

1節 三角形の性質

1 三角形と角

ねらい 中学校で学んだ平行線と角，三角形の相似について復習します。

平行線と角

2つの直線が交わる時，次の性質が成り立つ。

対頂角の性質

対頂角は等しい。

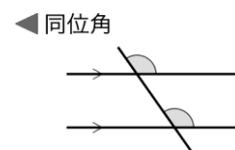


平行な2直線に1つの直線が交わる時，次の性質が成り立つ。

平行線の性質

[1] 同位角は等しい。

[2] 錯角は等しい。



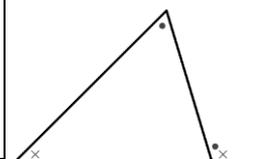
三角形の角

三角形の内角と外角について，次の性質が成り立つ。

三角形の内角，外角の性質

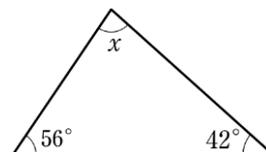
[1] 三角形の内角の和は 180° である。

[2] 三角形の外角は，それと隣り合わない2つの内角の和に等しい。



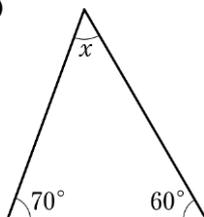
例1 右の図で，三角形の内角の和は 180° であるから

$$x = 180^\circ - (56^\circ + 42^\circ) = 82^\circ$$

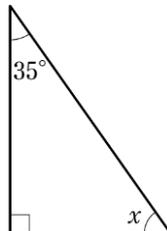


問1 次の図で， x の値を求めなさい。

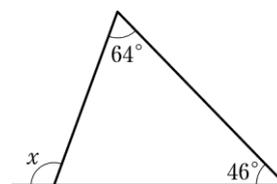
(1)



(2)



(3)



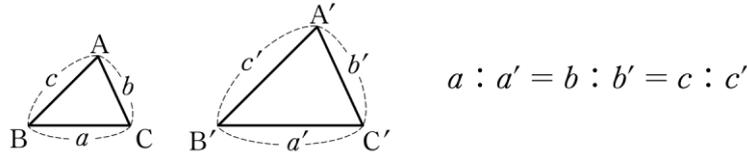
三角形の相似

三角形の形を変えずに、一定の割合に拡大、または縮小してできる三角形は、もとの三角形と相似であるという。

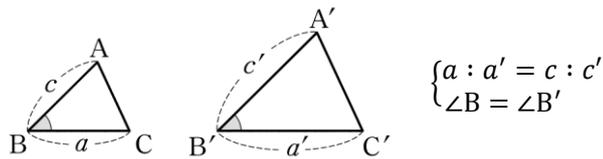
三角形の相似条件

2つの三角形は、次のどれかが成り立つとき相似である。

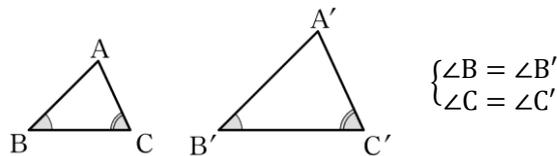
[1] 3組の辺の比がすべて等しい。



[2] 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。



[3] 2組の角がそれぞれ等しい。



$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が相似であることを $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ とかく。

相似な三角形では、対応する辺の長さの比はすべて等しく、対応する角の大きさはそれぞれ等しい。

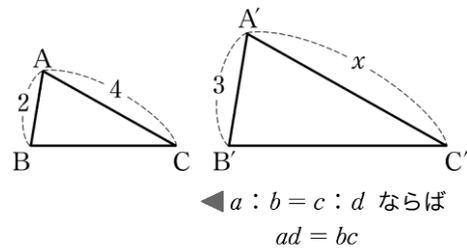
例 2 右の図で、 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ であるとき、

$$AB : A'B' = AC : A'C' \text{ より}$$

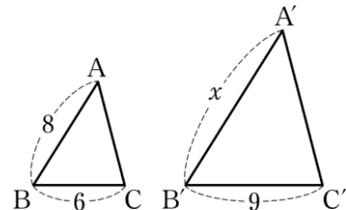
$$2 : 3 = 4 : x$$

$$2x = 3 \times 4$$

これを解いて $x = 6$



問 2 右の図で、 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ であるとき、 x の値を求めなさい。



