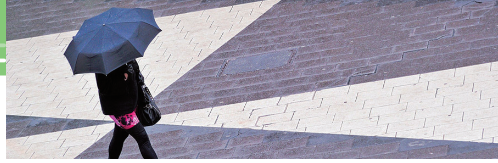


1 節　三角形の性質

1 三角形と角

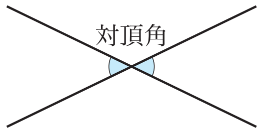
ねらい　中学校で学んだ平行線と角，三角形の相似(そうじ)について復習します。

平行線と角

2 つの直線が交わるとき，次の性質が成り立つ。

対頂角の性質

対頂角は等しい。



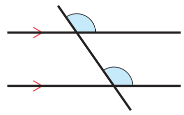
平行な 2 直線に 1 つの直線が交わるとき，次の性質が成り立つ。

平行線の性質

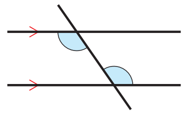
[1]　同位角は等しい。

[2]　錯角は等しい。

◀同位角



錯角



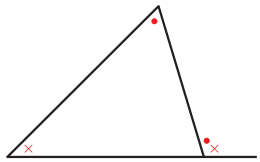
三角形の角

三角形の内角と外角について，次の性質が成り立つ。

三角形の内角，外角の性質

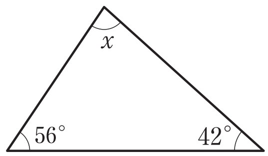
[1]　三角形の内角の和は 180° である。

[2]　三角形の外角は，それと隣(とな)り合わない 2 つの内角の和に等しい。



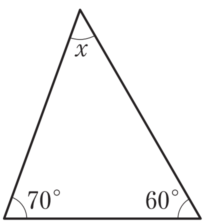
例 1　右の図で，三角形の内角の和は 180° であるから

$x = 180° - (56° + 42°) = 82°$

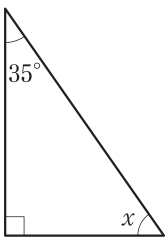


問 1　次の図で，x の値を求めなさい。

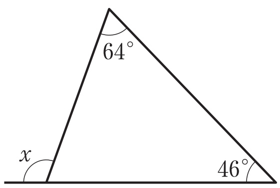
(1)



(2)



(3)



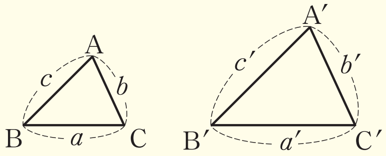
三角形の相似

三角形の形を変えずに，一定の割合に拡大，または縮小してできる三角形は，もとの三角形と相似であるという。

三角形の相似条件

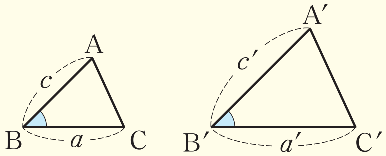
2 つの三角形は，次のどれかが成り立つとき相似である。

[1]　3 組の辺の比がすべて等しい。



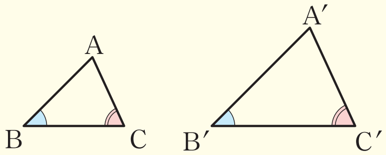
$$a : a' = b : b' = c : c'$$

[2]　2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。



$$\begin{cases} a : a' = c : c' \\ \angle B = \angle B' \end{cases}$$

[3]　2 組の角がそれぞれ等しい。



$$\begin{cases} \angle B = \angle B' \\ \angle C = \angle C' \end{cases}$$

$\triangle$ABC と $\triangle$A′B′C′ が相似であることを $\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{A'B'C'}$ とかく。

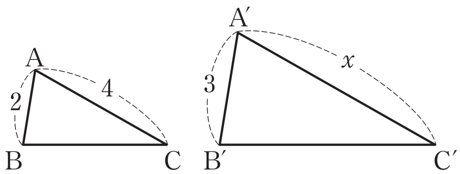
相似な三角形では，対応する辺の長さの比はすべて等しく，対応する角の大きさはそれぞれ等しい。

