3章・1節　確率分布

組	番号	名　　前

①　事象の独立と従属
②　確率変数と確率分布
③　確率変数の平均と分散

1　次の$\boxed{\quad\quad}$をうめよ。知

事象Aが起こったときの事象Bの起こる確率を，Aが起こったときの事象Bの起こる$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$といい，$\boxed{\quad\quad}$と表される。

$$P_A(B)=\frac{P\left(\boxed{\quad\quad}\right)}{P(A)}$$

この等式から，次の確率の乗法定理が得られる。

$$P\left(\boxed{\quad\quad}\right)=P\left(\boxed{\quad}\right)\cdot P_A\left(\boxed{\quad}\right)$$

2つの事象A，Bがあって，一方の事象が起こったという条件により他方の事象の起こる確率が変わらないとき，すなわち

$$\boxed{\quad\quad}=P(B),\ \boxed{\quad\quad}=P(A)$$

の2つの式がともに成り立つとき，AとBは$\boxed{\quad}$であるという。

$$A\text{と}B\text{が独立である}\iff P(A\cap B)=\boxed{\quad\quad\quad}$$

また，AとBが独立でないとき，AとBは$\boxed{\quad}$であるという。

2　次の$\boxed{\quad\quad}$をうめよ。知

(1)　試行の結果によってその値が定まる変数を$\boxed{\quad\quad\quad}$という。確率変数のとり得る値と，その値をとる確率との対応を示したものを，その確率変数の$\boxed{\quad\quad\quad}$または単に$\boxed{\quad\quad}$という。

(2)　確率変数Xのとり得る値がx_1，x_2，…，x_nであるとき，$P(X=x_i)=p_i$とすると，次のことが成り立つ。

$\boxed{1}$　$p_1\geqq\boxed{\quad}$，$p_2\geqq\boxed{\quad}$，…，$p_n\geqq\boxed{\quad}$

$\boxed{2}$　$p_1+p_2+\cdots+p_n=\boxed{\quad}$

Xの確率分布は次の表で示される。

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	$\boxed{\quad}$

このとき，$\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$で与えられる値を$X$の平均または期待値といい，$\boxed{\quad\quad}$で表す。

また，a, bを定数とするとき，確率変数$aX+b$に対して

$E(aX+b)=\boxed{\quad\quad\quad}$が成り立つ。

(3)　確率変数Xに対してXの平均をmとするとき，確率変数$X-m$をXの平均からの$\boxed{\quad\quad}$という。また，$(X-m)^2$の平均を確率変数Xの$\boxed{\quad\quad}$といい，$\boxed{\quad\quad}$で表す。

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

$$V(X)=E((X-m)^2)=\boxed{\quad\quad\quad}-m^2$$

(4)　確率変数Xの分散$V(X)$の正の平方根をXの$\boxed{\quad\quad\quad}$といい，$\sigma(X)$で表す。すなわち

$$\sigma(X)=\boxed{\quad\quad\quad}$$

また，a，bを定数とするとき

$$V(aX+b)=\boxed{\quad}V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=\boxed{\quad}\sigma(X)$$

3　1個のさいころを投げて出た目が偶数である事象をA，5以上である事象をB，2または3の倍数である事象をCとする。次の問に答えよ。技

(1)　次の確率を求めよ。

①　$P_A(B)$

②　$P_C(A)$

③　$P_B(C)$

(2)　事象AとBは独立であるか従属であるかを答えよ。

(3)　事象AとCが独立であるか従属であるかを答えよ。

4　赤球4個と白球3個が入った袋から同時に3個の球を取り出すとき，その中に含まれている赤球の個数をXとする。次の問に答えよ。技

(1)　Xの確率分布を求めよ。

(2)　確率$P(X\geqq1)$を求めよ。

5　1個のさいころを投げるときに出る目の数をXとするとき，確率変数$2X-3$の平均と分散を求めよ。技

3章・1節　確率分布

組	番号	名　　前

④　確率変数の和と積
⑤　二項分布

1 次の$\boxed{}$をうめよ。知

(1)　2つの確率変数X，Yの和について，次の等式が成り立つ。

$E(X+Y)=\boxed{}$

(2)　独立な確率変数X，Yの積の平均と和の分散について

$E(XY)=\boxed{}$，$V(X+Y)=\boxed{}$

(3)　ある試行で事象Aが起こる確率をpとし，Aが起こらない確率を$q=1-p$とおく。この試行をn回くり返す反復試行において，事象Aが起こる回数をXとすれば，$X=r$となる確率は

