1章 数列

1節 数列

1 数列

教科書 P.6

問1 (1) $a_1 = 2\times1-3 = \mathbf{-1}$

$a_2 = 2\times2-3 = \mathbf{1}$

$a_3 = 2\times3-3 = \mathbf{3}$

$a_4 = 2\times4-3 = \mathbf{5}$

$a_5 = 2\times5-3 = \mathbf{7}$

(2) $a_1 = \dfrac{1}{2\times1+1} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

$a_2 = \dfrac{1}{2\times2+1} = \mathbf{\dfrac{1}{5}}$

$a_3 = \dfrac{1}{2\times3+1} = \mathbf{\dfrac{1}{7}}$

$a_4 = \dfrac{1}{2\times4+1} = \mathbf{\dfrac{1}{9}}$

$a_5 = \dfrac{1}{2\times5+1} = \mathbf{\dfrac{1}{11}}$

(3) $a_1 = (-1)^1 = \mathbf{-1}$

$a_2 = (-1)^2 = \mathbf{1}$

$a_3 = (-1)^3 = \mathbf{-1}$

$a_4 = (-1)^4 = \mathbf{1}$

$a_5 = (-1)^5 = \mathbf{-1}$

教科書 P.7

問2 (1) 1^3，2^3，3^3，4^3，5^3，$\cdots$ となるから，この数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定すると

$\boldsymbol{a_n = n^3}$

(2) 分母は

3，5，7，9，11，$\cdots$

となり，第 n 項は $2n+1$ である。

分子は

1，2，3，4，5，$\cdots$

となり，第 n 項は n であるから，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定すると

$\boldsymbol{a_n = \dfrac{n}{2n+1}}$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の各項の符号を除いて考えると

2，4，8，16，32，$\cdots$

となり，この数列の第 n 項は 2^n であるから，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定すると

$a_n = (-1)^n\times2^n = \boldsymbol{(-2)^n}$

2 等差数列

教科書 P.8

問3 (1) **5，13，21，29，37**

(2) **9，5，1，−3，−7**

教科書 P.9

問4 (1) $\boldsymbol{a_n} = 4+(n-1)\cdot(-3) = \boldsymbol{-3n+7}$

$\boldsymbol{a_{25}} = -3\cdot25+7 = \boldsymbol{-68}$

(2) $\boldsymbol{a_n} = 7+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}n+\dfrac{13}{2}}$

$\boldsymbol{a_{25}} = \dfrac{1}{2}\cdot25+\dfrac{13}{2} = \mathbf{19}$

問5 (1) 公差を d とおくと

$d = 37-30 = 7$

よって，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$30-7 = \mathbf{23}$

一般項は

$\boldsymbol{a_n} = 23+(n-1)\cdot7 = \boldsymbol{7n+16}$

(2) 公差を d とおくと

$d = -7-(-4) = -3$

よって，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$2+(-3) = \mathbf{-1}$

一般項は

$\boldsymbol{a_n} = 2+(n-1)\cdot(-3) = \boldsymbol{-3n+5}$

教科書 P.10

問6 初項を a，公差を d とおくと

第 3 項が -6 であるから　$a+2d = -6$

第 10 項が 29 であるから　$a+9d = 29$

これらを連立させて解くと　$a = -16$，$d = 5$

すなわち，初項は -16，公差は 5 である。

したがって，一般項は

$a_n = -16+(n-1)\cdot5 = \boldsymbol{5n-21}$

問7 $a_{n+1}-a_n = \{3(n+1)-4\}-(3n-4) = 3$

よって，差 $a_{n+1}-a_n$ が一定であるから，数列 $\{a_n\}$ は等差数列となる。

また　$a_1 = 3\cdot1-4 = -1$

したがって，等差数列 $\{a_n\}$ の **初項は −1，公差は 3** である。

問8 ($\Longrightarrow$ の証明)

a，b，c がこの順に等差数列となるから，$b-a$ と $c-b$ は等しい。

よって　$b-a = c-b$

すなわち　$2b = a+c$

($\Longleftarrow$ の証明)

$2b = a+c$ より，この式を変形して　$b-a = c-b$

$b-a$ と $c-b$ が等しいから，a，b，c はこの順に等差数列となる。

3 等差数列の和

教科書 P.12

問9 (1) $S_{10} = \dfrac{1}{2}\cdot10\cdot(7+61) = \mathbf{340}$

(2) $S_6 = \dfrac{1}{2}\cdot6\cdot\{2\cdot(-10)+(6-1)\cdot4\} = \mathbf{0}$

問10 (1) 53 を第 n 項とすると

$53 = 5+3(n-1)$

これより，$n = 17$ となり，項数は 17 である。

よって，求める和 S_{17} は

$$S_{17}=\frac{1}{2}\cdot17\cdot(5+53)=\mathbf{493}$$

(2) 初項を a とおくと

$$a+(10-1)\cdot(-3)=4$$

これより，$a=31$ となり，初項は 31 である。
よって，求める和 S_{10} は

$$S_{10}=\frac{1}{2}\cdot10\cdot(31+4)=\mathbf{175}$$

問11 第 n 項までの和が 75 になるとすると，等差数列の和の公式により

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot21+(n-1)\cdot(-3)\}=75$$

ゆえに　$n^2-15n+50=0$

$(n-5)(n-10)=0$

これを解いて　$n=5,\ 10$

よって，**第 5 項，第 10 項までの和** が 75 になる。

教科書 P.13

問12 (1) $\frac{1}{2}\cdot100\cdot(100+1)=\mathbf{5050}$

(2) $\frac{1}{2}\cdot200\cdot(200+1)-5050=\mathbf{15050}$

〔別解〕(2) は，初項 101，末項 200，項数 100 の等差数列の和であるから，等差数列の和の公式を用いると

$$\frac{1}{2}\cdot100\cdot(101+200)=15050$$

問13 初項 1，末項 $2n-1$，項数 n の等差数列の和であるから

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$
$$=\frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}=\frac{1}{2}n\cdot2n=n^2$$

ゆえに　$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

〔別証〕初項 1，公差 2，項数 n の等差数列の和であるから

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$
$$=\frac{1}{2}n\{2\cdot1+(n-1)\cdot2\}=\frac{1}{2}n\cdot2n=n^2$$

ゆえに　$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

問14 (1) 7 で割り切れる 2 桁の自然数を並べたものは，公差 7 の等差数列で，初項は 14 であるから，一般項は

$$14+7(n-1)=7n+7$$

ここで，$7n+7\leqq99$ を満たす最大の自然数 n は

$$n\leqq\frac{92}{7}=13.1\cdots$$

よって　$n=13$

求める数の和は，初項 14，公差 7，項数 13 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot13\cdot\{2\cdot14+(13-1)\cdot7\}=\mathbf{728}$$