2 三角形と比

ねらい 三角形と比に関する性質を復習し、線分の長さを求める方法を学びます。

三角形と比について、次の性質がある。

三角形と比

△ABCの辺AB, AC上の点をそれぞれP, Qとする。

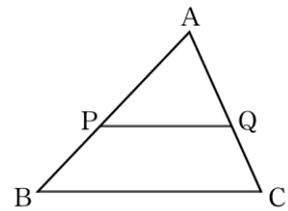
[1] $PQ \parallel BC$ ならば

$$AP : AB = AQ : AC = PQ : BC$$

$$AP : PB = AQ : QC$$

[2] $AP : AB = AQ : AC$ ならば $PQ \parallel BC$

[3] $AP : PB = AQ : QC$ ならば $PQ \parallel BC$



● 三角形と比の性質を用いて線分の長さを求めてみよう。

例3 (1) 右の図で、 $PQ \parallel BC$ であるとき

$$AP : AB = PQ : BC$$

よって $2 : 8 = x : 12$

$$2 \times 12 = 8x$$

これを解いて $x = 3$

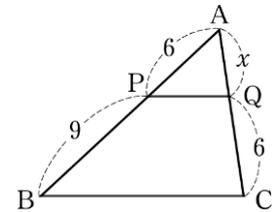
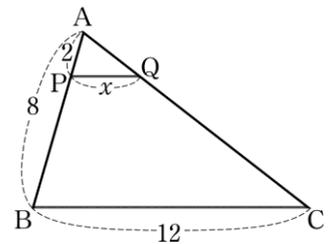
(2) 右の図で、 $PQ \parallel BC$ であるとき

$$AP : PB = AQ : QC$$

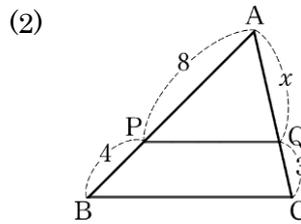
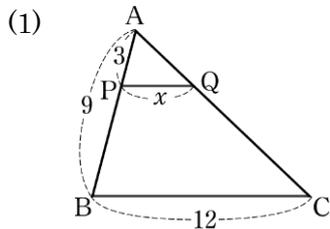
よって $6 : 9 = x : 6$

$$6 \times 6 = 9x$$

これを解いて $x = 4$



問3 次の図で、 $PQ \parallel BC$ であるとき、 x の値を求めなさい。



→ p.53 復習問題①

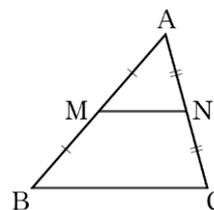
中点連結定理

三角形と比の性質から、次の**中点連結定理**が成り立つ。

中点連結定理

$\triangle ABC$ の辺 AB , AC の中点をそれぞれ M , N とすると

$$MN \parallel BC, \quad MN = \frac{1}{2} BC$$



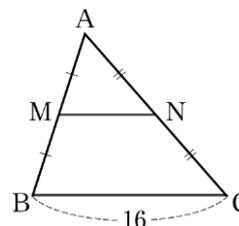
● 中点連結定理を用いて線分の長さを求めてみよう。

例 4 右の図の $\triangle ABC$ で、 M , N をそれぞれ辺 AB , AC の中点とすると

$$MN = \frac{1}{2} BC$$

ここで、 $BC = 16$ であるから

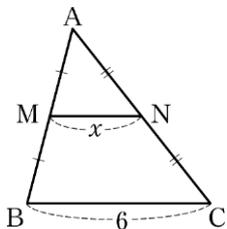
$$\begin{aligned} MN &= \frac{1}{2} \times 16 \\ &= 8 \end{aligned}$$



