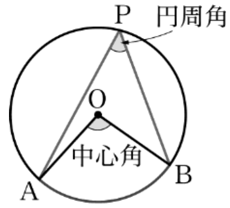
2 節　円の性質

1　円周角の定理

ねらい　中学校ですでに学んだ円周角の定理とその逆について復習します。

右の図のように, 円 O の円周上の点を P とするとき, ∠AOB を弧 AB に対する中心角，∠APB を弧 AB に対する円周角という。



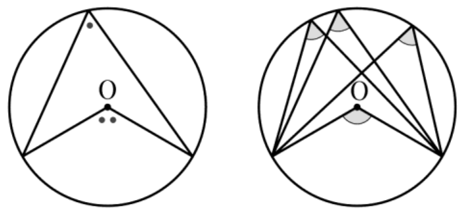
中心角と円周角については，次の定理が成り立つ。

円周角の定理

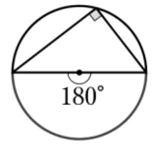
１つの弧に対して

[1]　円周角の大きさは，中心角の半分である。

[2]　円周角の大きさはすべて等しい。

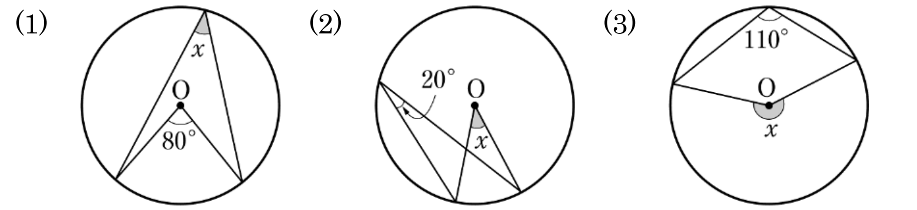


◀半円の弧に対する円周角は 90°



●円周角の定理を利用して，角の大きさを求めてみよう。

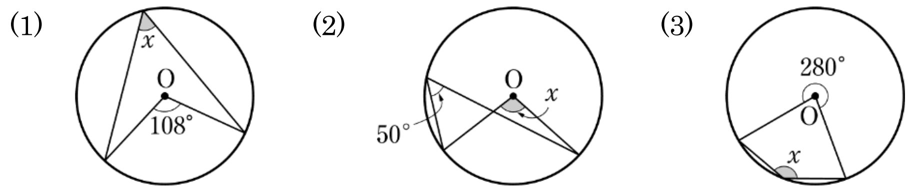
例 1



$x=\frac{1}{2}\times 80°=40°$　　$x=2\times 20°=40°$　　$x=2\times 110°=220°$

問 1　次の図で，x の値を求めなさい。

→p.65 復習問題1



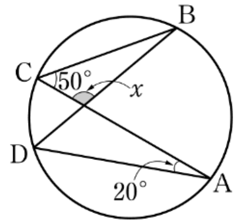
●円周角の定理を利用して，いろいろな角の大きさを求めてみよう。

例 2　右の図で，弧 CD に対する円周角であるから

$\angle\mathrm{CBD} = \angle\mathrm{CAD} = 20^\circ$

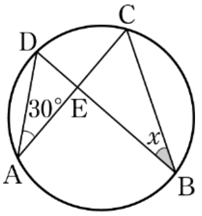
三角形の内角の和は 180° であるから

$x = 180^\circ - (50^\circ + 20^\circ) = 110^\circ$

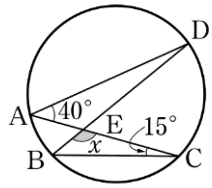


問 2　次の図で，x の値を求めなさい。

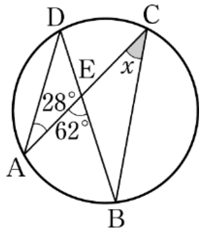
(1)



(2)



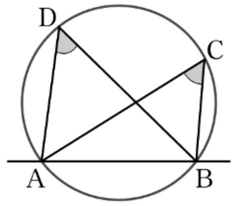
(3)