$P(X=r)=\boxed{}$　$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

である。確率変数Xの確率分布が上の式を満たすとき，この確率分布を確率pに対する$\boxed{}$の$\boxed{}$といい，$\boxed{}$で表す。

(4)　確率変数Xが二項分布$B(n,\ p)$に従うとき

$E(X)=\boxed{}$，$V(X)=\boxed{}$　ただし，$q=1-p$

2 独立な確率変数X,Yの分布がそれぞれ下の表で与えられている。技

X	0	1	2	計
P	0.2	0.6	0.2	1

Y	0	1	2	計
P	0.1	0.3	0.6	1

(1)　$X+Y$の平均と分散を求めよ。

(2)　XYの平均を求めよ。

3 赤球2個と白球3個が入っている袋から同時に2個の球を取り出し，色を調べてもとに戻す。これを3回くり返したとき，取り出した赤球の総数の平均と分散を求めよ。技

4 2個のさいころを同時に投げる試行を6回くり返すとき，2個とも偶数の目が出る回数をXとする。このとき，Xは二項分布$B(n,\ p)$に従う。次の問に答えよ。技

(1)　nとpの値を求めよ。

(2)　確率$P(X\geqq 5)$を求めよ。

5 100円硬貨3枚を同時に投げる試行を40回続けて行うとき，2枚が表で1枚が裏になる回数の平均を求めよ。技

6 赤球2個と白球6個が入っている袋がある。この袋から1個の球を取り出して色を調べてもとに戻す。これを72回くり返したとき，赤球の出る回数をXとする。Xの平均，分散，標準偏差を求めよ。技

7 原点Oから出発して数直線上を動く点Pがある。1枚の硬貨を投げて，表が出ればPは$+4$だけ進み，裏が出ればPは-2だけ進むという。硬貨を5回投げるとき，次の問に答えよ。技

(1)　表の出る回数Xの平均と分散を求めよ。

(2)　点Pの座標Yの平均と分散を求めよ。

3章・1節　確率分布

組	番号	名　　前

①　事象の独立と従属
②　確率変数と確率分布
③　確率変数の平均と分散

1 次の$\boxed{}$をうめよ。知

事象Aが起こったときの事象Bの起こる確率を，Aが起こったときの事象Bの起こる $\boxed{\text{条件つき確率}}$ といい，$\boxed{P_A(B)}$ と表される。

$$P_A(B)=\frac{P\left(\boxed{A\cap B}\right)}{P(A)}$$

この等式から，次の確率の乗法定理が得られる。

$$P\left(\boxed{A\cap B}\right)=P\left(\boxed{A}\right)\cdot P_A\left(\boxed{B}\right)$$

2つの事象A，Bがあって，一方の事象が起こったという条件により他方の事象の起こる確率が変わらないとき，すなわち

$\boxed{P_A(B)}=P(B)$，$\boxed{P_B(A)}=P(A)$

の2つの式がともに成り立つとき，AとBは $\boxed{\text{独立}}$ であるという。

AとBが独立である $\iff P(A\cap B)=\boxed{P(A)\cdot P(B)}$

また，AとBが独立でないとき，AとBは $\boxed{\text{従属}}$ であるという。

2 次の$\boxed{}$をうめよ。知

(1) 試行の結果によってその値が定まる変数を $\boxed{\text{確率変数}}$ という。確率変数のとり得る値と，その値をとる確率との対応を示したものを，その確率変数の $\boxed{\text{確率分布}}$ または単に $\boxed{\text{分布}}$ という。

(2) 確率変数Xのとり得る値がx_1，x_2，…，x_nであるとき，$P(X=x_i)=p_i$とすると，次のことが成り立つ。

$\boxed{1}$ $p_1\geqq\boxed{0}$，$p_2\geqq\boxed{0}$，…，$p_n\geqq\boxed{0}$

$\boxed{2}$ $p_1+p_2+\cdots+p_n=\boxed{1}$

Xの確率分布は次の表で示される。

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	$\boxed{1}$

このとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=\boxed{x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}$ で与えられる値をXの平均または期待値といい，$\boxed{E(X)}$ で表す。

また，a，bを定数とするとき，確率変数$aX+b$に対して

$E(aX+b)=\boxed{aE(X)+b}$ が成り立つ。

(3) 確率変数Xに対してXの平均をmとするとき，確率変数$X-m$をXの平均からの $\boxed{\text{偏差}}$ という。また，$(X-m)^2$の平均を確率変数Xの $\boxed{\text{分散}}$ といい，$\boxed{V(X)}$ で表す。