例 2　右の図で，$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{A'B'C'}$ であるとき，$\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} = \mathrm{AC} : \mathrm{A'C'}$ より

$$2 : 3 = 4 : x$$

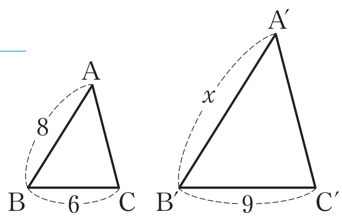
$$2x = 3 \times 4$$

これを解いて　　$x = 6$



◀ $a : b = c : d$ ならば $ad = bc$

問 2　右の図で，$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{A'B'C'}$ であるとき，x の値を求めなさい。



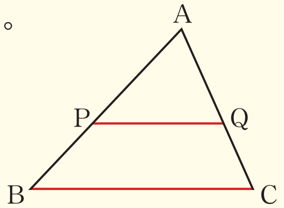
2 三角形と比

ねらい　三角形と比に関する性質を復習し，線分の長さを求める方法を学びます。

三角形と比について，次の性質がある。

三角形と比

△ABC の辺 AB，AC 上の点をそれぞれ P，Q とする。



［1］　PQ // BC　ならば

$$AP : AB = AQ : AC = PQ : BC$$

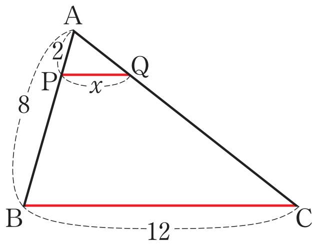
$$AP : PB = AQ : QC$$

［2］　AP : AB = AQ : AC　ならば　　PQ // BC

［3］　AP : PB = AQ : QC　ならば　　PQ // BC

●三角形と比の性質を用いて線分の長さを求めてみよう。

例 3　(1)　右の図で，PQ // BC　であるとき



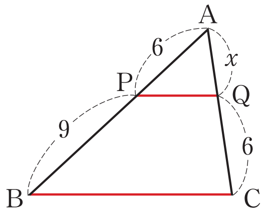
$$AP : AB = PQ : BC$$

よって　$2 : 8 = x : 12$

$$2 \times 12 = 8x$$

これを解いて　$x = 3$

(2)　右の図で，PQ // BC　であるとき



$$AP : PB = AQ : QC$$

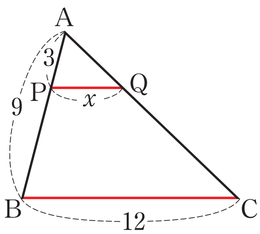
よって　$6 : 9 = x : 6$

$$6 \times 6 = 9x$$

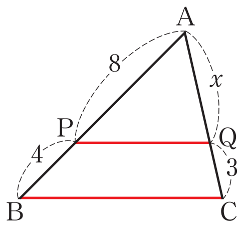
これを解いて　$x = 4$

問 3　次の図で，PQ // BC　であるとき，x の値を求めなさい。　➜p.53 復習問題1

(1)



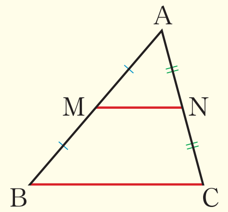
(2)



中点連結定理

三角形と比の性質から，次の **中点連結定理**（ちゅうてんれんけつていり）が成り立つ。

> **中点連結定理**
>
> △ABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると
>
> $$MN \parallel BC, \qquad MN = \frac{1}{2}BC$$



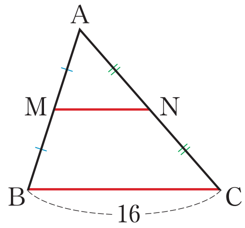
●中点連結定理を用いて線分の長さを求めてみよう。

例 4　右の図の △ABC で，M，N をそれぞれ辺 AB，AC の中点とすると

$$MN = \frac{1}{2}BC$$

ここで，BC = 16 であるから

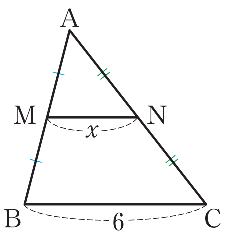
$$MN = \frac{1}{2} \times 16$$
$$= 8$$



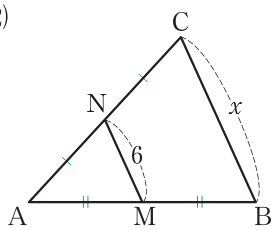
問 4　次の図の △ABC で，M，N をそれぞれ辺 AB，AC の中点とするとき，x の値を求めなさい。