円周角の定理の逆

円周角について，次のことも成り立つ。

> 円周角の定理の逆
>
> 2 点 C, D が直線 AB に対して同じ側にあり
>
> $\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{ADB}$
>
> ならば，4 点 A, B, C, D は同一円周上にある。



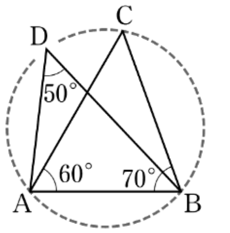
● 4 点が同一円周上にあるかどうか調べてみよう。

例 3　右の図で　$\angle\mathrm{ACB} = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$

よって，2 点 C, D が直線 AB に対して同じ側にあり

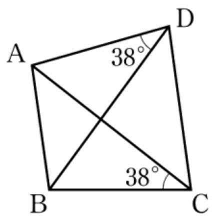
$\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{ADB}$

であるから，4 点 A, B, C, D は同一円周上にある。

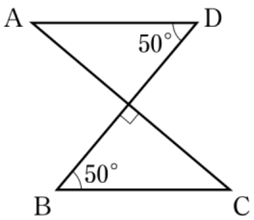


問 3　次の図のうち，4 点 A, B, C, D が同一円周上にあるものはどれですか。

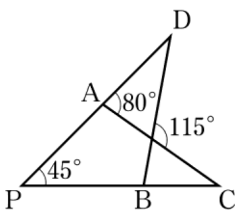
①



②



③

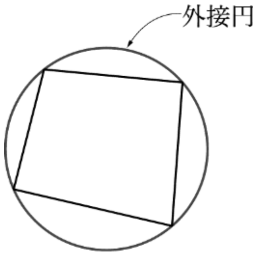


2　円に内接する四角形

ねらい　四角形が円に内接しているときには，どのような性質が成り立っているのでしょうか。円周角の定理を利用して考えてみます。

円に内接する四角形の性質

右の図のように，四角形の 4 つの頂点がすべて 1 つの円の周上にあるとき，この四角形は円に**内接**するといい，その円をその四角形の**外接円**という。



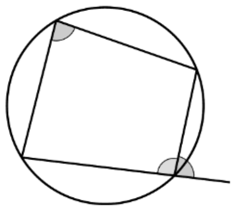
円に内接する四角形について，次のことが成り立つ。

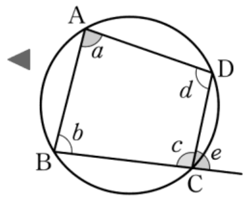
円に内接する四角形

円に内接する四角形では

[1]　対角の和は 180° である。

[2]　外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。



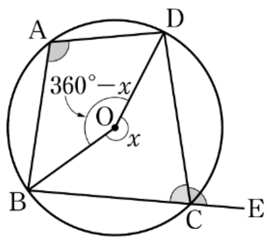


$a+c=180^\circ$

$b+d=180^\circ$

$a=e$

証明　右の図のように，四角形 ABCD が円に内接しているとき，弧 BCD に対する中心角を x とすると，弧 BAD に対する中心角は $360^\circ-x$ である。



[1]　円周角の定理により

$$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(360^\circ-x)=180^\circ$$

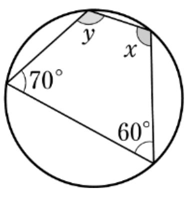
[2]　[1]より　　$\angle\mathrm{A}=180^\circ-\angle\mathrm{BCD}$

また，$\angle\mathrm{DCE}=180^\circ-\angle\mathrm{BCD}$ であるから

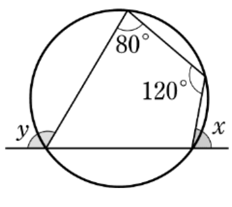
$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{DCE}$

問 4　次の図で，x，y の値を求めなさい。　➜p.65 復習問題②

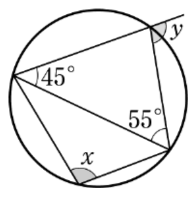
(1)



(2)



(3)