(2) 7 で割ると 3 余る 2 桁の自然数を並べたものは，公差 7 の等差数列で，初項は 10 であるから，一般項は

$$10+7(n-1)=7n+3$$

ここで，$7n+3\leqq99$ を満たす最大の自然数 n は

$$n\leqq\frac{96}{7}=13.7\cdots$$

よって　$n=13$

求める数の和は，初項 10，公差 7，項数 13 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot13\cdot\{2\cdot10+(13-1)\cdot7\}=\mathbf{676}$$

4 等比数列

教科書 P.14

問15 (1) **4，12，36，108，324**

(2) **8，−8，8，−8，8**

教科書 P.15

問16 (1) 初項 2，公比 $\frac{6}{2}=3$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}}$

(2) 初項 3，公比 $-\frac{3}{2}\div3=-\frac{1}{2}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$\boldsymbol{a_n=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

問17 (1) 公比を r とおくと　$r=\frac{10}{2}=5$

よって，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$10\times5=\mathbf{50}$

したがって，一般項は　$\boldsymbol{a_n=2\cdot5^{n-1}}$

(2) 公比を r とおくと　$r=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$

よって，$\boxed{}$ にあてはまる数は

$12\div\left(-\frac{1}{4}\right)=\mathbf{-48}$

したがって，一般項は　$\boldsymbol{a_n=-48\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$

教科書 P.16

問18 初項を a，公比を r とおくと
第 3 項が 18 であるから

$ar^2=18$　……①

第 5 項が 162 であるから

$ar^4=162$　……②

②÷① より　$r^2=9$

したがって　$r=\pm3$

(i) $r=3$ のとき
① に代入して　$a=2$
よって　$a_n=2\cdot3^{n-1}$

(ii) $r=-3$ のとき
① に代入して　$a=2$
よって　$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$

(i)，(ii) より，求める一般項は

$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}}$　または　$\boldsymbol{a_n=2\cdot(-3)^{n-1}}$

問19 $c_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{2^n}{5\cdot3^n}$ であるから

1章

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{2^{n+1}}{5\cdot 3^{n+1}}\div\frac{2^n}{5\cdot 3^n}$$
$$=\frac{2^{n+1}\cdot 5\cdot 3^n}{5\cdot 3^{n+1}\cdot 2^n}=\frac{2}{3}$$

となるから，公比が $\mathbf{\frac{2}{3}}$ の等比数列である。

問20 ($\Longrightarrow$ の証明)

a, b, c がこの順に等比数列となるから，$\frac{b}{a}$ と $\frac{c}{b}$ は等しい。

よって　$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$

すなわち　$b^2=ac$

($\Longleftarrow$ の証明)

$b^2=ac$ であり，a, b, c のいずれも 0 でないから，この式を変形すると　$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$

$\frac{b}{a}$ と $\frac{c}{b}$ が等しいから，a, b, c はこの順に等比数列となる。

5 等比数列の和

教科書 P.17

問21 (1) $S_6=\frac{2\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)}=\frac{2\cdot(-728)}{4}=\mathbf{-364}$

(2) $S_4=\dfrac{\frac{3}{25}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^4-1\right\}}{\frac{4}{3}-1}=\dfrac{\frac{3}{25}\cdot\frac{175}{81}}{\frac{1}{3}}=\mathbf{\frac{7}{9}}$

教科書 P.18

問22 (1) 初項 6，公比 $\frac{18}{6}=3$ の等比数列であるから

$$S_n=\frac{6(3^n-1)}{3-1}=\mathbf{3(3^n-1)}$$

(2) 初項 10，公比 $\left(-\frac{5}{2}\right)\div 10=-\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$S_n=\dfrac{10\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\mathbf{8\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}$$

問23 初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ のとき

$S_3=35$ より　$3a=35$

$S_6=315$ より　$6a=315$

ゆえに，これらを同時に満たす a は存在しない。

よって，$r\neq 1$ であるから

$S_3=35$ より　$\frac{a(1-r^3)}{1-r}=35$　……①

$S_6=315$ より　$\frac{a(1-r^6)}{1-r}=315$　……②

② より　$\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=315$

これに ① を代入して　$35(1+r^3)=315$

$$1+r^3=9$$
$$r^3=8$$

r は実数であるから　$r=2$

これを ① に代入して　$a=5$

ゆえに，この等比数列の **初項は 5，公比は 2** である。

6 和の記号 Σ

教科書 P.20

問24 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3k-1)$

$=(3\cdot1-1)+(3\cdot2-1)+(3\cdot3-1)+(3\cdot4-1)$

$=\mathbf{2+5+8+11}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}2k^2=2\cdot1^2+2\cdot2^2+2\cdot3^2=\mathbf{2+8+18}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k=\mathbf{2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n}$

問25 (1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\mathbf{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3}$

(2) $3+5+7+\cdots+(2n+1)=\mathbf{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)}$

(3) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6+5\cdot7=\mathbf{\displaystyle\sum_{k=1}^{5}k(k+2)}$

教科書 P.21

問26 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^{k-1}=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=\mathbf{3^n-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2)^k=\sum_{k=1}^{n}\{-2\cdot(-2)^{k-1}\}$

$$=\frac{-2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$$
$$=\mathbf{-\frac{2}{3}\{1-(-2)^n\}}$$

教科書 P.22

問27 (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

$=\frac{1}{6}\cdot20\cdot(20+1)\cdot(2\cdot20+1)=\mathbf{2870}$

(2) $11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2)$
$\qquad-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

$=2870-\frac{1}{6}\cdot10\cdot(10+1)\cdot(2\cdot10+1)$

$=2870-385=\mathbf{2485}$

問28 等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ において

$k=1$ とすると

$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$k=2$ とすると

$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$

$k=3$ とすると

$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$

…………………

$k=n$ とすると

$(n+1)^4-n^4=4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1$

これら n 個の等式の辺々を加えると

$$(n+1)^4-1^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

よって

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^4-1-6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=(n+1)^4-1-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n$$
$$=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$
$$-(n+1)$$
$$=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$$
$$=(n+1)(n^3+n^2)$$
$$=n^2(n+1)^2$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

教科書 P.23

問29 (1) $$\sum_{k=1}^{n}(5k+1)=\sum_{k=1}^{n}5k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{2}n\{5(n+1)+2\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(5n+7)}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k-2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)-2n$$
$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-3(n+1)-12\}$$
$$=\frac{1}{6}n(2n^2-14)=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2-7)}$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)=\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-2\}$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

問30 この数列の第 k 項は $k(k+2)$ である。

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)}$$

7 いろいろな数列

教科書 P.25

問31 (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，3，5，7，9，11，$\cdots$

これは，初項 1，公差 2 の等差数列であるから

$b_n=1+(n-1)\cdot2=2n-1$

したがって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$
$$=1+2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$$
$$=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$
$$=n^2-2n+2$$

