2章・1節　平面上のベクトル

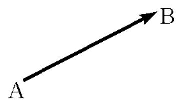
組	番号	名　　前

①　ベクトルの意味

②　ベクトルの加法・減法・実数倍

1　次の$\boxed{\quad}$をうめよ。知

(1)　右の図の線分 AB のように，向きのついた線分を$\boxed{\quad}$という。このとき，A を$\boxed{\quad}$，B を$\boxed{\quad}$という。



(2)　有向線分について，その位置を問題にせず，向きと長さだけに着目したものを$\boxed{\quad}$といい，有向線分AB の表すベクトルを$\boxed{\quad}$と書く。

また，有向線分AB の長さをベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$の$\boxed{\quad}$といい，$\boxed{\quad}$で表す。

(3)　2 つのベクトルの$\boxed{\quad}$と$\boxed{\quad}$が一致するとき，これらのベクトルは等しいという。

(4)　ベクトル$\vec{a}$と大きさが同じで，向きが反対のベクトルを$\vec{a}$の$\boxed{\quad}$といい，$\boxed{\quad}$で表す。

(5)　始点と終点の一致したベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$を$\boxed{\quad}$といい，$\boxed{\quad}$で表す。

(6)　大きさが 1 のベクトルを$\boxed{\quad}$という。

$\vec{a}\neq\vec{0}$のとき，$\vec{a}$と同じ向きの単位ベクトルを$\vec{e}$とすると，

$\vec{e}=\boxed{\quad}$である。

(7)　$\vec{0}$でない 2 つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$が同じ向きまたは反対向きであるとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$は$\boxed{\quad}$であるといい，$\boxed{\quad}$と書く。

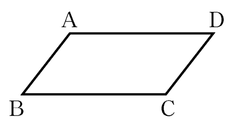
また，次のことが成り立つ。

$\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\boxed{\quad}$となる実数$k\neq 0$がある

(8)　平面上の 2 つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$において，$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$かつ$\vec{a}$と$\vec{b}$が平行でないとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$は$\boxed{\quad}$であるという。このとき，次のことが成り立つ。

$k\vec{a}+l\vec{b}=k'\vec{a}+l'\vec{b}\iff\boxed{\quad}$

2　右の図の平行四辺形ABCD の頂点を始点，終点とするベクトルを考える。知



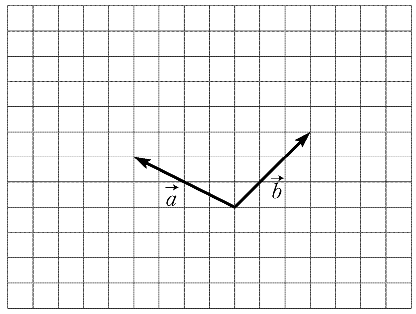
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と等しいベクトルを答えよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と大きさが等しいベクトルを答えよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$の逆ベクトルを答えよ。

3　図のようにベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。技

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(3)　$2\vec{a}+\vec{b}$　　(4)　$-\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

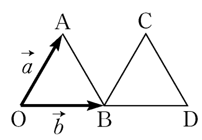


4　次の式を満たす$\vec{x}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ。技

$4(2\vec{x}+\vec{a})-2(\vec{x}-4\vec{b})=6\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{x}$

5　$\vec{0}$ではなく，かつ平行でない 2 つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$があり，$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-\vec{b}$とする。$\vec{a}-\vec{b}$と$\vec{p}+t\vec{q}$が平行になるように，tの値を定めよ。技

6　右の図のように，同じ大きさの正三角形を 2 つつなげてできる図形において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とする。次のベクトルを$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表せ。技



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

2章・1節　平面上のベクトル

③　ベクトルの成分

組	番号	名　　前

1　次の$\boxed{\quad\quad}$をうめよ。$\boxed{\text{知}}$

(1)　座標平面上で，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ と表す方法を$\vec{a}$の $\boxed{\quad\quad\quad}$ という。このとき，a_1 を$\vec{a}$の $\boxed{\quad\quad}$，a_2 を$\vec{a}$の $\boxed{\quad\quad}$ という。

