geq 2$ のとき、第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n = n(n-1)$$

ゆえに、第 n 群の最初の項は

$$n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1$$

これは、 $n = 1$ のときも成り立つ。

(2) 第 n 群は初項 $n^2 - n + 1$ 、公差 1、項数 $2n$ の等差数列であるから、その和は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot 2n\{2(n^2 - n + 1) + (2n - 1) \cdot 1\} \\ &= n(2n^2 + 1) \end{aligned}$$

【別解】第 n 群の項の総和 S を求めるには、第 1 群から第 n 群までの項の総和 T から第 1 群から第 $(n-1)$ 群までの項の総和 U を引けばよい。
第 1 群から第 n 群までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^n 2k = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = n(n+1)$$

したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S &= T - U = \sum_{k=1}^{n(n+1)} k - \sum_{k=1}^{n(n-1)} k \\ &= \frac{1}{2} n(n+1)\{n(n+1) + 1\} - \frac{1}{2} n(n-1)\{n(n-1) + 1\} \\ &= \frac{1}{2} n\{(n+1)(n^2 + n + 1) - (n-1)(n^2 - n + 1)\} \\ &= \frac{1}{2} n(4n^2 + 2) = n(2n^2 + 1) \end{aligned}$$

これは、 $n = 1$ のときも成り立つ。

問題

教科書 P.30

1 初項 8、公差 7 の等差数列の第 n 項が 400 であるとする $8 + (n-1) \cdot 7 = 400$
よって $n = 57$

ゆえに、この等差数列には 400 という項が、第 57 項にある。

2 (1) 初項を a 、公差を d とおくと
第 5 項が 108 であるから $a + 4d = 108$
第 20 項が -237 であるから $a + 19d = -237$

これらを連立させて解くと

$$a = 200, d = -23$$

ゆえに 初項は 200、公差は -23

(2) この数列の第 n 項を a_n とすると

$$a_n = 200 + (n-1) \cdot (-23) = -23n + 223$$

$a_n < 0$ となる条件は

$$-23n + 223 < 0$$

$$n > \frac{223}{23} = 9.6\dots$$

ゆえに、第 10 項が初めて負になる。

(3) (2) より、この数列の初項から第 9 項までが正で、第 10 項からは負である。

ゆえに、正の項のみをすべて加えれば和が最も大きくなるから、初項から第 9 項までの和が最も大きくなる。

3 $x-4, x, x+6$ がこの順に等比数列となるから

$$x^2 = (x-4)(x+6)$$

$$-2x = -24$$

よって $x = 12$

4 初項を a 、公比を r とおくと

第 3 項が 12 であるから $ar^2 = 12$ ①

第 6 項が 96 であるから $ar^5 = 96$ ②

② ÷ ① より $r^3 = 8$

r は実数であるから $r = 2$

これを ① に代入して $a = 3$

よって、第 n 項は $3 \cdot 2^{n-1}$

ゆえに、各項を平方して得られる数列の第 n 項は

$$(3 \cdot 2^{n-1})^2 = 9 \cdot 4^{n-1}$$

よって、初項9、公比4の等比数列である。

したがって、求める和は

$$\frac{9(4^n - 1)}{4 - 1} = 3(4^n - 1)$$

- 5 (1) 数列 $\{a_n\}$ の各項の指数を除いて考えると

$$1, 4, 7, 10, 13, \dots$$

となり、この数列の第 n 項は

$$1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$$

よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = (3n - 2)^2$$

また、求める和は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (3k - 2)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (9k^2 - 12k + 4) \\ &= 9 \sum_{k=1}^n k^2 - 12 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 4 \\ &= 9 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 12 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 4n \\ &= \frac{1}{2} n \{3(n+1)(2n+1) - 12(n+1) + 8\} \\ &= \frac{1}{2} n(6n^2 - 3n - 1) \end{aligned}$$

- (2) 2, 4, 6, 8, 10, ...

という数列の第 n 項は $2n$ であり

$$3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, \dots$$

という数列の第 n 項は $(n+2)^2$ であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2n(n+2)^2$$

また、求める和は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n 2k(k+2)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (2k^3 + 8k^2 + 8k) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k^3 + 8 \sum_{k=1}^n k^2 + 8 \sum_{k=1}^n k \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + 8 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ & \quad + 8 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{2} n^2(n+1)^2 + \frac{4}{3} n(n+1)(2n+1) \\ & \quad + 4n(n+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1) \{3n(n+1) + 8(2n+1) + 24\} \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(3n^2 + 19n + 32) \end{aligned}$$

- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{n-1} \\ &= \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1 \end{aligned}$$

また、求める和は

$$\sum_{k=1}^n (2^k - 1) = \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 1 = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n$$

$$= 2^{n+1} - n - 2$$

- 6 与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。その階差数列を $\{b_n\}$ とすると、 $\{b_n\}$ は