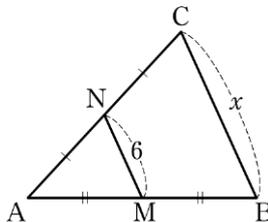
問 4 次の図の $\triangle ABC$ で、 M , N をそれぞれ辺 AB , AC の中点とするとき、 x の値を求めなさい。

→ p.53 復習問題②

(1)



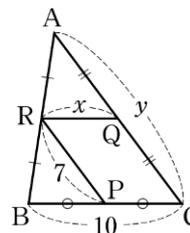
(2)



問 5 右の図の $\triangle ABC$ で、 P , Q , R はそれぞれ辺 BC , CA , AB の中点である。

(1) x の値を求めなさい。

(2) y の値を求めなさい。



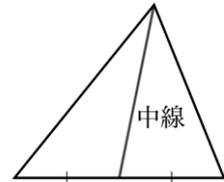
3 三角形の重心・外心・内心

ねらい 三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分のもつ性質や、三角形の3つの頂点を通る円、3つの辺に接する円などについて学びます。

三角形の重心

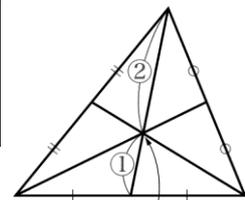
三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を**中線**という。

三角形の3本の中線は1点で交わる。この点をその三角形の**重心**という。重心について、次のことが成り立つ。



三角形の重心

- [1] 三角形の3本の中線は1点で交わる。
- [2] 重心は、それぞれの中線を2:1に分ける。



証明 $\triangle ABC$ の辺 BC , CA , AB の中点をそれぞれ D , E , F とする。中点 D , E について、中点連結定理により

$$ED \parallel AB, \quad ED = \frac{1}{2}AB$$

中線 AD , BE の交点を G とすると、 $\triangle AGB \sim \triangle DGE$ より

$$AG : DG = BG : EG = AB : DE = 2 : 1$$

同様にして、中線 AD , CF の交点を G' とすると

$$AG' : DG' = CG' : FG' = AC : DF = 2 : 1$$

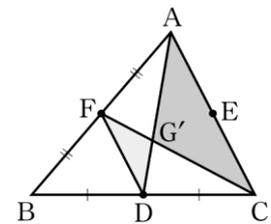
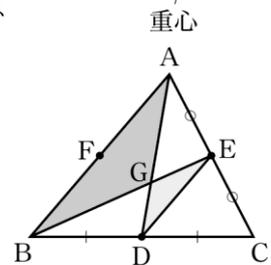
よって、 G と G' はともに線分 AD を $2 : 1$ に分ける点であるから、同じ点である。

よって

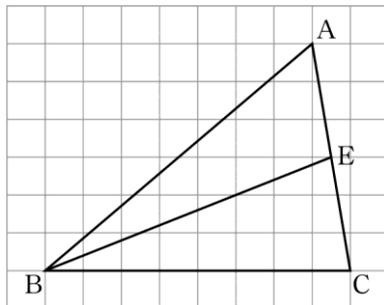
$$AG : DG = BG : EG = CG : FG = 2 : 1$$

である。

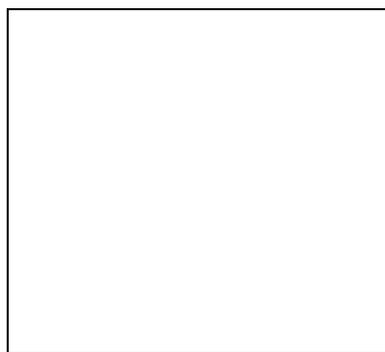
したがって、三角形の3本の中線は1点で交わり、その交点は中線を $2 : 1$ に分ける。