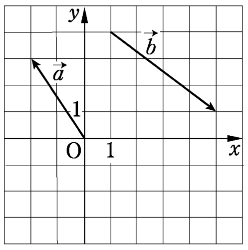
(2)　また，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，$|\vec{a}|=\boxed{\quad\quad\quad\quad}$ となる。

(3)　2点A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\boxed{\quad\quad},\boxed{\quad\quad}\right)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

2　右の図のベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$ を成分表示し，その大きさを求めよ。$\boxed{\text{技}}$



3　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$，$\vec{c}=(6,\ -8)$ とするとき，次の問に答えよ。$\boxed{\text{技}}$

(1)　$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

(2)　$\vec{c}$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ と$\vec{c}$が平行になるような実数 t の値を求めよ。

4　平面上に3点A$(-1,\ 1)$，B$(3,\ 0)$，C$(5,\ 4)$ がある。$\boxed{\text{技}}$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示し，その大きさを求めよ。

(2)　3点A，B，Cを頂点にもつ平行四辺形の残りの頂点の座標をすべて求めよ。

5　$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ とするとき，次の問に答えよ。$\boxed{\text{技}}$

(1)　次の式を満たすベクトル$\vec{x}$の成分表示を求めよ。

$$5(\vec{x}+2\vec{a})=3\vec{x}+6\vec{b}$$

(2)　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とする。$|\vec{p}|$ の最小値を求めよ。また，そのときの t の値を求めよ。

組	番号	名　　前

2 章・1 節　平面上のベクトル

④　ベクトルの内積

1　次の$\boxed{\quad\quad}$をうめよ。$\boxed{\text{知}}$

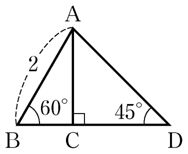
(1)　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，点 O を始点として，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような点A，B をとる。このとき，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ を$\vec{a}$ と$\vec{b}$ の $\boxed{\quad\quad}$ という。($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$)

(2)　$\boxed{\quad\quad\quad}$ を$\vec{a}$ と$\vec{b}$ の内積といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表す。

(3)　$\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}$ と$\vec{b}$ は $\boxed{\quad\quad}$ であるといい，記号では $\boxed{\quad\quad}$ と書く。このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\quad}$ となる。

(4)　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，その内積を成分で表すと，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\quad\quad\quad\quad}$ である。

2　右の図のように，2 つの直角三角形を並べた図形において，次の内積を求めよ。$\boxed{\text{技}}$



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

3　$\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(-2,\ -1)$ とするとき，次の問に答えよ。$\boxed{\text{技}}$

(1)　ベクトル $\vec{a}$ と$\vec{b}$ の内積，および $\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(2)　$\vec{a}$ に垂直な単位ベクトル$\vec{e}$ を求めよ。

4　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角が 120° のとき，次の問に答えよ。$\boxed{\text{技}}$

(1)　$\vec{a}$ と$\vec{b}$ の内積を求めよ。

(2)　$|2\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めよ。

(3)　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

5　$|\vec{a}|=2$, $|2\vec{a}+\vec{b}|=8$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{4}$ のとき，次の問に答えよ。$\boxed{\text{技}}$

(1)　$|\vec{b}|$ を求めよ。

(2)　$\vec{a}$ と$\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるような実数 t の値を求めよ。

6　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトルについて，$|\vec{a}-3\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$ であるとき，次の問に答えよ。$\boxed{\text{技}}$

(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(2)　$k|\vec{a}|=|\vec{b}|$ とする。$\vec{a}\perp\vec{b}$ となるような定数k の値を求めよ。

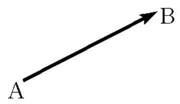
2章・1節　平面上のベクトル

組	番号	名　前

①　ベクトルの意味
②　ベクトルの加法・減法・実数倍

1　次の$\boxed{}$をうめよ。知

(1)　右の図の線分 AB のように，向きのついた線分を$\boxed{\text{有向線分}}$という。このとき，A を$\boxed{\text{始点}}$，B を$\boxed{\text{終点}}$という。