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = n^2$$

したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= 2 + \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) \\ &= \frac{1}{6} (2n^3 - 3n^2 + n + 12) \end{aligned}$$

$$a_1 = 2 \text{ であるから, } a_n = \frac{1}{6} (2n^3 - 3n^2 + n + 12)$$

は $n=1$ のときも成り立つ。

$$\text{ゆえに } a_n = \frac{1}{6} (2n^3 - 3n^2 + n + 12)$$

- 7 $a_1 = S_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - n + 1) - \{(n-1)^2 - (n-1) + 1\} \\ &= 2n - 2 \end{aligned}$$

よって、一般項 a_n は

$$a_1 = 1, n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = 2n - 2$$

- 8 $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) \\ & \quad + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \dots \\ & \quad + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) \\ &= \frac{n}{3n+1} \end{aligned}$$

- 9 $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

10 $S_n = 4 \cdot 1 + 7 \cdot 4 + 10 \cdot 4^2 + 13 \cdot 4^3 + \dots$
 $+ (3n+1) \cdot 4^{n-1} \dots \dots \textcircled{1}$

①の両辺に4を掛けて

$$4S_n = 4 \cdot 4 + 7 \cdot 4^2 + \dots + (3n-2) \cdot 4^{n-1} + (3n+1) \cdot 4^n \dots \dots \textcircled{2}$$

①-②より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} -3S_n &= 4 \cdot 1 + 3(4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1}) - (3n+1) \cdot 4^n \\ &= 4 + 3 \cdot \frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1} - (3n+1) \cdot 4^n \\ &= 4 + 4^n - 4 - (3n+1) \cdot 4^n \\ &= -3n \cdot 4^n \end{aligned}$$

よって $S_n = n \cdot 4^n$ で、 $S_1 = 4$ であるからこれは $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに $S_n = n \cdot 4^n$

2節 漸化式と数学的帰納法

1 漸化式

教科書 P.31

問1 (1) $a_1 = 6$

$$a_2 = a_1 + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 8 + 2 = 10$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 10 + 2 = 12$$

$$a_5 = a_4 + 2 = 12 + 2 = 14$$

(2) $a_1 = 1$

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

$$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$$

$$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$$

$$a_5 = 3a_4 + 2 = 3 \cdot 53 + 2 = 161$$

教科書 P.32

問2 (1) 初項 -3, 公差 4 の等差数列であるから

$$a_n = -3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 7$$

(2) 初項 4, 公比 2 の等比数列であるから

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

教科書 P.33

問3 (1) 漸化式より、すべての自然数 k について、次の式が成り立つ。

$$a_{k+1} - a_k = k^2 - k$$

よって、数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 k 項は $k^2 - k$ であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - k) = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 3 + \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) - \frac{1}{2} (n-1)n \\ &= \frac{1}{6} \{18 + (n-1)n(2n-1) - 3(n-1)n\} \\ &= \frac{1}{3} (n^3 - 3n^2 + 2n + 9) \end{aligned}$$

$a_1 = 3$ であるから、 $a_n = \frac{1}{3} (n^3 - 3n^2 + 2n + 9)$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに $a_n = \frac{1}{3} (n^3 - 3n^2 + 2n + 9)$

(2) 漸化式より、すべての自然数 k について、次の式が成り立つ。

$$a_{k+1} - a_k = 3^k$$

よって、数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 k 項は 3^k であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \\ &= 2 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{1}{2} (3^n + 1) \end{aligned}$$

$a_1 = 2$ であるから、 $a_n = \frac{1}{2} (3^n + 1)$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに $a_n = \frac{1}{2} (3^n + 1)$

教科書 P.34

問4 (1) 漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 3$ は、 $\alpha = 2\alpha + 3$ を満たす解 $\alpha = -3$ を用いて、次のように変形される。

$$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$$

$$b_n = a_n + 3 \text{ とおくと}$$

$$b_{n+1} = 2b_n$$

$$b_1 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 5, 公比 2 の等比数列であるから

$$b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

したがって $a_n = b_n - 3 = 5 \cdot 2^{n-1} - 3$

(2) 漸化式 $a_{n+1} = -2a_n + 12$ は $\alpha = -2\alpha + 12$ を満たす解 $\alpha = 4$ を用いて、次のように変形される。

$$a_{n+1} - 4 = -2(a_n - 4)$$

$$b_n = a_n - 4 \text{ とおくと}$$

$$b_{n+1} = -2b_n$$

$$b_1 = a_1 - 4 = 5 - 4 = 1$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 1, 公比 -2 の等比数列であるから