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\boxed{(x_i-m)^2p_i}$$

$$V(X)=E((X-m)^2)=\boxed{E(X^2)}-m^2$$

(4) 確率変数Xの分散$V(X)$の正の平方根をXの $\boxed{\text{標準偏差}}$ といい，$\sigma(X)$で表す。すなわち

$$\sigma(X)=\boxed{\sqrt{V(X)}}$$

また，a，bを定数とするとき

$$V(aX+b)=\boxed{a^2}V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=\boxed{|a|}\sigma(X)$$

3 1個のさいころを投げて出た目が偶数である事象をA，5以上である事象をB，2または3の倍数である事象をCとする。次の問に答えよ。技

(1) 次の確率を求めよ。

① $P_A(B)$

［解］ $P(A)=\frac{3}{6}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ であるから

$P_A(B)=\frac{1}{6}\div\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

② $P_C(A)$

［解］ $P(C)=\frac{4}{6}$，$P(A\cap C)=\frac{3}{6}$ であるから

$P_C(A)=\frac{3}{6}\div\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

③ $P_B(C)$

［解］ $P(B)=\frac{2}{6}$，$P(B\cap C)=\frac{1}{6}$ であるから

$P_B(C)=\frac{1}{6}\div\frac{2}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) 事象AとBは独立であるか従属であるかを答えよ。

［解］ $P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ であるから

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

よって，AとBは**独立**である。

(3) 事象AとCが独立であるか従属であるかを答えよ。

［解］ $P(A)\cdot P(C)=\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$，$P(A\cap C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ であるから

$P(A\cap C)\fallingdotseq P(A)\cdot P(C)$

よって，AとCは**従属**である。

4 赤球4個と白球3個が入った袋から同時に3個の球を取り出すとき，その中に含まれている赤球の個数をXとする。次の問に答えよ。技

(1) Xの確率分布を求めよ。

［解］ Xは0, 1, 2, 3の値をとる確率変数であり，それぞれの値をとる確率は

$P(X=0)=\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$，$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$，$P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$

したがって，求める確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\mathbf{\frac{1}{35}}$	$\mathbf{\frac{12}{35}}$	$\mathbf{\frac{18}{35}}$	$\mathbf{\frac{4}{35}}$	1

(2) 確率$P(X\geqq1)$を求めよ。

［解］ $P(X\geqq1)=1-P(X=0)=1-\frac{1}{35}=\mathbf{\frac{34}{35}}$

5 1個のさいころを投げるときに出る目の数をXとするとき，確率変数$2X-3$の平均と分散を求めよ。技

［解］ $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

$V(X)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$

よって　$E(2X-3)=2E(X)-3=2\cdot\frac{7}{2}-3=4$

$V(2X-3)=2^2V(X)=\mathbf{\frac{35}{3}}$

3章・1節　確率分布

④　確率変数の和と積
⑤　二項分布

組	番号	名　　前

1 次の$\boxed{}$をうめよ。知

(1)　2つの確率変数X，Yの和について，次の等式が成り立つ。

$E(X+Y)=\boxed{E(X)+E(Y)}$

(2)　独立な確率変数X，Yの積の平均と和の分散について

$E(XY)=\boxed{E(X)\cdot E(Y)}$，$V(X+Y)=\boxed{V(X)+V(Y)}$

(3)　ある試行で事象Aが起こる確率をpとし，Aが起こらない確率を$q=1-p$とおく。この試行をn回くり返す反復試行において，事象Aが起こる回数をXとすれば，$X=r$となる確率は

$P(X=r)=\boxed{{}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}}$　$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

である。確率変数Xの確率分布が上の式を満たすとき，この確率分布を確率pに対する$\boxed{\text{次数}n}$の$\boxed{\text{二項分布}}$といい，$\boxed{B(n,\ p)}$で表す。

(3)　確率変数Xが二項分布$B(n,\ p)$に従うとき

$E(X)=\boxed{np}$，$V(X)=\boxed{npq}$　ただし，$q=1-p$

2 独立な確率変数X, Yの分布がそれぞれ下の表で与えられている。技

X	0	1	2	計
P	0.2	0.6	0.2	1

Y	0	1	2	計
P	0.1	0.3	0.6	1

(1)　$X+Y$の平均と分散を求めよ。

［解］　Xの平均は　$E(X)=0\cdot0.2+1\cdot0.6+2\cdot0.2=1$

Yの平均は　$E(Y)=0\cdot0.1+1\cdot0.3+2\cdot0.6=1.5$

よって　$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1+1.5=\mathbf{2.5}$

Xの分散は　$V(X)=0^2\cdot0.2+1^2\cdot0.6+2^2\cdot0.2-1^2=0.4$

Yの分散は　$V(Y)=0^2\cdot0.1+1^2\cdot0.3+2^2\cdot0.6-1.5^2=0.45$

X，Yは独立であるから　$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=0.4+0.45=\mathbf{0.85}$