(2)　有向線分について，その位置を問題にせず，向きと長さだけに着目したものを$\boxed{\text{ベクトル}}$といい，有向線分AB の表すベクトルを$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$と書く。

また，有向線分AB の長さをベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$の$\boxed{\text{大きさ}}$といい，$\boxed{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$で表す。

(3)　2 つのベクトルの$\boxed{\text{向き}}$と$\boxed{\text{大きさ}}$が一致するとき，これらのベクトルは等しいという。

(4)　ベクトル$\vec{a}$と大きさが同じで，向きが反対のベクトルを$\vec{a}$の$\boxed{\text{逆ベクトル}}$といい，$\boxed{-\vec{a}}$で表す。

(5)　始点と終点の一致したベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$を$\boxed{\text{零ベクトル}}$といい，$\boxed{\vec{0}}$で表す。

(6)　大きさが 1 のベクトルを$\boxed{\text{単位ベクトル}}$という。

$\vec{a}\neq\vec{0}$のとき，$\vec{a}$と同じ向きの単位ベクトルを$\vec{e}$とすると，

$\vec{e}=\boxed{\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$である。

(7)　$\vec{0}$でない 2 つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$が同じ向きまたは反対向きであるとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$は$\boxed{\text{平行}}$であるといい，$\boxed{\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}}$と書く。

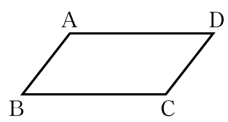
また，次のことが成り立つ。

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \boxed{\vec{b}=k\vec{a}}$となる実数$k\neq0$がある

(8)　平面上の 2 つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$において，$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$かつ$\vec{a}$と$\vec{b}$が平行でないとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$は$\boxed{\text{1次独立}}$であるという。このとき，次のことが成り立つ。

$k\vec{a}+l\vec{b}=k'\vec{a}+l'\vec{b} \iff \boxed{k=k',\ l=l'}$

2　右の図の平行四辺形ABCD の頂点を始点，終点とするベクトルを考える。知



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と等しいベクトルを答えよ。

［解］　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と大きさが等しいベクトルを答えよ。

［解］　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

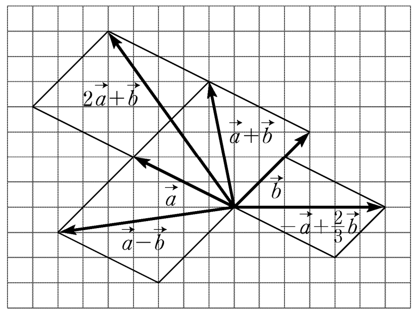
(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$の逆ベクトルを答えよ。

［解］　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

3　図のようにベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。技

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(3)　$2\vec{a}+\vec{b}$　　(4)　$-\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

［解］



4　次の式を満たす$\vec{x}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ。技

$$4(2\vec{x}+\vec{a})-2(\vec{x}-4\vec{b})=6\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{x}$$

［解］
$$4(2\vec{x}+\vec{a})-2(\vec{x}-4\vec{b})=6\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{x}$$
$$8\vec{x}+4\vec{a}-2\vec{x}+8\vec{b}=6\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{x}$$
$$8\vec{x}-2\vec{x}-4\vec{x}=6\vec{a}+4\vec{b}-4\vec{a}-8\vec{b}$$
$$(8-2-4)\vec{x}=(6-4)\vec{a}+(4-8)\vec{b}$$
$$2\vec{x}=2\vec{a}-4\vec{b}$$
$$\boldsymbol{\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}}$$

5　$\vec{0}$ではなく，かつ平行でない 2 つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$があり，$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-\vec{b}$とする。$\vec{a}-\vec{b}$と$\vec{p}+t\vec{q}$が平行になるように，tの値を定めよ。技