$$b_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$$

したがって $a_n = b_n + 4 = (-2)^{n-1} + 4$

教科書 P.35

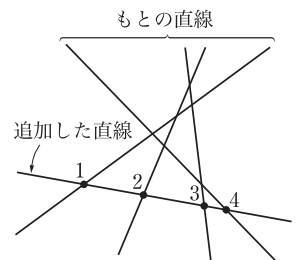
問5 まず、 $n = 1$ のとき、交点の数は 0 であるから

$$a_1 = 0 \dots \dots \textcircled{1}$$

問題の条件を満たす n 本の直線に加えて、さらに $n+1$ 本目の直線を引く。

この $n+1$ 本目の直線は、もとの n 本の直線それぞれと交わるから、交点の数は n 個だけ増加する。

したがって $a_{n+1} = a_n + n \dots \dots \textcircled{2}$



数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすれば、②より

$$b_n = a_{n+1} - a_n = n$$

したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)n$$

①より、 $a_1 = 0$ であるから、 $a_n = \frac{1}{2}(n-1)n$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

$$\text{ゆえに} \quad a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

2 数学的帰納法

教科書 P.37

問6 (1) この等式を①とする。

[1] $n = 1$ のとき

$$\text{左辺} = 1 \cdot 2 = 2, \quad \text{右辺} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$$

よって、①は $n = 1$ のとき成り立つ。

[2] ①が $n = k$ のとき成り立つ、すなわち

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) \\ = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と仮定する。

$n = k+1$ のとき、①の左辺を②を用いて変形すると

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) \\ = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) \\ = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) \\ = \frac{1}{3}(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\} \end{aligned}$$

となり、①は $n = k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について①が成り立つ。

(2) この等式を①とする。

[1] $n = 1$ のとき

$$\text{左辺} = 1^2 = 1, \quad \text{右辺} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

よって、①は $n = 1$ のとき成り立つ。

[2] ①が $n = k$ のとき成り立つ、すなわち

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 \\ = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と仮定する。

$n = k+1$ のとき、①の左辺を②を用いて変形すると

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \\ = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ = \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\} \\ = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$$

となり、①は $n = k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について①が成り立つ。

教科書 P.38

問7 この不等式を①とする。

[1] $n = 3$ のとき

$$\text{左辺} = 3^3 = 27, \quad \text{右辺} = 8 \cdot 3 = 24$$

ゆえに 左辺 > 右辺

よって、①は $n = 3$ のとき成り立つ。

[2] $k \geq 3$ とし、①が $n = k$ のとき成り立つ、すなわち

$$3^k > 8k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と仮定する。

$n = k+1$ のとき、①の左辺を②を用いて変形すると

$$\begin{aligned} 3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot 8k = 24k \\ 3^{k+1} > 24k \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

次に、 $24k$ と $8(k+1)$ を比べる。ここで、 $k \geq 3$ であるから

$$24k - 8(k+1) = 8(2k-1) > 0$$

すなわち $24k > 8(k+1)$ $\cdots \cdots \textcircled{4}$

③, ④より $3^{k+1} > 8(k+1)$

となり、①は $n = k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] より、 n が 3 以上の自然数のとき①が成り立つ。

教科書 P.39

問8 与えられた条件より

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad \cdots$$

よって、一般項は $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\cdots \cdots \textcircled{1}$

となると推定できる。

この推定が正しいことを、数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n = 1$ のときは、 $a_1 = \frac{1}{2}$ となり①は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき①が成り立つ、すなわち

$$a_k = \frac{k}{k+1}$$

と仮定する。

$n = k+1$ のとき、与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{2 - a_k} \\ &= \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1} \end{aligned}$$

したがって、①は $n = k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] より, すべての自然数 n について ① が成り立つ。

したがって, 求める一般項は $a_n = \frac{n}{n+1}$

問題

教科書 P.40

- 11 (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 k 項は 2^{k-1} であるから, $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 3 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2-1} = 2^{n-1} + 2$$

$a_1 = 3$ であるから, $a_n = 2^{n-1} + 2$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに $a_n = 2^{n-1} + 2$

- (2) $3a_{n+1} = 2a_n + 3$ より $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1$

$$\alpha = \frac{2}{3}\alpha + 1 \text{ より } \alpha = 3$$

$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1$ を変形して

$$a_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(a_n - 3)$$

$b_n = a_n - 3$ とおくと

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n$$

$$b_1 = a_1 - 3 = 1 - 3 = -2$$

よって, 数列 $\{b_n\}$ は初項 -2 , 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$b_n = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

したがって $a_n = b_n + 3 = 3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(注) 与えられた漸化式を用いて $3a = 2a + 3$ から $a = 3$ を求めてよい。

- 12 (1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ より

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+2} - a_{n+1} \\ &= \{2a_{n+1} - 3(n+1)\} - (2a_n - 3n) \\ &= 2(a_{n+1} - a_n) - 3 = 2b_n - 3 \end{aligned}$$