四角形が円に内接する条件

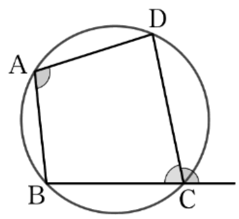
前ページの定理は，その逆も成り立つ。

四角形が円に内接する条件

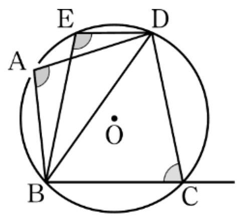
次の[1]，[2]のいずれかが成り立つ四角形は，円に内接する。

[1] 1組の対角の和が 180° である。

[2] 1つの外角がそれと隣り合う内角の対角に等しい。



証明 [1] $\angle A + \angle C = 180^\circ$ である四角形 ABCD において，$\angle E$ を，$\triangle BCD$ の外接円 O における弧 BCD に対する円周角とする。



四角形 BCDE が円 O に内接しているから

$\angle E + \angle C = 180^\circ$ ……①

仮定より $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ……②

①，②より $\angle E = \angle A$

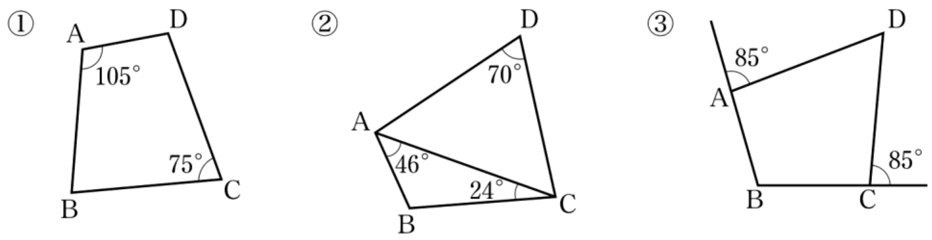
したがって，円周角の定理の逆により，点 A は円 O の周上にある。

よって，四角形 ABCD は円に内接する。

[2] 四角形 ABCD において，$\angle C$ の外角が $\angle A$ に等しいとすると，$180^\circ - \angle C = \angle A$ であるから，$\angle A + \angle C = 180^\circ$ が成り立つ。

よって，[1]より四角形 ABCD は円に内接する。

問 5 次の図の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれですか。



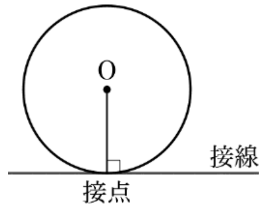
3　円と直線

$\boxed{\text{ねらい}}$　円の接線の性質を利用して，接線と関連する線分の長さを求めることを学びます。

円の接線

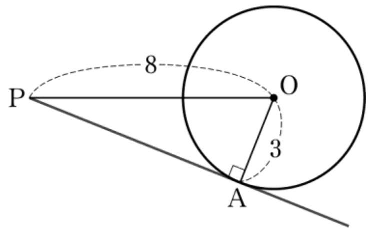
右の図のように，直線と円がただ 1 点を共有するとき，この直線は円に**接する**といい，この直線を円の**接線**，その共有点を**接点**という。

円の接線は，接点を通る半径に垂直である。



●三平方の定理を用いて，円の接線の長さを求めてみよう。

例 4　右の図で，PA は円 O の接線であり，A はその接点である。円 O の半径が 3 で，OP = 8 のとき，PA の長さを求めてみよう。円の接線は，接点を通る半径に垂直であるから



$$\mathrm{OA} \perp \mathrm{PA}$$

したがって，$\Delta\mathrm{OPA}$ は直角三角形である。

➜巻末 数学Ａに関連する中学校で学んだこと ⑭ 三平方の定理とその逆

三平方の定理により

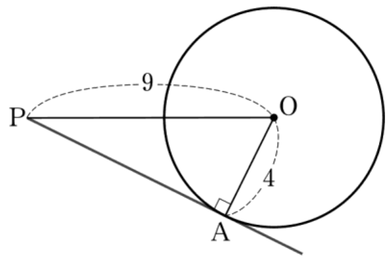
$$\mathrm{PA}^2 + \mathrm{OA}^2 = \mathrm{OP}^2$$

$$\mathrm{PA}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{OA}^2 = 8^2 - 3^2 = 55$$