［解］　$\vec{p}+t\vec{q}=(\vec{a}+\vec{b})+t(2\vec{a}-\vec{b})=(1+2t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$(\vec{a}-\vec{b})\,/\!/\,(\vec{p}+t\vec{q})$のとき，$\vec{p}+t\vec{q}=k(\vec{a}-\vec{b})$　(kは実数)と表される。

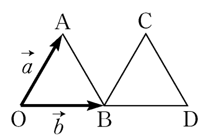
よって　　$(1+2t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}=k\vec{a}-k\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$は$\vec{0}$ではなく，かつ平行でないから

$1+2t=k$,　$1-t=-k$

これを解いて　　$k=-3$,　$\boldsymbol{t=-2}$

6　右の図のように，同じ大きさの正三角形を 2 つつなげてできる図形において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とする。次のベクトルを$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表せ。技



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

［解］　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

［解］　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{a}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

［解］　$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boldsymbol{\vec{a}-2\vec{b}}$

2章・1節　平面上のベクトル

③　ベクトルの成分

組	番号	名　　前

1　次の$\boxed{}$をうめよ。知

(1)　座標平面上で，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ と表す方法を$\vec{a}$の $\boxed{\text{成分表示}}$ という。このとき，a_1 を$\vec{a}$の $\boxed{x\text{成分}}$，a_2 を$\vec{a}$の $\boxed{y\text{成分}}$ という。

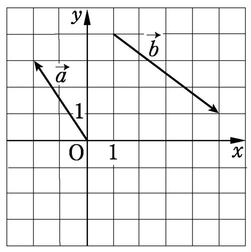
(2)　また，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，　$|\vec{a}|=\boxed{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}}$ となる。

(3)　2 点$A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ のとき

$\overrightarrow{AB}=\left(\boxed{b_1-a_1},\ \boxed{b_2-a_2}\right)$

$|\overrightarrow{AB}|=\boxed{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$

2　右の図のベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$ を成分表示し，その大きさを求めよ。技



［解］　$\vec{a}$ の成分表示は

$\boldsymbol{\vec{a}=(-2,\ 3)}$

$\vec{a}$ の大きさは

$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$

また，$\vec{b}$ の始点が原点と一致するように平行移動して　　$\boldsymbol{\vec{b}=(4,\ -3)}$

$\vec{b}$ の大きさは　　$|\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\boldsymbol{5}$

3　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$，$\vec{c}=(6,\ -8)$ とするとき，次の問に答えよ。技

(1)　$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

［解］　　$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

であるから，求める単位ベクトルは

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{a}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

(2)　$\vec{c}$ を$k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

［解］　　$k\vec{a}+l\vec{b}=k(2,\ -1)+l(-1,\ 3)$

$=(2k-l,\ -k+3l)$

これが$\vec{c}=(6,\ -8)$ に等しいから

$2k-l=6,\ \ -k+3l=-8$

これを解いて　　$k=2,\ l=-2$

ゆえに　　$\boldsymbol{\vec{c}=2\vec{a}-2\vec{b}}$

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ と$\vec{c}$ が平行になるような実数 t の値を求めよ。

［解］　$(\vec{a}+t\vec{b})/\!/\vec{c}$ であるから，m を実数として

$\vec{a}+t\vec{b}=m\vec{c}$

と表される。

よって

$(2,\ -1)+t(-1,\ 3)=m(6,\ -8)$

$(2-t,\ -1+3t)=(6m\ \ -8m)$

したがって　　$2-t=6m$，$-1+3t=-8m$

これを解いて　　$m=\dfrac{1}{2}$，$\boldsymbol{t=-1}$

4　平面上に 3 点$A(-1,\ 1)$，$B(3,\ 0)$，$C(5,\ 4)$ がある。技

(1)　$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，その大きさを求めよ。

［解］　$\overrightarrow{AB}$ の成分表示は　　$\overrightarrow{AB}=(3-(-1),\ 0-1)=\boldsymbol{(4,\ -1)}$

$\overrightarrow{AB}$ の大きさは　　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{17}}$