問6 次の図において、辺ACの中点をEとすると、 $\triangle ABC$ の重心を求めなさい。



三角形の板を1点で支えることは難しいが、
重心で支えるとつり合いがとれる。



●重心の性質を利用して線分の長さを求めてみよう。

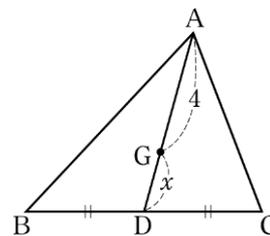
例5 右の図の $\triangle ABC$ で、点Gが重心であるとすると

$$AG : GD = 2 : 1$$

よって $4 : x = 2 : 1$

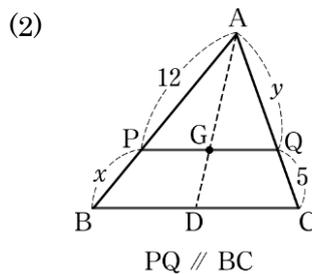
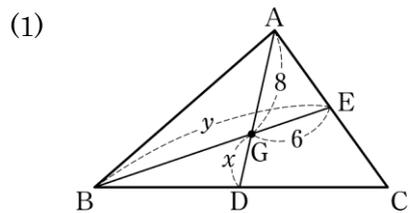
$$4 \times 1 = 2x$$

これを解いて $x = 2$



問7 次の図で、点Gは $\triangle ABC$ の重心である。 x, y の値を求めなさい。

→p.53 復習問題③

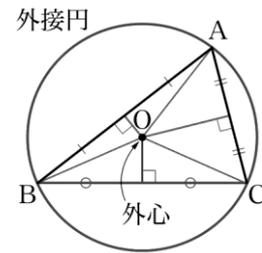
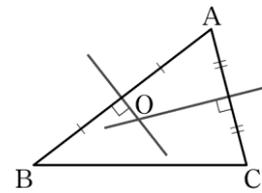


三角形の外心

三角形の3辺の垂直二等分線のもつ性質を調べてみよう。

右の図の△ABCで、2辺AB, ACの垂直二等分線の交点をOとする。辺の垂直二等分線上の点からその辺の両端までの距離は等しいから、 $OA = OB$, $OA = OC$ である。よって、 $OB = OC$ となり、このとき、辺の両端から等距離にある点は、その辺の垂直二等分線上にあるから、辺BCの垂直二等分線も点Oを通る。

点Oは3つの頂点から等距離にあるので、Oを中心としてOAを半径とする円は3つの頂点を通る。この円を△ABCの外接円といい、中心Oを△ABCの外心という。



$OA = OB = OC$

三角形の外心
三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わる。

●外心の性質を利用して角の大きさを求めてみよう。

例6 右の図で、点Oが△ABCの外心であるとき、∠BACの大きさを求めてみよう。

点Oが△ABCの外心であるから

$OA = OB = OC$

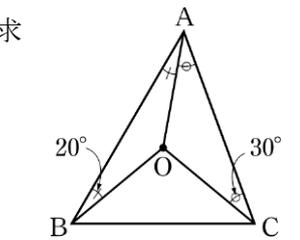
よって、△OAB, △OACは二等辺三角形となり

$\angle OAB = \angle OBA = 20^\circ$

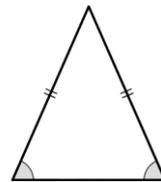
$\angle OAC = \angle OCA = 30^\circ$

したがって

$\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$

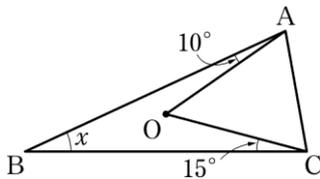


◀二等辺三角形の底角は等しい。

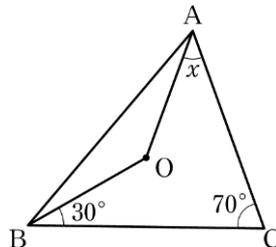


問8 次の図で、点Oは△ABCの外心である。xの値を求めなさい。 →p.53 復習問題④(1)