$\mathrm{PA} > 0$ より

$$\mathrm{PA} = \sqrt{55}$$

問 6　右の図で，PA は円 O の接線であり，A はその接点である。PA の長さを求めなさい。

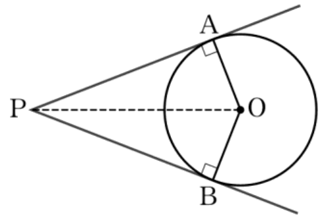


円外の１点からの接線

どのような円に対しても，円外の 1 点から 2 本の接線が引ける。これらの接線について，次のことが成り立つ。

> 円外の 1 点からの接線
> 円外の 1 点からその円に 2 本の接線を引くと，その点から 2 つの接点までの長さは等しい。

証明 円 O の外部の点 P から引いた 2 本の接線の接点をそれぞれ A, B とすると，△PAO と△PBO において



$\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$ ……①

$OA = OB$ ……②

PO は共通 ……③

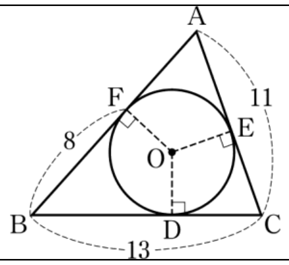
①，②，③より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから

➜巻末 数学Aに関連する中学校で学んだこと ⑪ 直角三角形の合同条件

$\triangle PAO \equiv \triangle PBO$

よって $PA = PB$

例題 1 右の図で，円 O は△ABC の内接円で，D, E, F はその接点である。AF の長さを求めなさい。



◀ $AF = AE$
$BD = BF$
$CE = CD$

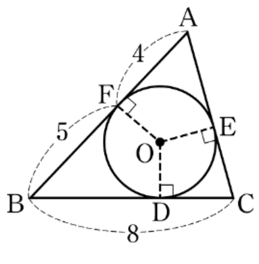
解 $BD = BF = 8$ であるから $CD = 13 - 8 = 5$

$CE = CD = 5$ であるから $AE = 11 - 5 = 6$

$AF = AE$ であるから $AF = \mathbf{6}$

問 7 右の図で，円 O は△ABC の内接円で，D, E, F はその接点である。AC の長さを求めなさい。

➜p.65 復習問題3



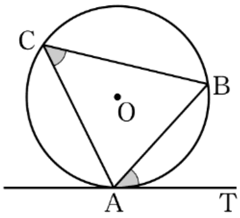
4　接線と弦のつくる角

$\boxed{\text{ねらい}}$　円の接線と弦がつくる角と円周角との間に成り立つ関係を利用して，いろいろな角の大きさを求めることを学びます。

円の接線と弦のつくる角について，次の定理が成り立つ。

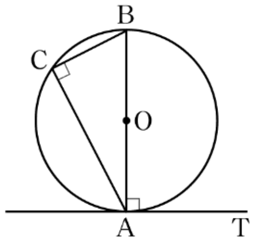
接線と弦のつくる角

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



◀$\angle BAT = \angle ACB$

$\boxed{\text{証明}}$　上の図のように，点 A における円 O の接線を AT, A を通る弦を AB として，$\angle BAT = \angle ACB$ が成り立つことを証明する。