よって $b_{n+1} = 2b_n - 3$

- (2) $\alpha = 2\alpha - 3$ より $\alpha = 3$

$b_{n+1} = 2b_n - 3$ を変形して

$$b_{n+1} - 3 = 2(b_n - 3)$$

$c_n = b_n - 3$ とおくと

$$c_{n+1} = 2c_n$$

$$c_1 = b_1 - 3 = (a_2 - a_1) - 3$$

$$= (2a_1 - 3 \cdot 1) - a_1 - 3 = -1 - 1 - 3 = -5$$

よって, 数列 $\{c_n\}$ は初項 -5 , 公比 2 の等比数列であるから

$$c_n = -5 \cdot 2^{n-1}$$

よって $b_n = c_n + 3 = 3 - 5 \cdot 2^{n-1}$

したがって, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3 - 5 \cdot 2^{k-1}) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 - 5 \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 1 + 3(n-1) - 5 \cdot \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2-1} \\ &= -5 \cdot 2^{n-1} + 3n + 3 \end{aligned}$$

$a_1 = 1$ であるから, $a_n = -5 \cdot 2^{n-1} + 3n + 3$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに $a_n = -5 \cdot 2^{n-1} + 3n + 3$

- 13 (1) $a_1 = 2$

- (2) n 角形の頂点を順に A_1, A_2, \dots, A_n とする。

ここで, もう 1 個の頂点 A_{n+1} を加えると $n+1$ 角形となる。このとき, 新たに引かれる対角線は $A_2A_{n+1}, A_3A_{n+1}, \dots, A_{n-1}A_{n+1}$ であり, また辺 A_1A_{n+1}, A_nA_{n+1} が引かれることにより辺であった A_1A_n が新たに対角線となる。

すなわち, 対角線は $n-1$ 本だけ増加するから

$$a_{n+1} = a_n + n - 1$$

[別解] n 角形の対角線の本数と辺の本数の和を T_n とおくと

$$T_n = a_n + n$$

問題の条件を満たす n 角形から頂点を 1 個増やした $n+1$ 角形を考えたとき, 対角線の本数と辺の本数の和は n 本だけ増加するから

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n + n \\ &= (a_n + n) + n = a_n + 2n \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{一方 } T_{n+1} = a_{n+1} + (n+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } a_{n+1} + n + 1 = a_n + 2n$$

よって $a_{n+1} = a_n + n - 1$

- (3) $a_{n+1} = a_n + n - 1$ より

$$a_{n+1} - a_n = n - 1$$

したがって, $n \geq 5$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_4 + \sum_{k=4}^{n-1} (k-1) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) - \sum_{k=1}^3 (k-1) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 - 3 \\ &= 2 + \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) - 3 \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n = \frac{1}{2}n(n-3) \end{aligned}$$

$a_4 = 2$ であるから, $a_n = \frac{1}{2}n(n-3)$ は $n = 4$ のときも成り立つ。

よって $a_n = \frac{1}{2}n(n-3)$

- 14 この等式を ① とする。

[1] $n = 1$ のとき

$$\text{左辺} = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}, \quad \text{右辺} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

よって、①は $n=1$ のとき成り立つ。

[2] ①が $n=k$ のとき成り立つ、すなわち

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ = \frac{k}{2k+1} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき、①の左辺を②を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ = \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ = \frac{k+1}{2k+3} = \frac{k+1}{2(k+1)+1} \end{aligned}$$

となり、①は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について①が成り立つ。

15 この不等式を①とする。

[1] $n=4$ のとき

$$\text{左辺} = 2^4 = 16, \quad \text{右辺} = 4^2 = 16$$

よって、①は $n=4$ のとき成り立つ。

[2] $k \geq 4$ とし、①が $n=k$ のとき成り立つ、

$$\text{すなわち} \quad 2^k \geq k^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき、①の左辺を②を用いて変形すると

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot k^2 = 2k^2 \\ 2^{k+1} &\geq 2k^2 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

次に、 $2k^2$ と $(k+1)^2$ を比べる。

ここで、 $k \geq 4$ であるから

$$\begin{aligned} 2k^2 - (k+1)^2 &= k^2 - 2k - 1 \\ &= (k-1)^2 - 2 > 0 \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad 2k^2 > (k+1)^2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より} \quad 2^{k+1} > (k+1)^2$$

となり、①は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] より、 n が 4 以上の自然数のとき①が成り立つ。

16 命題「 $8^n - 7n - 1$ は 49 の倍数である」を①とする。

[1] $n=1$ のとき

$$8^1 - 7 \cdot 1 - 1 = 0$$

となり、49 の倍数である。

よって、①は $n=1$ のとき成り立つ。

[2] ①が $n=k$ のとき成り立つ、すなわち

ある整数 m を用いて

$$8^k - 7k - 1 = 49m \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表されると仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$8^{k+1} - 7(k+1) - 1 = 8 \cdot 8^k - 7(k+1) - 1$$

$$\textcircled{2} \text{ より} \quad 8^k = 49m + 7k + 1$$

$$\text{よって} \quad 8^{k+1} - 7(k+1) - 1$$

$$= 8(49m + 7k + 1) - 7(k+1) - 1$$

$$= 49(8m + k)$$

ここで、 $8m+k$ は整数であるから、

$8^{k+1} - 7(k+1) - 1$ は 49 の倍数となり、①は

$n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について①が成り立つ。

練習問題A

教科書 P.42

1 公差を d とおくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \{2 \cdot 13 + (3-1)d\} \\ = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \{2 \cdot 13 + (11-1)d\} \end{aligned}$$

$$\text{これを解いて} \quad d = -2$$

ゆえに 公差は -2

2 初項を a , 公差を d とおくと

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \{2a + (10-1)d\} = 100$$

$$\text{すなわち} \quad 2a + 9d = 20 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \{2a + (20-1)d\} = 100 + 200$$

$$\text{すなわち} \quad 2a + 19d = 30 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を連立させて解くと} \quad a = \frac{11}{2}, \quad d = 1$$