(2)　3 点A，B，C を頂点にもつ平行四辺形の残りの頂点の座標をすべて求めよ。

［解］　残りの頂点を$D(x,\ y)$ とする。

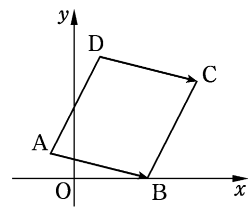
（ⅰ）　平行四辺形ABCD のとき$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ であるから

(1)より　　$(4,\ -1)=(5-x,\ 4-y)$

よって　　$4=5-x,\ -1=4-y$

したがって　　$x=1,\ y=5$

ゆえに　　$D(1,\ 5)$



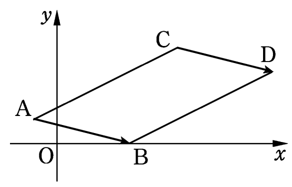
（ⅱ）平行四辺形ABDC のとき，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ であるから

(1)より　　$(4,\ -1)=(x-5,\ y-4)$

よって　　$4=x-5,\ -1=y-4$

したがって　　$x=9,\ \ y=3$

ゆえに　　$D(9,\ 3)$



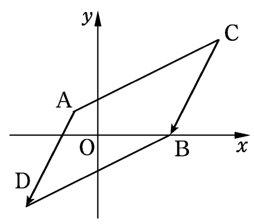
（ⅲ）平行四辺形ADBC のとき$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ であるから

$(x-(-1),\ y-1)=(3-5,\ 0-4)$

よって　　$x+1=-2,\ \ y-1=-4$

したがって　　$x=-3,\ y=-3$

ゆえに　　$D(-3,\ -3)$



（ⅰ)，（ⅱ)，(ⅲ)より，求める頂点の座標は

$\boldsymbol{(1,5),\ (9,3),\ (-3,\ -3)}$

5　$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ とするとき，次の問に答えよ。技

(1)　次の式を満たすベクトル$\vec{x}$ の成分表示を求めよ。

$5(\vec{x}+2\vec{a})=3\vec{x}+6\vec{b}$

［解］　$5(\vec{x}+2\vec{a})=3\vec{x}+6\vec{b}$

よって　　$2\vec{x}=-10\vec{a}+6\vec{b}$

したがって

$\vec{x}=-5\vec{a}+3\vec{b}=-5(1,3)+3(3,4)=(-5,\ -15)+(9,12)=(4,\ -3)$

ゆえに　　$\boldsymbol{\vec{x}=(4,\ -3)}$

(2)　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とする。$|\vec{p}|$ の最小値を求めよ。また，そのときのt の値を求めよ。

［解］　　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=(1-t)(1,\ 3)+t(3,\ 4)=(1+2t,\ 3+t)$

$|\vec{p}|^2=(1+2t)^2+(3+t)^2$

$=5t^2+10t+10$

$=5(t+1)^2+5$

よって，$|\vec{p}|^2$ は $t=-1$ のとき，最小値 5 をとる。

$|\vec{p}|\geqq 0$ であるから，$|\vec{p}|$ は $\boldsymbol{t=-1}$ **のとき，最小値**$\boldsymbol{\sqrt{5}}$ をとる。

2 章・1 節　平面上のベクトル

④　ベクトルの内積

組	番号	名　　前

1　次の$\boxed{}$をうめよ。知

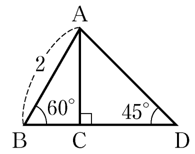
(1)　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，点 O を始点として，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような点A，B をとる。このとき，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ を$\vec{a}$ と$\vec{b}$ の $\boxed{\text{なす角}}$ という。$(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

(2)　$\boxed{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$ を$\vec{a}$ と$\vec{b}$ の内積といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表す。

(3)　$\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}$ と$\vec{b}$ は $\boxed{\text{垂直}}$ であるといい，記号では $\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}}$ と書く。このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{0}$ となる。

(4)　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，その内積を成分で表すと，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{a_1b_1+a_2b_2}$ である。