(1)



(2)



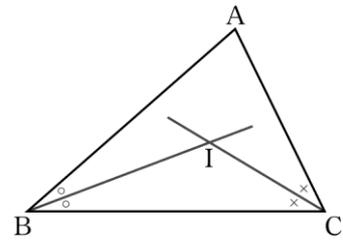
三角形の内心

三角形の3つの内角の二等分線のもつ性質を調べてみよう。

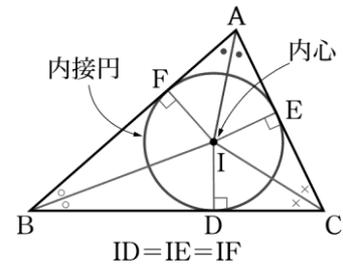
右の図の△ABCで、∠B、∠Cの二等分線の交点をIとする。Iから辺BC、CA、ABにそれぞれ垂線ID、IE、IFを引くと、角の二等分線上の点から角をつくる2辺に引いた垂線の長さは等しいから $ID = IE$ 、 $ID = IF$ である。

よって、 $IE = IF$ となり、 $\triangle AIE \cong \triangle AIF$ である。したがって、 $\angle IAE = \angle IAF$ となるから、IAは∠Aの二等分線である。

点Iは3辺から等距離にあるので、Iを中心としてIDを半径とする円は3辺に接する。この円を△ABCの内接円といい、中心Iを△ABCの内心という。



◀ 直角三角形の合同条件
「斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい」を用いる。



三角形の内心

三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。

● 内心の性質を利用して角の大きさを求めてみよう。

例7 右の図で、点Iが△ABCの内心であるとき、∠BACの大きさを求めてみよう。

IB、ICはそれぞれ∠ABC、∠ACBの二等分線であるから

$$\angle ABC = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

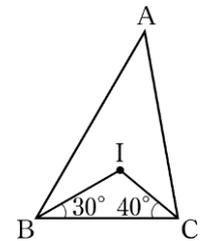
$$\angle ACB = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$$

三角形の内角の和は 180° であるから

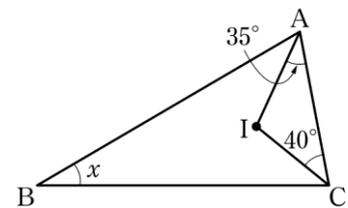
$$\angle BAC = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ)$$

$$= 40^\circ$$



問9 右の図で、点Iは△ABCの内心である。xの値を求めなさい。



→ p.53 復習問題④②

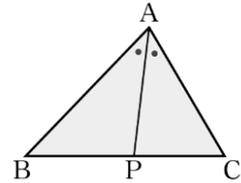
4 角の二等分線と線分の比

ねらい 三角形の角の二等分線が、対辺をどのような比に分けるのかについて学び、それを利用して、いろいろな線分の長さを求めます。

角の二等分線と線分の比

△ABCで、∠Aの二等分線と対辺BCの交点をPとすると

$$BP : PC = AB : AC$$



証明 点Cを通りPAに平行な直線を引き、BAの延長との交点をDとすると

$$\angle ACD = \angle CAP, \quad \angle ADC = \angle BAP$$

ここで、 $\angle CAP = \angle BAP$ であるから

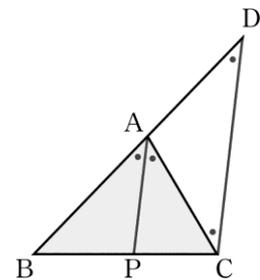
$$\angle ACD = \angle ADC$$

よって、△ACDは二等辺三角形であるから

$$AC = AD \quad \dots\dots ①$$

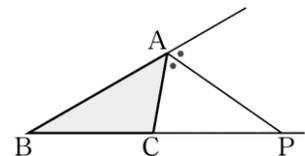
$$PA \parallel CD \text{ より } BP : PC = BA : AD \quad \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{ より } BP : PC = AB : AC$$