$a_1=1$ であるから，$a_n=n^2-2n+2$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに $\boldsymbol{a_n=n^2-2n+2}$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，-3，9，-27，81，-243，$\cdots$

これは，初項 1，公比 -3 の等比数列であるから

$b_n=1\cdot(-3)^{n-1}=(-3)^{n-1}$

したがって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=3+\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^{k-1}$$
$$=3+\frac{1\cdot\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)}$$
$$=3+\frac{1}{4}\{1-(-3)^{n-1}\}$$
$$=\frac{1}{4}\{13-(-3)^{n-1}\}$$

$a_1=3$ であるから，$a_n=\dfrac{1}{4}\{13-(-3)^{n-1}\}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに $\boldsymbol{a_n=\frac{1}{4}\{13-(-3)^{n-1}\}}$

教科書 P.26

問32 (1) $a_1=S_1=1^2+3\cdot1=4$

また，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$$
$$=2n+2$$

$a_1=4$ であるから，$a_n=2n+2$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n = 2n+2}$

(2)　$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1)$$
$$= 3 \cdot 3^{n-1} - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$a_1 = 2$ であるから，$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$

教科書 P.27

問33　$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$$

が成り立つから

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2n+1} = \boldsymbol{\frac{2n}{2n+1}}$$

教科書 P.28

問34　$S_n = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-1}$　……①

① の両辺に 3 を掛けて

$$3S_n = \quad 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + \cdots + 2(n-1) \cdot 3^{n-1} + 2n \cdot 3^n \quad \cdots\cdots ②$$

①－② より

$$-2S_n = 2(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) - 2n \cdot 3^n$$
$$= 2 \cdot \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} - 2n \cdot 3^n$$
$$= 3^n - 1 - 2n \cdot 3^n = -(2n-1) \cdot 3^n - 1$$

よって　　$\boldsymbol{S_n = \dfrac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{2}}$

教科書 P.29

問35 (1)　第 n 群の項の個数は $2n$ であるから，$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = n(n-1)$$

ゆえに，第 n 群の最初の項は

$$n(n-1) + 1 = \boldsymbol{n^2 - n + 1}$$

これは，$n = 1$ のときも成り立つ。

(2)　第 n 群は初項 $n^2 - n + 1$，公差 1，項数 $2n$ の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2} \cdot 2n\{2(n^2 - n + 1) + (2n-1) \cdot 1\}$$
$$= \boldsymbol{n(2n^2 + 1)}$$

〔別解〕第 n 群の項の総和 S を求めるには，第 1 群から第 n 群までの項の総和 T から第 1 群から第 $(n-1)$ 群までの項の総和 U を引けばよい。

第 1 群から第 n 群までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$S = T - U = \sum_{k=1}^{n(n+1)} k - \sum_{k=1}^{n(n-1)} k$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1)\{n(n+1)+1\} - \frac{1}{2}n(n-1)\{n(n-1)+1\}$$
$$= \frac{1}{2}n\{(n+1)(n^2+n+1) - (n-1)(n^2-n+1)\}$$
$$= \frac{1}{2}n(4n^2+2) = n(2n^2+1)$$

これは，$n = 1$ のときも成り立つ。

問題

教科書 P.30

1　初項 8，公差 7 の等差数列の第 n 項が 400 であるとすると　　$8 + (n-1) \cdot 7 = 400$

よって　　$n = 57$

ゆえに，この等差数列には 400 という項が，**第 57 項にある。**

2　(1)　初項を a，公差を d とおくと

第 5 項が 108 であるから　　$a + 4d = 108$

第 20 項が -237 であるから　　$a + 19d = -237$

これらを連立させて解くと

$a = 200$，$d = -23$

ゆえに　　**初項は 200，公差は -23**

(2)　この数列の第 n 項を a_n とすると

$$a_n = 200 + (n-1) \cdot (-23)$$
$$= -23n + 223$$

$a_n < 0$ となる条件は

$$-23n + 223 < 0$$
$$n > \frac{223}{23} = 9.6\cdots$$

ゆえに，**第 10 項** が初めて負になる。

(3)　(2) より，この数列の初項から第 9 項までが正で，第 10 項からは負である。

ゆえに，正の項のみをすべて加えれば和が最も大きくなるから，初項から **第 9 項** までの和が最も大きくなる。

3　$x-4$，x，$x+6$ がこの順に等比数列となるから

$$x^2 = (x-4)(x+6)$$
$$-2x = -24$$

よって　　$\boldsymbol{x = 12}$

4　初項を a，公比を r とおくと

第 3 項が 12 であるから　　$ar^2 = 12$　……①

第 6 項が 96 であるから　　$ar^5 = 96$　……②

②÷① より　　$r^3 = 8$

r は実数であるから　　$r = 2$

これを ① に代入して　　$a = 3$

よって，第 n 項は　　$3 \cdot 2^{n-1}$

ゆえに，各項を平方して得られる数列の第 n 項は

$(3\cdot 2^{n-1})^2 = 9\cdot 4^{n-1}$

よって，初項 9，公比 4 の等比数列である。

したがって，求める和は

$$\frac{9(4^n-1)}{4-1} = \mathbf{3(4^n-1)}$$

5 (1) 数列 $\{a_n\}$ の各項の指数を除いて考えると

$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \cdots$

となり，この数列の第 n 項は

$1+(n-1)\cdot 3 = 3n-2$

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n = \mathbf{(3n-2)^2}$

また，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(9k^2-12k+4)$$
$$= 9\sum_{k=1}^{n}k^2 - 12\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}4$$
$$= 9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 12\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n$$
$$= \frac{1}{2}n\{3(n+1)(2n+1)-12(n+1)+8\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(6n^2-3n-1)}$$

(2) $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots$

という数列の第 n 項は $2n$ であり

$3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ \cdots$

という数列の第 n 項は $(n+2)^2$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　　$a_n = \mathbf{2n(n+2)^2}$

また，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}2k(k+2)^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(2k^3+8k^2+8k)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n}k^3 + 8\sum_{k=1}^{n}k^2 + 8\sum_{k=1}^{n}k$$
$$= 2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + 8\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2 + \frac{4}{3}n(n+1)(2n+1) + 4n(n+1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{3n(n+1)+8(2n+1)+24\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(3n^2+19n+32)}$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1+2+4+8+16+\cdots+2^{n-1}$$
$$= \frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1} = \mathbf{2^n-1}$$

また，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}(2^k-1) = \sum_{k=1}^{n}2^k - \sum_{k=1}^{n}1 = \frac{2(2^n-1)}{2-1}-n$$
$$= \mathbf{2^{n+1}-n-2}$$

6 与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。その階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots$

よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$b_n = n^2$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$= 2 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$
$$= \frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+12)$$