ゆえに、求めるその次の 10 項の和は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \left\{ 2 \cdot \frac{11}{2} + (30-1) \cdot 1 \right\} - (100 + 200) \\ = 600 - 300 = 300 \end{aligned}$$

3 $a_l = b_m$ とすると $9l - 8 = 6m + 1$

$$\text{よって} \quad 9(l-1) = 6m$$

$$3(l-1) = 2m$$

2 と 3 は互いに素で、 $l-1 \geq 0$, $m \geq 1$ であるから

$$l-1 = 2k, \quad m = 3k \quad (k \text{ は正の整数})$$

と表される。

よって、数列 $\{c_n\}$ の第 n 項は数列 $\{b_n\}$ の第 $3n$ 項に一致する。

したがって

$$c_n = 6 \cdot 3n + 1 = 18n + 1$$

また、数列 $\{c_n\}$ は等差数列であるから、初項から第 10 項までの和を S_{10} とすると

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (c_1 + c_{10}) \\ &= 5 \cdot (19 + 181) \end{aligned}$$

$$= 1000$$

(注) 数列 $\{c_n\}$ の第 n 項は数列 $\{a_n\}$ の第 $2n+1$ 項に一致する。これを用いても

$$c_n = 9(2n+1) - 8 = 18n+1$$

を求めることができる。

[別解] 数列 $\{a_n\}$ は

$$1, 10, \textcircled{19}, 28, \textcircled{37}, 46, \textcircled{55}, 64, 73, \dots$$

数列 $\{b_n\}$ は

$$7, 13, \textcircled{19}, 25, 31, \textcircled{37}, 43, 49, \textcircled{55}, 61, \dots$$

したがって、数列 $\{c_n\}$ は、初項が 19、公差が $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の公差 9 と 6 の最小公倍数 18 の等差数列であることがわかる。このことから

$$c_n = 19 + (n-1) \cdot 18 = 18n+1$$

- 4 $r < 0$, $0 < r^2 < 1$, $0 < r^2$ であるから、3つの数 $1, r, r^2$ を等差数列になるように小さい方から順に並べると、その並びは

$$r, 1, r^2 \quad \text{または} \quad r, r^2, 1$$

である。

- (i) $r, 1, r^2$ がこの順に等差数列となるとき

$$2 = r + r^2$$

$$\text{これを解いて} \quad r = -2, 1$$

$$r < 0 \text{ より} \quad r = -2$$

- (ii) $r, r^2, 1$ がこの順に等差数列となるとき

$$2r^2 = r + 1$$

$$\text{これを解いて} \quad r = -\frac{1}{2}, 1$$

$$r < 0 \text{ より} \quad r = -\frac{1}{2}$$

よって、(i), (ii) より $r = -2, -\frac{1}{2}$

- 5 (1) この数列の第 k 項は $k\{n - (k-1)\}$ と表されるから、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k\{n - (k-1)\} &= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k\} \\ &= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)\sum_{k=1}^n k \\ &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{-2n+1+3(n+1)\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

- (2) この数列の第 k 項は

$$\frac{1}{1+2+3+\dots+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2}{k(k+1)}$$

と表されるから、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}$$

- 6 一般項は $2n \cdot 3^n$ であり

$$S_n = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + \dots + 2n \cdot 3^n \quad \dots \textcircled{1}$$

①の両辺に 3 を掛けて

$$3S_n = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + (2n-2) \cdot 3^n + 2n \cdot 3^{n+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

①-②より

$$-2S_n = 2(3+3^2+3^3+\dots+3^n) - 2n \cdot 3^{n+1}$$

$$= 2 \cdot \frac{3(3^n-1)}{3-1} - 2n \cdot 3^{n+1}$$

$$= 3^{n+1} - 3 - 2n \cdot 3^{n+1}$$

$$= (1-2n) \cdot 3^{n+1} - 3$$

$$\text{よって} \quad S_n = \frac{3}{2} \{(2n-1) \cdot 3^n + 1\}$$

- 7 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}$$

$$= \frac{1 \cdot (10^n - 1)}{10 - 1} = \frac{1}{9} (10^n - 1)$$

また、求める和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{9} (10^k - 1)$$

$$= \frac{1}{9} \left(\sum_{k=1}^n 10^k - \sum_{k=1}^n 1 \right)$$

$$= \frac{1}{9} \left\{ \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right\}$$

$$= \frac{1}{81} (10^{n+1} - 9n - 10)$$

- 8 この不等式を ① とする。

[1] $n=2$ のとき

$$\text{左辺} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, \quad \text{右辺} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