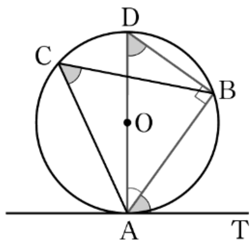


㋐　$\angle BAT$ が直角の場合

AB が円 O の直径であるから，$\angle ACB = 90^\circ$ となる。

したがって　　$\angle BAT = \angle ACB$

㋑　$\angle BAT$ が鋭角の場合



直径 AD を引くと，$\angle DAT = 90^\circ$ であるから

$\angle BAT = 90^\circ - \angle BAD$　　……①

AD は直径であるから，$\angle ABD = 90^\circ$ より

$\angle ADB = 90^\circ - \angle BAD$　　……②

①，②より　　$\angle BAT = \angle ADB$

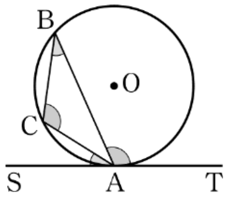
円周角の定理により　　$\angle ADB = \angle ACB$

したがって　　$\angle BAT = \angle ACB$

$\angle BAT$ が鈍角のとき，右の図において $\angle CAS$ が鋭角となるから

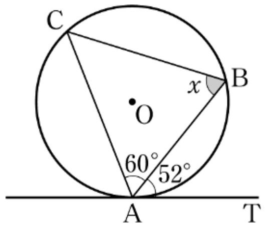
$\angle CAS = \angle ABC$

これより，$\angle BAT = \angle ACB$ が示される。

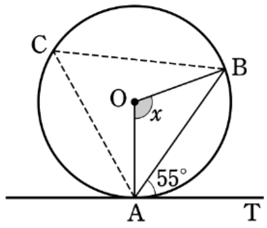


例題 2 次の図で，AT は円 O の接線であり，A はその接点である。
x の値を求めなさい。

(1)



(2)



解 (1) 接線と弦のつくる角の定理により

$\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{BAT} = 52^\circ$

三角形の内角の和は 180° であるから

$x = 180^\circ - (60^\circ + 52^\circ) = \mathbf{68^\circ}$

(2) 接線と弦のつくる角の定理により

$\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{BAT} = 55^\circ$

円周角の定理により

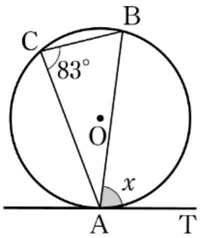
$\angle\mathrm{AOB} = 2\angle\mathrm{ACB}$

よって

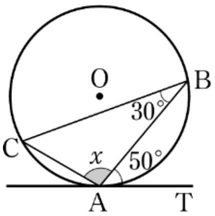
$x = 2 \times 55^\circ = \mathbf{110^\circ}$

問 8 次の図で，AT は円 O の接線であり，A はその接点である。 ➔p.65 復習問題4
x の値を求めなさい。

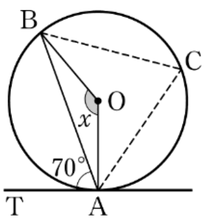
(1)



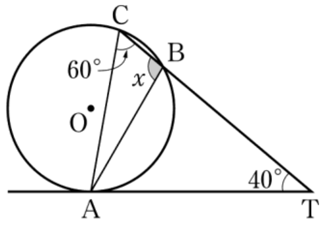
(2)



(3)



(4)



5　方べきの定理

ねらい　円と２本の直線がつくる線分の長さの関係を学びます。

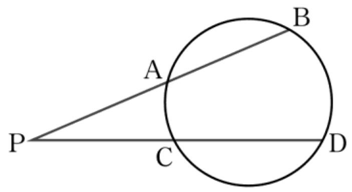
方べきの定理(1)

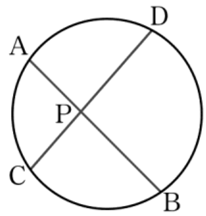
円周上にない点Ｐを通る２本の直線が円と交わるとき，次の定理が成り立つ。

方べきの定理(1)

円周上にない点Ｐから，この円と２点Ａ，Ｂで交わる直線と，２点Ｃ，Ｄで交わる直線を引くと，次の式が成り立つ。

$$\mathbf{PA \times PB = PC \times PD}$$





証明　図１の△PACと△PDBにおいて，円に内接する四角形の定理により

$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{PDB}$,　　$\angle \mathrm{PCA} = \angle \mathrm{PBD}$