$a_1 = 2$ であるから，$a_n = \frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+12)$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+12)}$

7 $a_1 = S_1 = 1^2-1+1 = 1$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= (n^2-n+1)-\{(n-1)^2-(n-1)+1\}$$
$$= 2n-2$$

よって，一般項 a_n は

$\boldsymbol{a_1 = 1}$，$\boldsymbol{n \geqq 2}$ のとき，$\boldsymbol{a_n = 2n-2}$

8 $$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

が成り立つ。

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{n}{3n+1}}$$

9 $$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$= \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+ \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{n+1}-1}$$

10 $S_n = 4\cdot1+7\cdot4+10\cdot4^2+13\cdot4^3+\cdots$
$+(3n+1)\cdot4^{n-1}$ ……①

① の両辺に 4 を掛けて

$4S_n = 4\cdot4+7\cdot4^2+\cdots+(3n-2)\cdot4^{n-1}$
$+(3n+1)\cdot4^n$ ……②

①－② より，$n \geqq 2$ のとき

$$-3S_n = 4\cdot1+3(4+4^2+\cdots+4^{n-1})-(3n+1)\cdot4^n$$
$$= 4+3\cdot\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}-(3n+1)\cdot4^n$$
$$= 4+4^n-4-(3n+1)\cdot4^n$$
$$= -3n\cdot4^n$$

よって $S_n = n\cdot4^n$ で，$S_1 = 4$ であるからこれは $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{S_n = n\cdot4^n}$

2節 漸化式と数学的帰納法

1 漸化式

教科書 P.31

問 1 (1) $a_1 = \mathbf{6}$

$a_2 = a_1+2 = 6+2 = \mathbf{8}$
$a_3 = a_2+2 = 8+2 = \mathbf{10}$
$a_4 = a_3+2 = 10+2 = \mathbf{12}$
$a_5 = a_4+2 = 12+2 = \mathbf{14}$

(2) $a_1 = \mathbf{1}$

$a_2 = 3a_1+2 = 3\cdot1+2 = \mathbf{5}$
$a_3 = 3a_2+2 = 3\cdot5+2 = \mathbf{17}$
$a_4 = 3a_3+2 = 3\cdot17+2 = \mathbf{53}$
$a_5 = 3a_4+2 = 3\cdot53+2 = \mathbf{161}$

教科書 P.32

問 2 (1) 初項 -3，公差 4 の等差数列であるから

$a_n = -3+(n-1)\cdot4 = \mathbf{4n-7}$

(2) 初項 4，公比 2 の等比数列であるから

$a_n = 4\cdot2^{n-1} = 2^2\cdot2^{n-1} = \mathbf{2^{n+1}}$

教科書 P.33

問 3 (1) 漸化式より，すべての自然数 k について，次の式が成り立つ。

$a_{k+1}-a_k = k^2-k$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 k 項は k^2-k であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-k) = 3+\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k$$
$$= 3+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n$$
$$= \frac{1}{6}\{18+(n-1)n(2n-1)-3(n-1)n\}$$
$$= \frac{1}{3}(n^3-3n^2+2n+9)$$

$a_1 = 3$ であるから，$a_n = \dfrac{1}{3}(n^3-3n^2+2n+9)$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3}(n^3-3n^2+2n+9)}$

(2) 漸化式より，すべての自然数 k について，次の式が成り立つ。

$a_{k+1}-a_k = 3^k$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 k 項は 3^k であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k$$
$$= 2+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{1}{2}(3^n+1)$$

$a_1 = 2$ であるから，$a_n = \dfrac{1}{2}(3^n+1)$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2}(3^n+1)}$

教科書 P.34

問 4 (1) 漸化式 $a_{n+1} = 2a_n+3$ は，$\alpha = 2\alpha+3$ を満たす解 $\alpha = -3$ を用いて，次のように変形される。

$a_{n+1}+3 = 2(a_n+3)$

$b_n = a_n+3$ とおくと

$b_{n+1} = 2b_n$
$b_1 = a_1+3 = 2+3 = 5$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公比 2 の等比数列であるから

$b_n = 5\cdot2^{n-1}$

したがって　$a_n = b_n-3 = \mathbf{5\cdot2^{n-1}-3}$

(2) 漸化式 $a_{n+1} = -2a_n+12$ は $\alpha = -2\alpha+12$ を満たす解 $\alpha = 4$ を用いて，次のように変形される。

$a_{n+1}-4 = -2(a_n-4)$

$b_n = a_n-4$ とおくと

$b_{n+1} = -2b_n$
$b_1 = a_1-4 = 5-4 = 1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 -2 の等比数列であるから

$b_n = 1\cdot(-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$

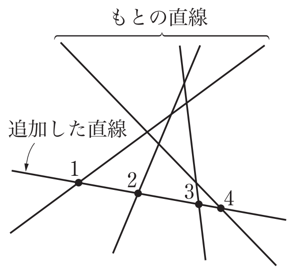
したがって　$a_n = b_n+4 = \mathbf{(-2)^{n-1}+4}$

教科書 P.35

問 5 まず，$n=1$ のとき，交点の数は 0 であるから

$a_1 = 0$ ……①

問題の条件を満たす n 本の直線に加えて，さらに $n+1$ 本目の直線を引く。



この $n+1$ 本目の直線は，もとからある n 本の直線それぞれと交わるから，交点の数は n 個だけ増加する。

したがって　$a_{n+1} = a_n+n$ ……②

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすれば，② より

$$b_n = a_{n+1} - a_n = n$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)n$$

① より，$a_1 = 0$ であるから，$a_n = \frac{1}{2}(n-1)n$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}n(n-1)}$

2 数学的帰納法

教科書 P.37

問 6 (1) この等式を ① とする。

〔1〕 $n=1$ のとき

$$\text{左辺} = 1\cdot2 = 2,\ \text{右辺} = \frac{1}{3}\cdot1\cdot2\cdot3 = 2$$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕 ① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の左辺を② を用いて変形すると

$$\begin{aligned}&1\cdot2+2\cdot3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)\\&= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)\\&= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)\\&= \frac{1}{3}(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}\end{aligned}$$

となり，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(2) この等式を ① とする。

〔1〕 $n=1$ のとき

$$\text{左辺} = 1^2 = 1,\ \text{右辺} = \frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3 = 1$$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕 ① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の左辺を② を用いて変形すると

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&= \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}\\&= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)\\&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\\&= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}\end{aligned}$$