ゆえに 左辺 < 右辺

よって、① は $n=2$ のとき成り立つ。

- [2] $k \geq 2$ とし、① が $n=k$ のとき成り立つ、すなわち

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k} \quad \dots \textcircled{2}$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき、①の左辺を②を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

次に、 $2 - \frac{1}{k+1}$ と $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$ を比べる。

ここで、 $k \geq 2$ であるから

$$\left(2 - \frac{1}{k+1} \right) - \left(2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{-k(k+1) + (k+1)^2 - k}{k(k+1)^2}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)^2} > 0$$

すなわち

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③, ④より

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$< 2 - \frac{1}{k+1}$$

となり, ①は $n = k+1$ のときにも成り立つ。[1], [2]より, n が2以上の自然数のとき①が成り立つ。〔別解〕 $n \geq 2$ のとき

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

9 与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。(1) 与えられた条件より $a_1 = 1, a_2 = 4,$
 $a_3 = 9, a_4 = 16, \cdots$ となり, 一般項は

$$a_n = n^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となると推定できる。

(2) [1] $n = 1$ のときは, $a_1 = 1$ となり①は成り立つ。[2] $n = k$ のとき①が成り立つ, すなわち

$$a_k = k^2$$

と仮定する。

 $n = k+1$ のとき

$$a_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k$$

$$+ (k+1) + k + (k-1) + \cdots$$

$$+ 3 + 2 + 1$$

$$= \{1 + 2 + \cdots + (k-1) + k + (k-1)$$

$$+ \cdots + 2 + 1\} + k + (k+1)$$

$$= a_k + k + k + 1$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

したがって, ①は $n = k+1$ のときにも成り立つ。[1], [2]より, 一般項が $a_n = n^2$ であることが証明された。

練習問題B

教科書 P.43

10 初項 -5 , 末項 15 , 項数 $n+2$ の等差数列の和が 100 であるから

$$\frac{1}{2}(n+2)(-5+15) = 100$$

これを解いて $n = 18$ 11 2つの等比数列の条件より, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ である。4, a, b がこの順に等比数列となるから

$$a^2 = 4b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $b, c, 64$ がこの順に等比数列となるから

$$c^2 = 64b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

 a, b, c がこの順に等差数列となるから

$$2b = a + c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②から b を消去すると

$$16a^2 = c^2$$

よって $c = \pm 4a$ (i) $c = 4a$ のとき

$$c = 4a \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入して } 2b = 5a \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ を連立させて解くと } a^2 = 10a$$

$$a \neq 0 \text{ より } a = 10, b = 25, c = 40$$

(ii) $c = -4a$ のとき

$$c = -4a \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入して}$$

$$2b = -3a \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{5} \text{ を連立させて解くと } a^2 = -6a$$

$$a \neq 0 \text{ より } a = -6, b = 9, c = 24$$

(i), (ii)より

$$a = 10, b = 25, c = 40 \text{ または}$$

$$a = -6, b = 9, c = 24$$

12

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

求める和を S_n とすると

$$2S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right)$$

$$+ \cdots + \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\text{ゆえに } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

13

この数列を, 次のような群に分ける。

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \mid \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \mid \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \mid \frac{1}{6}, \cdots$$

第1群 第2群 第3群 第4群

すなわち, 第 k 群は $k+1$ 個の項を含み

$$\text{分母は } k+2$$

$$\text{分子は } 1, 2, \cdots, k+1$$

である。

(1) $\frac{1}{17}$ は, 第15群の1番目の項である。

第1群から第14群までの項数は

$$2+3+4+\cdots+15 \\ = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (15+1) - 1 = 119$$

よって、 $\frac{1}{17}$ はこの数列の第120項である。

(2) 第1群から第 $n-1$ 群 ($n \geq 2$) までの項数は

$$2+3+4+\cdots+n \\ = \frac{1}{2}n(n+1) - 1 = \frac{1}{2}(n^2+n-2)$$

第1群から第 n 群までの項数は

$$2+3+4+\cdots+(n+1) \\ = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1 = \frac{1}{2}(n^2+3n)$$

よって、第200項が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}(n^2+n-2) < 200 \leq \frac{1}{2}(n^2+3n)$$

したがって $n = 19$

すなわち、第200項は第19群に含まれる。

ゆえに、第200項の分母は21である。

また、第1群から第18群までの項数は

$$\frac{1}{2}(18^2+3 \cdot 18) = 189$$

$$200 - 189 = 11$$

よって、第200項の分子は11である。

ゆえに、第200項は $\frac{11}{21}$ である。

14 (1) $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+3}$ であるから、ある n について