(2)　XYの平均を求めよ。

［解］　X，Yは独立であるから　$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=1\times1.5=\mathbf{1.5}$

3 赤球2個と白球3個が入っている袋から同時に2個の球を取り出し，色を調べてもとに戻す。これを3回くり返したとき，取り出した赤球の総数の平均と分散を求めよ。技

［解］　k回目の赤球の数をX_k $(k=1,\ 2,\ 3)$とすると

$P(X_k=0)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{10}$

$P(X_k=1)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{6}{10}$

$P(X_k=2)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{10}$

X_k	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

であるから，X_kの確率分布は，上の表のようになる。

ゆえに

$E(X_k)=0\cdot\dfrac{3}{10}+1\cdot\dfrac{6}{10}+2\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{4}{5}$

$V(X_k)=0^2\cdot\dfrac{3}{10}+1^2\cdot\dfrac{6}{10}+2^2\cdot\dfrac{1}{10}-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

赤球の総数Xは　$X=X_1+X_2+X_3$

したがって　$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=\mathbf{\dfrac{12}{5}}$ **(個)**

X_1，X_2，X_3は独立であるから

$V(X)=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)=\mathbf{\dfrac{27}{25}}$

4 2個のさいころを同時に投げる試行を6回くり返すとき，2個とも偶数の目が出る回数をXとする。このとき，Xは二項分布$B(n,\ p)$に従う。次の問に答えよ。技

(1)　nとpの値を求めよ。

［解］　$p=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{6\times6}=\dfrac{1}{4}$

よって　$\mathbf{n=6,\ p=\dfrac{1}{4}}$

(2)　確率$P(X\geqq5)$を求めよ。

［解］　$P(X\geqq5)=P(X=5)+P(X=6)$

$={}_6\mathrm{C}_5\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\left(\dfrac{3}{4}\right)+{}_6\mathrm{C}_6\left(\dfrac{1}{4}\right)^6$

$=6\cdot\dfrac{3}{4^6}+1\cdot\dfrac{1}{4^6}$

$=\mathbf{\dfrac{19}{4096}}$

5 100円硬貨3枚を同時に投げる試行を40回続けて行うとき，2枚が表で1枚が裏になる回数の平均を求めよ。技

［解］　3枚のうち2枚が表になる確率は　$\dfrac{3}{2^3}=\dfrac{3}{8}$

40回のうち，2枚が表で1枚が裏になる回数をX回とすると，Xは二項分布$B\left(40,\ \dfrac{3}{8}\right)$に従う。

したがって，Xの平均は　$E(X)=40\cdot\dfrac{3}{8}=\mathbf{15}$ **(回)**

6 赤球2個と白球6個が入っている袋がある。この袋から1個の球を取り出して色を調べてもとに戻す。これを72回くり返したとき，赤球の出る回数をXとする。Xの平均，分散，標準偏差を求めよ。技

［解］　この袋から赤球を取り出す確率は　$\dfrac{1}{4}$

Xは二項分布$B\left(72,\ \dfrac{1}{4}\right)$に従う。したがって，$X$の平均と標準偏差は

$E(X)=72\cdot\dfrac{1}{4}=\mathbf{18}$

$V(X)=72\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\mathbf{\dfrac{27}{2}}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{27}{2}}=\mathbf{\dfrac{3\sqrt{6}}{2}}$

7 原点Oから出発して数直線上を動く点Pがある。1枚の硬貨を投げて，表が出ればPは＋4だけ進み，裏が出ればPは－2だけ進むという。硬貨を5回投げるとき，次の問に答えよ。技

(1)　表の出る回数Xの平均と分散を求めよ。

［解］　硬貨を投げて，表の出る確率は　$\dfrac{1}{2}$

Xは二項分布$B\left(5,\ \dfrac{1}{2}\right)$に従う。したがって，$X$の平均と分散は

$E(X)=5\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{\dfrac{5}{2}}$

$V(X)=5\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{\dfrac{5}{4}}$

(2)　点Pの座標Yの平均と分散を求めよ。

［解］　$Y=4X-2(5-X)=6X-10$

となるから

$E(Y)=6E(X)-10=6\cdot\dfrac{5}{2}-10=\mathbf{5}$

$V(Y)=6^2V(X)=36\cdot\dfrac{5}{4}=\mathbf{45}$