となり，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

教科書 P.38

問 7 この不等式を ① とする。

〔1〕 $n=3$ のとき

$$\text{左辺} = 3^3 = 27,\quad \text{右辺} = 8\cdot3 = 24$$

ゆえに　左辺 > 右辺

よって，① は $n=3$ のとき成り立つ。

〔2〕 $k \geqq 3$ とし，① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$3^k > 8k \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の左辺を ② を用いて変形すると

$$3^{k+1} = 3\cdot3^k > 3\cdot8k = 24k$$

$$3^{k+1} > 24k \quad \cdots\cdots ③$$

次に，$24k$ と $8(k+1)$ を比べる。ここで，$k \geqq 3$ であるから

$$24k - 8(k+1) = 8(2k-1) > 0$$

すなわち　$24k > 8(k+1)$　……④

③，④ より　$3^{k+1} > 8(k+1)$

となり，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，n が 3 以上の自然数のとき ① が成り立つ。

教科書 P.39

問 8 与えられた条件より

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{4}{5},\ \cdots$$

よって，一般項は　$a_n = \dfrac{n}{n+1}$　……①

となると推定できる。

この推定が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

〔1〕 $n=1$ のときは，$a_1 = \frac{1}{2}$ となり ① は成り立つ。

〔2〕 $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$a_k = \frac{k}{k+1}$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，与えられた漸化式より

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= \frac{1}{2-a_k}\\&= \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}\end{aligned}$$

したがって，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

したがって，求める一般項は　　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{n}{n+1}}$

問題

教科書 P.40

11 (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 k 項は 2^{k-1} であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=3+\frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$=2^{n-1}+2$$

$a_1=3$ であるから，$a_n=2^{n-1}+2$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}+2}$

(2) $3a_{n+1}=2a_n+3$ より　　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+1$

$\alpha=\dfrac{2}{3}\alpha+1$ より　　$\alpha=3$

$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+1$ を変形して

$$a_{n+1}-3=\frac{2}{3}(a_n-3)$$

$b_n=a_n-3$ とおくと

$$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n$$
$$b_1=a_1-3=1-3=-2$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから　　$b_n=-2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

したがって　　$a_n=b_n+3=\boldsymbol{3-2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}$

(注) 与えられた漸化式を用いて $3\alpha=2\alpha+3$ から $\alpha=3$ を求めてよい。

12 (1) $b_n=a_{n+1}-a_n$ より

$$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$$
$$=\{2a_{n+1}-3(n+1)\}-(2a_n-3n)$$
$$=2(a_{n+1}-a_n)-3=2b_n-3$$

よって　　$\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n-3}$

(2) $\alpha=2\alpha-3$ より　　$\alpha=3$

$b_{n+1}=2b_n-3$ を変形して

$$b_{n+1}-3=2(b_n-3)$$

$c_n=b_n-3$ とおくと

$$c_{n+1}=2c_n$$
$$c_1=b_1-3=(a_2-a_1)-3$$
$$=(2a_1-3\cdot1)-a_1-3=-1-1-3=-5$$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 -5，公比 2 の等比数列であるから

$$c_n=-5\cdot2^{n-1}$$

よって　　$b_n=c_n+3=3-5\cdot2^{n-1}$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3-5\cdot2^{k-1})$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}3-5\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}$$
$$=1+3(n-1)-5\cdot\frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$=-5\cdot2^{n-1}+3n+3$$

$a_1=1$ であるから，$a_n=-5\cdot2^{n-1}+3n+3$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n=-5\cdot2^{n-1}+3n+3}$

13 (1) $\boldsymbol{a_4=2}$

(2) n 角形の頂点を順に A_1，A_2，$\cdots$，A_n とする。ここで，もう 1 個の頂点 A_{n+1} を加えると $n+1$ 角形となる。このとき，新たに引かれる対角線は $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_{n+1}$，$\mathrm{A}_3\mathrm{A}_{n+1}$，$\cdots$，$\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_{n+1}$ であり，また辺 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{n+1}$，$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ が引かれることにより辺であった $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_n$ が新たに対角線となる。

すなわち，対角線は $n-1$ 本だけ増加するから

$$\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+n-1}$$

〔別解〕n 角形の対角線の本数と辺の本数の和を T_n とおくと

$$T_n=a_n+n$$

問題の条件を満たす n 角形から頂点を 1 個増やした $n+1$ 角形を考えたとき，対角線の本数と辺の本数の和は n 本だけ増加するから

$$T_{n+1}=T_n+n$$
$$=(a_n+n)+n=a_n+2n \quad\cdots\cdots①$$

一方　　$T_{n+1}=a_{n+1}+(n+1)$　　$\cdots\cdots②$

①，② より　　$a_{n+1}+n+1=a_n+2n$

よって　　$a_{n+1}=a_n+n-1$

(3) $a_{n+1}=a_n+n-1$ より

$$a_{n+1}-a_n=n-1$$

したがって，$n\geqq 5$ のとき

$$a_n=a_4+\sum_{k=4}^{n-1}(k-1)$$
$$=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)-\sum_{k=1}^{3}(k-1)$$
$$=2+\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1-3$$
$$=2+\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)-3$$
$$=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n=\frac{1}{2}n(n-3)$$

$a_4=2$ であるから，$a_n=\dfrac{1}{2}n(n-3)$ は $n=4$ のときも成り立つ。

よって　　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2}n(n-3)}$

14 この等式を ① とする。

〔1〕 $n=1$ のとき

$$左辺 = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3},\quad 右辺 = \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$$

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕 ① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1} \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の左辺を② を用いて変形すると

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k+1}{2k+3} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

となり，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

15 この不等式を ① とする。

〔1〕 $n=4$ のとき

$$左辺 = 2^4 = 16,\quad 右辺 = 4^2 = 16$$

よって，① は $n=4$ のとき成り立つ。

〔2〕 $k \geqq 4$ とし，① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち　$2^k \geqq k^2$ ……②

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の左辺を ② を用いて変形すると

$$2^{k+1} = 2\cdot 2^k \geqq 2\cdot k^2 = 2k^2$$

$$2^{k+1} \geqq 2k^2 \quad \cdots\cdots ③$$

次に，$2k^2$ と $(k+1)^2$ を比べる。

ここで，$k \geqq 4$ であるから

$$2k^2-(k+1)^2 = k^2-2k-1 = (k-1)^2-2 > 0$$

すなわち　$2k^2 > (k+1)^2$ ……④

③，④ より　$2^{k+1} > (k+1)^2$

となり，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，n が 4 以上の自然数のとき ① が成り立つ。

16 命題「8^n-7n-1 は 49 の倍数である」を ① とする。

〔1〕 $n=1$ のとき

$$8^1-7\cdot 1-1 = 0$$

となり，49 の倍数である。

よって，① は $n=1$ のとき成り立つ。

〔2〕 ① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわちある整数 m を用いて

$$8^k-7k-1 = 49m \quad \cdots\cdots ②$$

と表されると仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$8^{k+1}-7(k+1)-1 = 8\cdot 8^k-7(k+1)-1$$