$a_{n+1} = 0$ であるとする

$$a_n = 0$$

これをくり返すと、 $a_1 = 0$ となり、 $a_1 = 5$ に反する。

よって、すべての n に対して、 $a_n \neq 0$ となる。

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+3} \text{ より}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n+3}{a_n} = \frac{3}{a_n} + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ より } b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}$$

これらを①に代入して $b_{n+1} = 3b_n + 2$

(2) $a = 3a+2$ より $a = -1$

$b_{n+1} = 3b_n + 2$ を変形して

$$b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$$

$c_n = b_n + 1$ とおくと

$$c_{n+1} = 3c_n$$

$$c_1 = b_1 + 1 = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}$$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項 $\frac{6}{5}$ 、公比3の等比数列であるから

$$c_n = \frac{6}{5} \cdot 3^{n-1} = \frac{2}{5} \cdot 3^n$$

よって

$$b_n = c_n - 1 = \frac{2}{5} \cdot 3^n - 1 = \frac{2 \cdot 3^n - 5}{5}$$

$$\text{したがって } a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{5}{2 \cdot 3^n - 5}$$

15 $a_1 = S_1 = 2a_1 + 1$ より $a_1 = -1$

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \\ = (2a_{n+1} + 1) - (2a_n + 1) \\ = 2a_{n+1} - 2a_n$$

よって $a_{n+1} = 2a_n$

したがって、数列 $\{a_n\}$ は初項 -1 、公比2の等比数列であるから

$$a_n = (-1) \cdot 2^{n-1} = -2^{n-1}$$

16 まず、 $n = 1$ のとき、1個の円が平面を2つの部分に分けるから

$$a_1 = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

問題の条件を満たす n 個の円に加えて、さらに $n+1$ 個目の円をかく。この $n+1$ 個目の円は、もとからある n 個の円それぞれと2個の点で交わり、これら合計 $2n$ 個の点によって、 $n+1$ 個目の円は $2n$ 個の弧に分けられる。この $2n$ 個の弧が新しい境界線となり、分けられる平面の部分の数は $2n$ 個だけ増加する。

したがって $a_{n+1} = a_n + 2n$

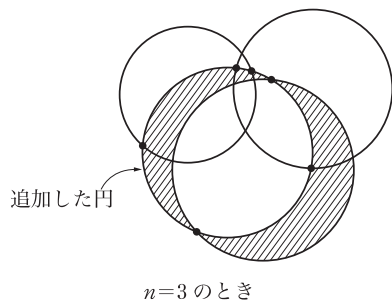
$$\text{ゆえに } a_{n+1} - a_n = 2n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①、②より、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ = 2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k \\ = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = n^2 - n + 2$$

$a_1 = 2$ であるから、 $a_n = n^2 - n + 2$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

よって $(n^2 - n + 2)$ 個



発展 3項間の漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$

教科書 P.45

問1 (1) 漸化式 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ は、2次方程式 $x^2 = 3x - 2$ を満たす解 $x = 1, 2$ を用いて

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と変形される。

①より、数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は公比2の等比数列で

あるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2^{n-1}(a_2 - a_1) \\ &= 2^{n-1}(3 - 1) = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \end{aligned}$$

すなわち $a_{n+1} - a_n = 2^n$ …… ③

②より、数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は公比1の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2a_n &= 1^{n-1}(a_2 - 2a_1) \\ &= 1^{n-1}(3 - 2 \cdot 1) = 1 \end{aligned}$$

すなわち $a_{n+1} - 2a_n = 1$ …… ④

よって、③から④を引いて

$$a_n = 2^n - 1$$

(2) 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ は、2次方程式

$x^2 = x + 6$ を満たす解 $x = -2, 3$ を用いて

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) \quad \dots\dots ①$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) \quad \dots\dots ②$$

と変形される。

①より、数列 $\{a_{n+1} + 2a_n\}$ は公比3の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 2a_n &= 3^{n-1}(a_2 + 2a_1) \\ &= 3^{n-1}(1 + 2 \cdot 2) = 5 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

すなわち $a_{n+1} + 2a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ …… ③

②より、数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は公比-2の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 3a_n &= (-2)^{n-1}(a_2 - 3a_1) \\ &= (-2)^{n-1}(1 - 3 \cdot 2) \\ &= -5 \cdot (-2)^{n-1} \end{aligned}$$