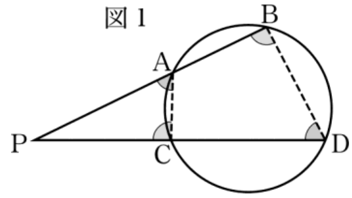
であるから　　△PAC∽△PDB

よって　　PA : PD ＝ PC : PB

すなわち　　PA × PB ＝ PC × PD

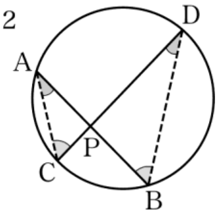
図２のように，点Ｐが円の内部にあるときにも，円周角の定理を用いて，同様に証明できる。

図１



◀三角形の相似条件「２組の角がそれぞれ等しい」を用いる。

図２



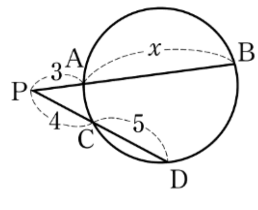
●方べきの定理(1)を用いて線分の長さを求めてみよう。

例５　右の図で，方べきの定理により

$$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \times \mathrm{PD}$$

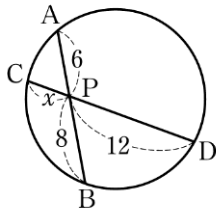
よって　　$3 \times (3 + x) = 4 \times (4 + 5)$

これを解いて　　$x = 9$

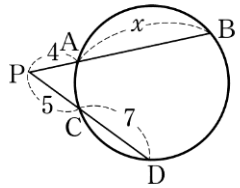


$\boxed{\text{問 9}}$ 次の図で，x の値を求めなさい。 ➜p.65 復習問題5

(1)



(2)



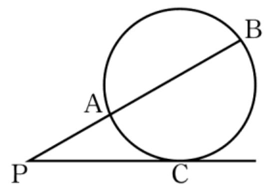
方べきの定理(2)

円の外部の点 P を通る 2 本の直線のうち，1 本が円と交わり，もう 1 本が円と接する場合，次の定理が成り立つ。

方べきの定理(2)

円の外部の点 P から，この円と 2 点 A，B で交わる直線と，この円と点 C で接する接線を引くと，次の式が成り立つ。

$$\mathbf{PC^2 = PA \times PB}$$

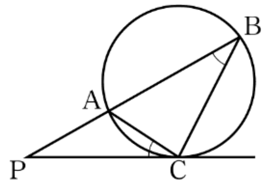


$\boxed{\text{証明}}$ 点 A と C，点 B と C を結ぶと，△PCA と△PBC において，接線と弦のつくる角の定理により，∠PCA = ∠PBC であり，∠P は共通であるから

△PCA∽△PBC

よって　PC:PB=PA:PC

すなわち　$PC^2 = PA \times PB$



◀三角形の相似条件「2 組の角がそれぞれ等しい」を用いる。

●方べきの定理(2)を用いて線分の長さを求めてみよう。

$\boxed{\text{例 6}}$ 右の図で，PC は接線，C はその接点である。

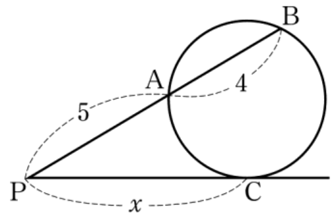
方べきの定理により

$$PC^2 = PA \times PB$$

よって　$x^2 = 5 \times (5+4)$

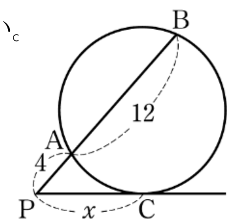
$x^2 = 45$

$x > 0$ より　$x = 3\sqrt{5}$



◀PB = PA + AB

$\boxed{\text{問 10}}$ 右の図で，PC は接線，C はその接点である。x の値を求めなさい。



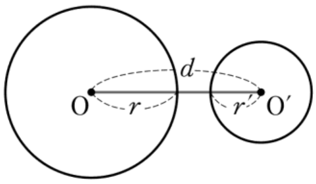
6 2つの円

ねらい 2つの円の位置関係と，2つの円に共通する接線の数について学びます。

2つの円の位置関係

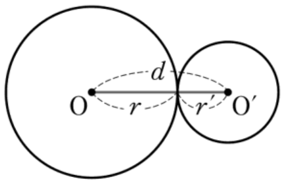
2つの円の位置関係は，それらの円の半径 r, r' と中心間の距離 d との関係で定まり，次の図に示すような5通りの場合が考えられる。ただし，$r > r'$ とする。