2　右の図のように，2 つの直角三角形を並べた図形において，次の内積を求めよ。技



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

［解］　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\times\sqrt{3}\times\cos30^\circ=\mathbf{3}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

［解］　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\times1\times\cos120^\circ=\mathbf{-1}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

［解］　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\mathbf{0}$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

［解］　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\sqrt{6}\times1\times\cos135^\circ=\mathbf{-\sqrt{3}}$

3　$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ -1)$ とするとき，次の問に答えよ。技

(1)　ベクトル $\vec{a}$ と$\vec{b}$ の内積，および $\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

［解］　ベクトル$\vec{a}$ と$\vec{b}$ の内積は　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+3\times(-1)=\mathbf{-5}$

$\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角は

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\boldsymbol{\theta=135^\circ}$

(2)　$\vec{a}$ に垂直な単位ベクトル$\vec{e}$ を求めよ。

［解］　$\vec{e}=(x,\ y)$ とすると

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$ であるから　　$x+3y=0$　　……①

$|\vec{e}|=1$ より，$|\vec{e}|^2=1$ であるから　　$x^2+y^2=1$　　……②

①，②からx を消去して　　$y^2=\dfrac{1}{10}$

したがって　　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$y=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ のとき　　$x=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$y=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ のとき　　$x=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

よって，求めるベクトル$\vec{e}$ は

$$\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},\ -\frac{\sqrt{10}}{10}\right),\ \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

4　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角が 120° のとき，次の問に答えよ。技

(1)　$\vec{a}$ と$\vec{b}$ の内積を求めよ。

［解］　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ=3\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-6}$

(2)　$|2\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めよ。

［解］　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times3^2+4\times(-6)+4^2=28$

$|2\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ であるから　　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{28}=\mathbf{2\sqrt{7}}$

(3)　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

［解］　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=3^2+2t\times(-6)+t^2\times4^2$

$=16t^2-12t+9$

$=16\left(t-\dfrac{3}{8}\right)^2+\dfrac{27}{4}$

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $\boldsymbol{t=\dfrac{3}{8}}$ のとき，最小値 $\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\mathbf{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ をとる。

5　$|\vec{a}|=2$，$|2\vec{a}+\vec{b}|=8$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{4}$ のとき，次の問に答えよ。技

(1)　$|\vec{b}|$ を求めよ。

［解］　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ であるから　　$8^2=4\times2^2+4\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)+|\vec{b}|^2$

よって　　$|\vec{b}|^2=49$

$|\vec{b}|\geqq0$ であるから　　$|\vec{b}|=\mathbf{7}$

(2)　$\vec{a}$ と$\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるような実数 t の値を求めよ。

［解］　$\vec{a}$ と$\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直であるから　　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0$

したがって　　$|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ここで，$|\vec{a}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{4}$ であるから　　$2^2-\dfrac{1}{4}t=0$

よって　　$\boldsymbol{t=16}$

6　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトルについて，$|\vec{a}-3\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$ であるとき，次の問に答えよ。技

(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

［解］　$|\vec{a}-3\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$　より

$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=|2\vec{a}+\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$10\vec{a}\cdot\vec{b}=-3|\vec{a}|^2+8|\vec{b}|^2$　　……①

ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ であるから，$10\vec{a}\cdot\vec{b}=5|\vec{a}|^2$　　すなわち　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2$

このとき　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

(2)　$k|\vec{a}|=|\vec{b}|$ とする。$\vec{a}\perp\vec{b}$ となるような定数k の値を求めよ。

［解］　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから，(1)の①より　$-3|\vec{a}|^2+8|\vec{b}|^2=0$

よって　　$(-3+8k^2)|\vec{a}|^2=0$

$|\vec{a}|\neq0$ であるから　　$-3+8k^2=0$

ここで，$|\vec{b}|=k|\vec{a}|$ で，$|\vec{a}|>0$，$|\vec{b}|>0$ であるから，$k>0$

ゆえに　　$\boldsymbol{k=\dfrac{\sqrt{6}}{4}}$