

3 章・1 節 確率分布

- ① 事象の独立と従属
② 確率変数と確率分布
③ 確率変数の平均と分散

1 次の□をうめよ。【知】

事象 A が起こったときの事象 B の起こる確率を、 A が起こったときの事象 B の起こる□条件つき確率□といい、□ $P_A(B)$ □と表される。

$$P_A(B)=\frac{P(\square A \cap B \square)}{P(A)}$$

この等式から、次の確率の乗法定理が得られる。

$$P(\square A \cap B \square)=P(\square A \square) \cdot P_A(\square B \square)$$

2 つの事象 A 、 B があって、一方の事象が起こったという条件により他方の事象の起こる確率が変化しないとき、すなわち

$$\square P_A(B) \square = P(B), \square P_B(A) \square = P(A)$$

の 2 つの式がともに成り立つとき、 A と B は□独立□であるという。

$$A \text{ と } B \text{ が独立である} \iff P(A \cap B) = \square P(A) \cdot P(B) \square$$

また、 A と B が独立でないとき、 A と B は□従属□であるという。

2 次の□をうめよ。【知】

- (1) 試行の結果によってその値が定まる変数を□確率変数□という。確率変数のとり得る値と、その値をとる確率との対応を示したものを、その確率変数の□確率分布□または単に□分布□という。

- (2) 確率変数 X のとり得る値が x_1, x_2, \cdots, x_n であるとき、 $P(X=x_i)=p_i$ とすると、次のことが成り立つ。

① $p_1 \geq \square 0 \square, p_2 \geq \square 0 \square, \cdots, p_n \geq \square 0 \square$

② $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \square 1 \square$

X の確率分布は次の表で示される。

X	x_1	x_2	\cdots	x_n	計
P	p_1	p_2	\cdots	p_n	$\square 1 \square$

このとき、 $\sum_{i=1}^n x_i p_i = \square x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \square$ で与えられる値を X の平均または期待値といい、□ $E(X)$ □で表す。

また、 a, b を定数とすると、確率変数 $aX+b$ に対して $E(aX+b) = \square aE(X)+b \square$ が成り立つ。

- (3) 確率変数 X に対して X の平均を m とするとき、確率変数 $X-m$ を X の平均からの□偏差□という。また、 $(X-m)^2$ の平均を確率変数 X の□分散□といい、□ $V(X)$ □で表す。

$$V(X)=\sum_{i=1}^n \square (x_i-m)^2 p_i \square$$

$$V(X)=E((X-m)^2)=\square E(X^2) \square -m^2$$

- (4) 確率変数 X の分散 $V(X)$ の正の平方根を X の□標準偏差□といい、 $\sigma(X)$ で表す。すなわち

$$\sigma(X)=\square \sqrt{V(X)} \square$$

また、 a, b を定数とすると

$$V(aX+b)=\square a^2 \square V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=\square |a| \square \sigma(X)$$

3 1 個のさいころを投げて出た目が偶数である事象を A 、5 以上である事象を B 、2 または 3 の倍数である事象を C とする。次の問に答えよ。【国】

- (1) 次の確率を求めよ。

① $P_A(B)$

〔解〕 $P(A)=\frac{3}{6}, P(A \cap B)=\frac{1}{6}$ であるから

$$P_A(B)=\frac{1}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$$

② $P_C(A)$

〔解〕 $P(C)=\frac{4}{6}, P(A \cap C)=\frac{3}{6}$ であるから

$$P_C(A)=\frac{3}{6} \div \frac{4}{6} = \frac{3}{4}$$

③ $P_B(C)$

〔解〕 $P(B)=\frac{2}{6}, P(B \cap C)=\frac{1}{6}$ であるから

$$P_B(C)=\frac{1}{6} \div \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

- (2) 事象 A と B は独立であるか従属であるかを答えよ。

〔解〕 $P(A) \cdot P(B)=\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}, P(A \cap B)=\frac{1}{6}$ であるから

$$P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$$

よって、 A と B は□独立□である。

- (3) 事象 A と C が独立であるか従属であるかを答えよ。

〔解〕 $P(A) \cdot P(C)=\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}, P(A \cap C)=\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ であるから

$$P(A \cap C) \neq P(A) \cdot P(C)$$

よって、 A と C は□従属□である。

4 赤球 4 個と白球 3 個が入った袋から同時に 3 個の球を取り出すとき、その中に含まれている赤球の個数を X とする。次の問に答えよ。【国】

- (1) X の確率分布を求めよ。

〔解〕 X は 0, 1, 2, 3 の値をとる確率変数であり、それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}, P(X=1)=\frac{{}_4C_1 \times {}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2 \times {}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}, P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$$

したがって、求める確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

- (2) 確率 $P(X \geq 1)$ を求めよ。

〔解〕 $P(X \geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$

5 1 個のさいころを投げるときに出る目の数を X とするとき、確率変数 $2X-3$ の平均と分散を求めよ。【国】

〔解〕 $E(X)=1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$

$$V(X)=1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

よって $E(2X-3)=2E(X)-3=2 \cdot \frac{7}{2}-3=4$

$$V(2X-3)=2^2 V(X)=\frac{35}{3}$$