△ABCで、頂点Aにおける外角の二等分線と対辺BCの延長の交点をPとしても、次の式は成り立つ。

$$BP : PC = AB : AC$$



●角の二等分線と線分の比の性質を用いて、線分の長さを求めてみよう。

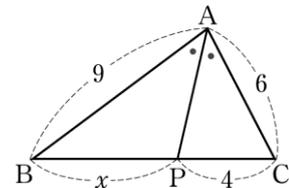
例 8 右の図で、APを∠Aの二等分線とすると

$$BP : PC = AB : AC$$

$$\text{よって } x : 4 = 9 : 6$$

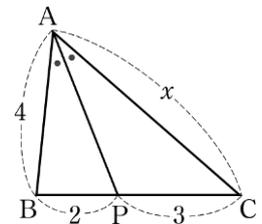
$$6x = 4 \times 9$$

$$\text{これを解いて } x = 6$$



問 10 右の図で、APは∠Aの二等分線である。xの値を求めなさい。

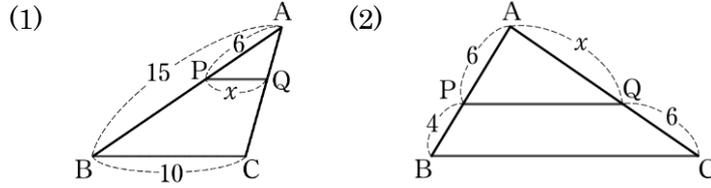
→p.53 復習問題5



復習問題

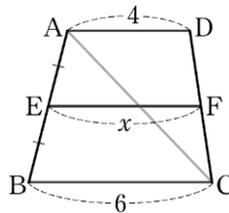
□ **1** 次の図で、 $PQ \parallel BC$ であるとき、 x の値を求めなさい。

三角形と比
 ↪ p.46 例3



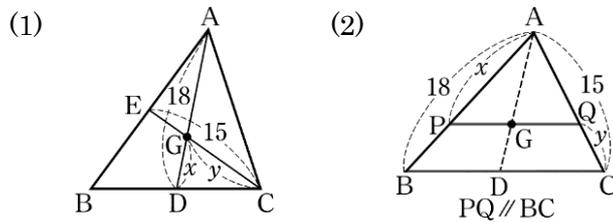
□ **2** 右の図で、四角形 ABCD は $AD \parallel BC$ の台形である。また、点 E は辺 AB の中点で、 $EF \parallel AD$ である。 x の値を求めなさい。

中点連結定理
 ↪ p.47 例4



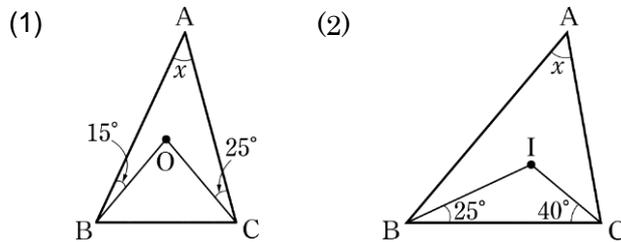
□ **3** 次の図で、点 G は $\triangle ABC$ の重心である。 x, y の値を求めなさい。

三角形の重心
 ↪ p.49 例5



□ **4** 次の図で、点 O, I はそれぞれ $\triangle ABC$ の外心, 内心である。 x の値を求めなさい。

三角形の外心・内心
 ↪ p.50 例6
 p.51 例7



□ **5** 右の図で、AP は $\angle A$ の二等分線である。次の間に答えなさい。

角の二等分線と線分の比
 ↪ p.52 例8

- (1) $BP : PC$ を求めなさい。
- (2) BP, PC の長さを求めなさい。