㋐ 離れている



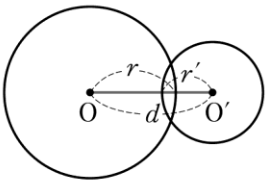
$d > r + r'$

㋑ 外接する



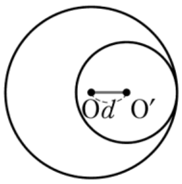
$d = r + r'$

㋒ 2点で交わる



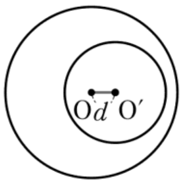
$r - r' < d < r + r'$

㋓ 内接する



$d = r - r'$

㋔ 一方が他方の中にある



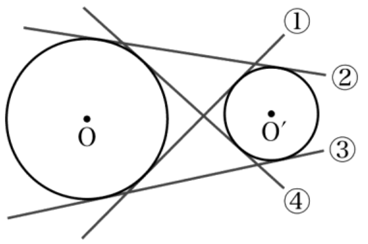
$d < r - r'$

共通接線

1本の直線が2つの円の接線となるとき，このような接線を2つの円の**共通接線**という。

●共通接線の数を調べてみよう。

例7 右の図のように，2つの円の位置関係が上の㋐の場合，共通接線は4本である。

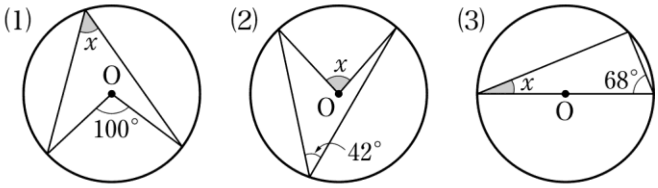


問11 2つの円の位置関係が上の㋑～㋔の場合の共通接線の数を調べなさい。

復習問題

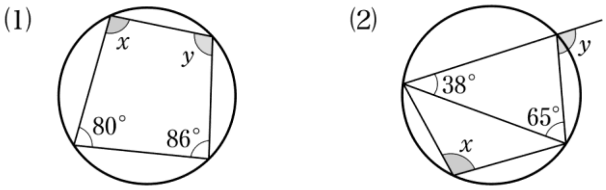
□ **1** 次の図で，x の値を求めなさい。

円周角の定理
p.54 例 1



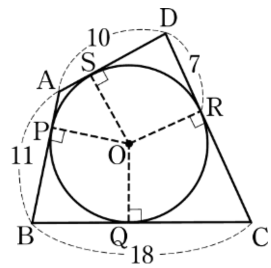
□ **2** 次の図で，x, y の値を求めなさい。

円に内接する四角形
p.56 問 4



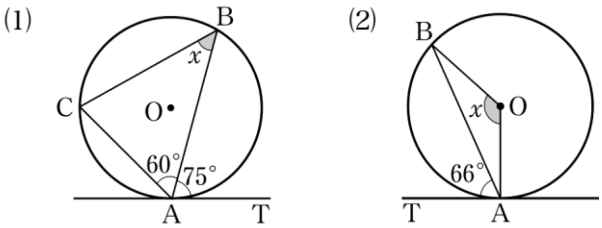
□ **3** 右の図で，円 O は四角形 ABCD の内接円で，P，Q，R，S はその接点である。四角形 ABCD の周の長さを求めなさい。

円外の１点からの接線
p.59 例題 1



□ **4** 次の図で，AT は円 O の接線であり，A はその接点である。x の値を求めなさい。

接線と弦のつくる角
p.61 例題 2



□ **5** 次の図で，x の値を求めなさい。

方べきの定理
p.62 例 5