② より　$8^k = 49m+7k+1$

よって

$$8^{k+1}-7(k+1)-1 = 8(49m+7k+1)-7(k+1)-1 = 49(8m+k)$$

ここで，$8m+k$ は整数であるから，$8^{k+1}-7(k+1)-1$ は 49 の倍数となり，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

練習問題A

教科書 P.42

1 公差を d とおくと

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\{2\cdot 13+(3-1)d\} = \frac{1}{2}\cdot 11\cdot\{2\cdot 13+(11-1)d\}$$

これを解いて　$d=-2$

ゆえに　公差は **-2**

2 初項を a，公差を d とおくと

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\{2a+(10-1)d\} = 100$$

すなわち　$2a+9d = 20$ ……①

$$\frac{1}{2}\cdot 20\cdot\{2a+(20-1)d\} = 100+200$$

すなわち　$2a+19d = 30$ ……②

①，② を連立させて解くと　$a=\dfrac{11}{2}$，$d=1$

ゆえに，求めるその次の 10 項の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 30\cdot\left\{2\cdot\frac{11}{2}+(30-1)\cdot 1\right\}-(100+200) = 600-300 = \mathbf{300}$$

3 $a_l = b_m$ とすると　$9l-8 = 6m+1$

よって　$9(l-1) = 6m$

$3(l-1) = 2m$

2 と 3 は互いに素で，$l-1 \geqq 0$，$m \geqq 1$ であるから

$l-1 = 2k$，$m = 3k$（k は正の整数）

と表される。

よって，数列 $\{c_n\}$ の第 n 項は数列 $\{b_n\}$ の第 $3n$ 項に一致する。

したがって

$$c_n = 6\cdot 3n+1 = \mathbf{18n+1}$$

また，数列 $\{c_n\}$ は等差数列であるから，初項から第 10 項までの和を S_{10} とすると

$$S_{10} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot(c_1+c_{10}) = 5\cdot(19+181)$$

1章

$= 1000$

（注）　数列 $\{c_n\}$ の第 n 項は数列 $\{a_n\}$ の第 $2n+1$ 項に一致する。これを用いても

$$c_n = 9(2n+1) - 8 = 18n+1$$

を求めることができる。

〔別解〕 数列 $\{a_n\}$ は

1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, $\cdots$

数列 $\{b_n\}$ は

7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, $\cdots$

したがって，数列 $\{c_n\}$ は，初項が 19，公差が $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の公差 9 と 6 の最小公倍数 18 の等差数列であることがわかる。このことから

$$c_n = 19 + (n-1) \cdot 18 = 18n+1$$

4　$r<0$，$0<1$，$0<r^2$ であるから，3 つの数 1，r，r^2 を等差数列になるように小さい方から順に並べると，その並びは

$r,\ 1,\ r^2$　　または　　$r,\ r^2,\ 1$

である。

(i)　r，1，r^2 がこの順に等差数列となるとき

$$2 = r + r^2$$

これを解いて　　$r = -2,\ 1$

$r<0$ より　　$r = -2$

(ii)　r，r^2，1 がこの順に等差数列となるとき

$$2r^2 = r+1$$

これを解いて　　$r = -\dfrac{1}{2},\ 1$

$r<0$ より　　$r = -\dfrac{1}{2}$

よって，(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{r = -2,\ -\dfrac{1}{2}}$

5　(1)　この数列の第 k 項は $k\{n-(k-1)\}$ と表されるから，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} k\{n-(k-1)\} = \sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}k^2 + (n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$$

(2)　この数列の第 k 項は

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = \frac{1}{\dfrac{k(k+1)}{2}} = \frac{2}{k(k+1)}$$

と表されるから，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \boldsymbol{\frac{2n}{n+1}}$$

6　一般項は $2n\cdot 3^n$ であり

$$S_n = 2\cdot 3 + 4\cdot 3^2 + 6\cdot 3^3 + \cdots + 2n\cdot 3^n \quad \cdots\cdots ①$$

① の両辺に 3 を掛けて

$$3S_n = \qquad 2\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + \cdots + (2n-2)\cdot 3^n + 2n\cdot 3^{n+1} \quad \cdots\cdots ②$$

①－② より

$$-2S_n = 2(3+3^2+3^3+\cdots+3^n) - 2n\cdot 3^{n+1}$$

$$= 2\cdot\frac{3(3^n-1)}{3-1} - 2n\cdot 3^{n+1}$$

$$= 3^{n+1} - 3 - 2n\cdot 3^{n+1}$$

$$= (1-2n)\cdot 3^{n+1} - 3$$

よって　　$\boldsymbol{S_n = \dfrac{3}{2}\{(2n-1)\cdot 3^n + 1\}}$

7　数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n} = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}$$

$$= \frac{1\cdot(10^n-1)}{10-1} = \boldsymbol{\frac{1}{9}(10^n-1)}$$

また，求める和 S_n は

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k-1)$$

$$= \frac{1}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k - \sum_{k=1}^{n}1\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)}$$

8　この不等式を ① とする。

〔1〕　$n=2$ のとき

左辺 $= \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{5}{4}$，右辺 $= 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

ゆえに　　左辺 $<$ 右辺

よって，① は $n=2$ のとき成り立つ。

〔2〕　$k \geqq 2$ とし，① が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k} \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の左辺を ② を用いて変形すると

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$< 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \cdots\cdots ③$$

次に，$2 - \dfrac{1}{k+1}$ と $2 - \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{(k+1)^2}$ を比べる。

ここで，$k \geqq 2$ であるから

$$\left(2 - \frac{1}{k+1}\right) - \left\{2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{-k(k+1)+(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)^2} > 0$$

すなわち

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2-\frac{1}{k+1} \quad \cdots\cdots ④$$

③，④ より

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$< 2-\frac{1}{k+1}$$

となり，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，n が 2 以上の自然数のとき ① が成り立つ。

〔別解〕 $n \geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$< 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1+1-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n}$$

9 与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1) 与えられた条件より　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，$a_4=16$，$\cdots$ となり，一般項は

$$\boldsymbol{a_n=n^2} \quad \cdots\cdots ①$$

となると推定できる。

(2) 〔1〕 $n=1$ のときは，$a_1=1$ となり ① は成り立つ。

〔2〕 $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$a_k=k^2$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1}=1+2+3+\cdots+(k-1)+k$$
$$+(k+1)+k+(k-1)+\cdots$$
$$+3+2+1$$
$$=\{1+2+\cdots+(k-1)+k+(k-1)$$
$$+\cdots+2+1\}+k+(k+1)$$
$$=a_k+k+k+1$$
$$=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

したがって，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，一般項が $a_n=n^2$ であることが証明された。