すなわち

$$a_{n+1} - 3a_n = -5 \cdot (-2)^{n-1} \quad \dots\dots ④$$

よって、③から④を引いて

$$5a_n = 5\{3^{n-1} + (-2)^{n-1}\}$$

ゆえに $a_n = 3^{n-1} + (-2)^{n-1}$

参考 確率と漸化式

教科書 P.46

問1 1個のさいころを $(n+1)$ 回投げるとき、2以下の目が奇数回出るという事象は

① n 回投げたとき、2以下の目が奇数回出て、 $(n+1)$ 回目は3以上の目が出る

② n 回投げたとき、2以下の目が偶数回出て、 $(n+1)$ 回目は2以下の目が出る

の和事象であり、これらの事象は互いに排反である。

事象①、②の起こる確率は、それぞれ $\frac{2}{3}p_n$ 、

$\frac{1}{3}(1-p_n)$ であるから

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n)$$

すなわち $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$

$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$ と変形できるから、

$$q_n = p_n - \frac{1}{2} \text{ とおくと } q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n$$

$$p_1 = \frac{1}{3} \text{ より } q_1 = p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

よって、数列 $\{q_n\}$ は初項 $-\frac{1}{6}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$q_n = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに

$$p_n = q_n + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

発展 連立漸化式

教科書 P.47

問1 (1) 与えられた漸化式を $a_{n+1} + ab_{n+1}$ に代入すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} + ab_{n+1} &= (4a_n - 2b_n) + \alpha(-a_n + 3b_n) \\ &= (-\alpha + 4)a_n + (3\alpha - 2)b_n \end{aligned}$$

よって、 $a_{n+1} + ab_{n+1} = \beta(a_n + ab_n)$ がすべての n について成り立つためには

$$\begin{cases} \beta = -\alpha + 4 & \dots\dots ① \\ \alpha\beta = 3\alpha - 2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

であればよい。

①を②に代入して

$$\alpha(-\alpha + 4) = 3\alpha - 2$$

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

$$(\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$$

$$\alpha = 2, -1$$

①より $\alpha = 2$ のとき $\beta = 2$

$\alpha = -1$ のとき $\beta = 5$

よって、 $a_{n+1} + ab_{n+1} = \beta(a_n + ab_n)$ がすべての n で成り立つ α, β の値の組は

$$(\alpha, \beta) = (2, 2), (-1, 5)$$

(2) (1)より

$$a_{n+1} + 2b_{n+1} = 2(a_n + 2b_n) \quad \dots\dots ③$$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 5(a_n - b_n) \quad \dots\dots ④$$

③より、数列 $\{a_n + 2b_n\}$ は公比2の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_n + 2b_n &= 2^{n-1}(a_1 + 2b_1) \\ &= 2^{n-1}\{4 + 2 \cdot (-1)\} \\ &= 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n \end{aligned}$$

すなわち $a_n + 2b_n = 2^n$ …… ⑤

④より、数列 $\{a_n - b_n\}$ は公比5の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= 5^{n-1}(a_1 - b_1) \\ &= 5^{n-1}\{4 - (-1)\} \\ &= 5^{n-1} \cdot 5 = 5^n \end{aligned}$$

すなわち $a_n - b_n = 5^n$ …… ⑥

⑤+2×⑥より

$$3a_n = 2^n + 2 \cdot 5^n$$

$$a_n = \frac{2^n + 2 \cdot 5^n}{3}$$

⑤-⑥より

$$3b_n = 2^n - 5^n$$

$$b_n = \frac{2^n - 5^n}{3}$$

〔別解〕(1)を用いずに、3項間漸化式をつくる方法もある。

$$a_{n+1} = 4a_n - 2b_n \text{ より}$$

$$b_n = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 2a_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_{n+2} + 2a_{n+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を $b_{n+1} = -a_n + 3b_n$ に代入すると

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}a_{n+2} + 2a_{n+1} \\ &= -a_n + 3\left(-\frac{1}{2}a_{n+1} + 2a_n\right) \end{aligned}$$

すなわち

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また

$$a_2 = 4a_1 - 2b_1 = 4 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) = 18$$

漸化式③は、2次方程式 $x^2 - 7x + 10 = 0$ を満たす解 $x = 2, 5$ を用いて

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 2a_n)$$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 5a_n)$$

と変形される。

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は公比5の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2a_n &= 5^{n-1}(a_2 - 2a_1) \\ &= 5^{n-1}(18 - 2 \cdot 4) \\ &= 10 \cdot 5^{n-1} = 2 \cdot 5^n \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 5^n \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

数列 $\{a_{n+1} - 5a_n\}$ は公比2の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 5a_n &= 2^{n-1}(a_2 - 5a_1) \\ &= 2^{n-1}(18 - 5 \cdot 4) \\ &= -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } a_{n+1} - 5a_n = -2^n \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

④から⑤を引いて

$$3a_n = 2^n + 2 \cdot 5^n$$

$$a_n = \frac{2^n + 2 \cdot 5^n}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{6} \text{ より } a_{n+1} = \frac{2^{n+1} + 2 \cdot 5^{n+1}}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑥, ⑦を①に代入して

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2^{n+1} + 2 \cdot 5^{n+1}}{3} \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{2^n + 2 \cdot 5^n}{3} \right) \\ &= \frac{-2^n - 5 \cdot 5^n}{3} + \frac{2 \cdot 2^n + 4 \cdot 5^n}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{2^n - 5^n}{3}$$