練習問題B

教科書 P.43

10 初項 -5，末項 15，項数 $n+2$ の等差数列の和が 100 であるから

$$\frac{1}{2}(n+2)(-5+15)=100$$

これを解いて　$\boldsymbol{n=18}$

11 2 つの等比数列の条件より，$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$ である。

4，a，b がこの順に等比数列となるから

$$a^2=4b \quad \cdots\cdots ①$$

b，c，64 がこの順に等比数列となるから

$$c^2=64b \quad \cdots\cdots ②$$

a，b，c がこの順に等差数列となるから

$$2b=a+c \quad \cdots\cdots ③$$

①，② から b を消去すると

$$16a^2=c^2$$

よって　$c=\pm 4a$

(i) $c=4a$ のとき

$c=4a$ を ③ に代入して　$2b=5a$　$\cdots\cdots ④$

①，④ を連立させて解くと　$a^2=10a$

$a \neq 0$ より　$a=10$，$b=25$，$c=40$

(ii) $c=-4a$ のとき

$c=-4a$ を ③ に代入して

$$2b=-3a \quad \cdots\cdots ⑤$$

①，⑤ を連立させて解くと　$a^2=-6a$

$a \neq 0$ より　$a=-6$，$b=9$，$c=24$

(i)，(ii) より

$\boldsymbol{a=10}$，$\boldsymbol{b=25}$，$\boldsymbol{c=40}$ **または**

$\boldsymbol{a=-6}$，$\boldsymbol{b=9}$，$\boldsymbol{c=24}$

12

$$\boldsymbol{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}}=\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{k(k+1)(k+2)}}$$

求める和を S_n とすると

$$2S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)$$
$$+\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}}=\boldsymbol{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$

13 この数列を，次のような群に分ける。

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ \Big|\ \frac{1}{6},\ \cdots$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

すなわち，第 k 群は $k+1$ 個の項を含み

分母は　$k+2$

分子は　1，2，$\cdots$，$k+1$

である。

(1) $\dfrac{1}{17}$ は，第 15 群の 1 番目の項である。

第 1 群から第 14 群までの項数は

$2+3+4+\cdots+15$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 15\cdot(15+1)-1=119$

よって，$\dfrac{1}{17}$ はこの数列の **第 120 項** である。

(2) 第 1 群から第 $n-1$ 群 $(n \geqq 2)$ までの項数は

$2+3+4+\cdots+n$

$=\dfrac{1}{2}n(n+1)-1=\dfrac{1}{2}(n^2+n-2)$

第 1 群から第 n 群までの項数は

$2+3+4+\cdots+(n+1)$

$=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)-1=\dfrac{1}{2}(n^2+3n)$

よって，第 200 項が第 n 群に含まれるとすると

$\dfrac{1}{2}(n^2+n-2)<200 \leqq \dfrac{1}{2}(n^2+3n)$

したがって　　$n=19$

すなわち，第 200 項は第 19 群に含まれる。

ゆえに，第 200 項の分母は 21 である。

また，第 1 群から第 18 群までの項数は

$\dfrac{1}{2}(18^2+3\cdot 18)=189$

$200-189=11$

よって，第 200 項の分子は 11 である。

ゆえに，第 200 項は $\boldsymbol{\dfrac{11}{21}}$ である。

14 (1) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ であるから，ある n について

$a_{n+1}=0$ であるとすると

$a_n=0$

これをくり返すと，$a_1=0$ となり，$a_1=5$ に反する。

よって，すべての n に対して，$a_n \neq 0$ となる。

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ より

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+3}{a_n}=\dfrac{3}{a_n}+2$　　…… ①

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ より　　$b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}$

これらを ① に代入して　　$\boldsymbol{b_{n+1}=3b_n+2}$

(2) $\alpha=3\alpha+2$ より　　$\alpha=-1$

$b_{n+1}=3b_n+2$ を変形して

$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

$c_n=b_n+1$ とおくと

$c_{n+1}=3c_n$

$c_1=b_1+1=\dfrac{1}{5}+1=\dfrac{6}{5}$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $\dfrac{6}{5}$，公比 3 の等比数列であるから

$c_n=\dfrac{6}{5}\cdot 3^{n-1}=\dfrac{2}{5}\cdot 3^n$

よって

$b_n=c_n-1=\dfrac{2}{5}\cdot 3^n-1=\dfrac{2\cdot 3^n-5}{5}$

したがって　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2\cdot 3^n-5}}$

15 $a_1=S_1=2a_1+1$ より　　$a_1=-1$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$

$=(2a_{n+1}+1)-(2a_n+1)$

$=2a_{n+1}-2a_n$

よって　　$a_{n+1}=2a_n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ は初項 -1，公比 2 の等比数列であるから

$a_n=(-1)\cdot 2^{n-1}=\boldsymbol{-2^{n-1}}$

16 まず，$n=1$ のとき，1 個の円が平面を 2 つの部分に分けるから

$a_1=2$　　…… ①

問題の条件を満たす n 個の円に加えて，さらに $n+1$ 個目の円をかく。この $n+1$ 個目の円は，もとからある n 個の円それぞれと 2 個の点で交わり，これら合計 $2n$ 個の点によって，$n+1$ 個目の円は $2n$ 個の弧に分けられる。この $2n$ 個の弧が新しい境界線となり，分けられる平面の部分の数は $2n$ 個だけ増加する。

したがって　　$a_{n+1}=a_n+2n$

ゆえに　　$a_{n+1}-a_n=2n$　　…… ②

①，② より，$n \geqq 2$ のとき

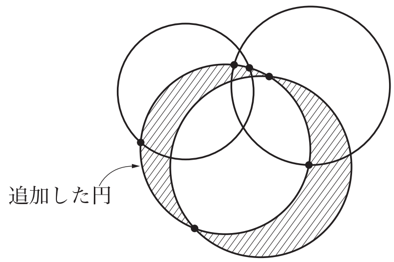
$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k$

$=2+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k$

$=2+2\cdot\dfrac{1}{2}(n-1)n=n^2-n+2$

$a_1=2$ であるから，$a_n=n^2-n+2$ は $n=1$ のときも成り立つ。

よって　　$\boldsymbol{(n^2-n+2)}$ **個**



$n=3$ のとき

発展　3項間の漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$

教科書 P.45

問 1 (1) 漸化式 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ は，2 次方程式 $x^2=3x-2$ を満たす解 $x=1,\ 2$ を用いて

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$　　…… ①

$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n$　　…… ②

と変形される。

① より，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は公比 2 の等比数列で

あるから

$$a_{n+1}-a_n=2^{n-1}(a_2-a_1)$$
$$=2^{n-1}(3-1)=2\cdot2^{n-1}=2^n$$

すなわち　$a_{n+1}-a_n=2^n$　……③

② より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は公比 1 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=1^{n-1}(a_2-2a_1)$$
$$=1^{n-1}(3-2\cdot1)=1$$

すなわち　$a_{n+1}-2a_n=1$　……④

よって，③ から ④ を引いて

$$\boldsymbol{a_n=2^n-1}$$

(2)　漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ は，2 次方程式 $x^2=x+6$ を満たす解 $x=-2,\ 3$ を用いて

$$a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)\quad\cdots\cdots①$$
$$a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)\quad\cdots\cdots②$$

と変形される。

① より，数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ は公比 3 の等比数列であるから

$$a_{n+1}+2a_n=3^{n-1}(a_2+2a_1)$$
$$=3^{n-1}(1+2\cdot2)=5\cdot3^{n-1}$$

すなわち　$a_{n+1}+2a_n=5\cdot3^{n-1}$　……③

② より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比 -2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-3a_n=(-2)^{n-1}(a_2-3a_1)$$
$$=(-2)^{n-1}(1-3\cdot2)$$
$$=-5\cdot(-2)^{n-1}$$

すなわち

$$a_{n+1}-3a_n=-5\cdot(-2)^{n-1}\quad\cdots\cdots④$$

よって，③ から ④ を引いて

$$5a_n=5\{3^{n-1}+(-2)^{n-1}\}$$

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=3^{n-1}+(-2)^{n-1}}$

参考　確率と漸化式

教科書 P.46

問 1　1 個のさいころを $(n+1)$ 回投げるとき，2 以下の目が奇数回出るという事象は

①　n 回投げたとき，2 以下の目が奇数回出て，$(n+1)$ 回目は 3 以上の目が出る

②　n 回投げたとき，2 以下の目が偶数回出て，$(n+1)$ 回目は 2 以下の目が出る

の和事象であり，これらの事象は互いに排反である。

事象 ①，② の起こる確率は，それぞれ $\dfrac{2}{3}p_n$，$\dfrac{1}{3}(1-p_n)$ であるから

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}(1-p_n)$$

すなわち　$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}$

$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$ と変形できるから，

$q_n=p_n-\dfrac{1}{2}$ とおくと　$q_{n+1}=\dfrac{1}{3}q_n$

$p_1=\dfrac{1}{3}$ より　$q_1=p_1-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$

よって，数列 $\{q_n\}$ は初項 $-\dfrac{1}{6}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$q_n=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに

$$p_n=q_n+\frac{1}{2}=\boldsymbol{-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}}$$

発展　連立漸化式

教科書 P.47

問 1　(1)　与えられた漸化式を $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}$ に代入すると

$$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}$$
$$=(4a_n-2b_n)+\alpha(-a_n+3b_n)$$
$$=(-\alpha+4)a_n+(3\alpha-2)b_n$$

よって，$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ がすべての n について成り立つためには

$$\begin{cases}\beta=-\alpha+4 & \cdots\cdots①\\ \alpha\beta=3\alpha-2 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

であればよい。

① を ② に代入して

$$\alpha(-\alpha+4)=3\alpha-2$$
$$\alpha^2-\alpha-2=0$$
$$(\alpha-2)(\alpha+1)=0$$
$$\alpha=2,\ -1$$

① より　$\alpha=2$ のとき　$\beta=2$

　　　　$\alpha=-1$ のとき　$\beta=5$

よって，$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ がすべての n で成り立つ α，β の値の組は

$$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=(2,\ 2),\ (-1,\ 5)}$$

(2)　(1) より

$$a_{n+1}+2b_{n+1}=2(a_n+2b_n)\quad\cdots\cdots③$$
$$a_{n+1}-\ b_{n+1}=5(a_n-b_n)\quad\cdots\cdots④$$

③ より，数列 $\{a_n+2b_n\}$ は公比 2 の等比数列であるから

$$a_n+2b_n=2^{n-1}(a_1+2b_1)$$
$$=2^{n-1}\{4+2\cdot(-1)\}$$
$$=2^{n-1}\cdot2=2^n$$

すなわち　$a_n+2b_n=2^n$　……⑤

④ より，数列 $\{a_n-b_n\}$ は公比 5 の等比数列であるから

$$a_n-b_n=5^{n-1}(a_1-b_1)$$
$$=5^{n-1}\{4-(-1)\}$$
$$=5^{n-1}\cdot5=5^n$$

すなわち　$a_n-b_n=5^n$　……⑥

⑤＋2×⑥ より

$$3a_n=2^n+2\cdot5^n$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2^n + 2\cdot 5^n}{3}}$$

⑤－⑥ より

$$3b_n = 2^n - 5^n$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{2^n - 5^n}{3}}$$

〔別解〕(1) を用いずに，3 項間漸化式をつくる方法もある。

$a_{n+1} = 4a_n - 2b_n$ より

$$b_n = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 2a_n \quad \cdots\cdots ①$$

① より　$b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_{n+2} + 2a_{n+1}$ ……②

①，② を $b_{n+1} = -a_n + 3b_n$ に代入すると

$$-\frac{1}{2}a_{n+2} + 2a_{n+1}$$

$$= -a_n + 3\left(-\frac{1}{2}a_{n+1} + 2a_n\right)$$

すなわち

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0 \quad \cdots\cdots ③$$

また

$$a_2 = 4a_1 - 2b_1 = 4\cdot 4 - 2\cdot(-1) = 18$$

漸化式 ③ は，2 次方程式 $x^2 - 7x + 10 = 0$ を満たす解 $x = 2,\ 5$ を用いて

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 2a_n)$$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 5a_n)$$

と変形される。

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は公比 5 の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2a_n &= 5^{n-1}(a_2 - 2a_1) \\ &= 5^{n-1}(18 - 2\cdot 4) \\ &= 10\cdot 5^{n-1} = 2\cdot 5^n \end{aligned}$$

すなわち　$a_{n+1} - 2a_n = 2\cdot 5^n$ ……④

数列 $\{a_{n+1} - 5a_n\}$ は公比 2 の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 5a_n &= 2^{n-1}(a_2 - 5a_1) \\ &= 2^{n-1}(18 - 5\cdot 4) \\ &= -2\cdot 2^{n-1} = -2^n \end{aligned}$$

すなわち　$a_{n+1} - 5a_n = -2^n$ ……⑤

④ から ⑤ を引いて

$$3a_n = 2^n + 2\cdot 5^n$$

$$a_n = \frac{2^n + 2\cdot 5^n}{3} \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑥ より　$a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} + 2\cdot 5^{n+1}}{3}$ ……⑦

⑥，⑦ を ① に代入して

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{2}\left(\frac{2^{n+1} + 2\cdot 5^{n+1}}{3}\right) \\ &\qquad + 2\left(\frac{2^n + 2\cdot 5^n}{3}\right) \\ &= \frac{-2^n - 5\cdot 5^n}{3} + \frac{2\cdot 2^n + 4\cdot 5^n}{3} \\ &= \frac{2^n - 5^n}{3} \end{aligned}$$