➜p.53 復習問題2

(1)



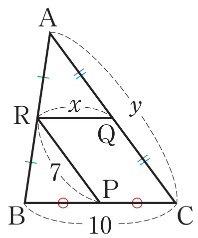
(2)



問 5　右の図の △ABC で，P，Q，R はそれぞれ辺 BC，CA，AB の中点である。

(1)　x の値を求めなさい。

(2)　y の値を求めなさい。

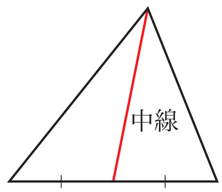


3 三角形の重心・外心・内心

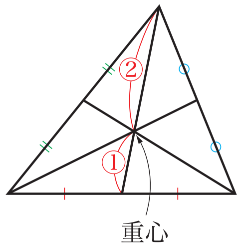
ねらい　三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分のもつ性質や，三角形の３つの頂点を通る円，３つの辺に接する円などについて学びます。

三角形の重心

三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を **中線**（ちゅうせん） という。



三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。この点をその三角形の **重心**（じゅうしん） という。重心について，次のことが成り立つ。



三角形の重心

[1]　三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。

[2]　重心は，それぞれの中線を 2：1 に分ける。

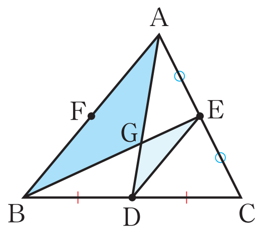
証明　△ABC の辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D，E，F とする。中点 D，E について，中点連結定理により

$$\mathrm{ED} \parallel \mathrm{AB}, \qquad \mathrm{ED} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$$

中線 AD，BE の交点を G とすると，

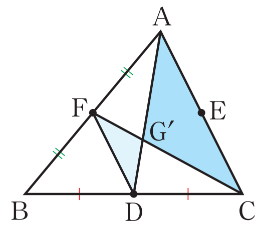
△AGB ∽ △DGE より

$$\mathrm{AG} : \mathrm{DG} = \mathrm{BG} : \mathrm{EG} = \mathrm{AB} : \mathrm{DE} = 2 : 1$$



同様にして，中線 AD，CF の交点を G′ とすると

$$\mathrm{AG'} : \mathrm{DG'} = \mathrm{CG'} : \mathrm{FG'} = \mathrm{AC} : \mathrm{DF} = 2 : 1$$



よって，G と G′ はともに線分 AD を 2：1 に分ける点であるから，同じ点である。

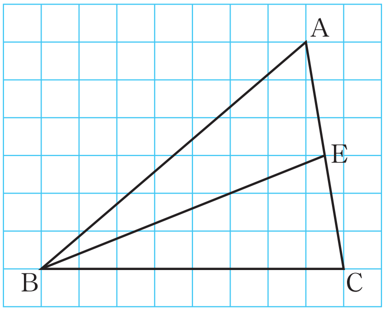
よって

$$\mathrm{AG} : \mathrm{DG} = \mathrm{BG} : \mathrm{EG} = \mathrm{CG} : \mathrm{FG} = 2 : 1$$

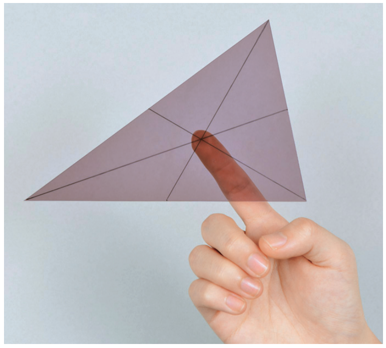
である。

したがって，三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その交点は中線を 2：1 に分ける。

問6 次の図において，辺ACの中点をEとするとき，△ABCの重心を求めなさい。



三角形の板を1点で支えることは難しいが，重心で支えるとつり合いがとれる。



●**重心の性質を利用して線分の長さを求めてみよう。**

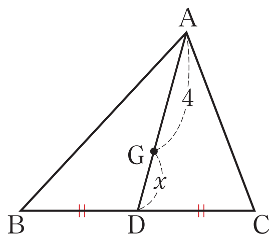
例5 右の図の△ABCで，点Gが重心であるとすると

$$AG : GD = 2 : 1$$

よって　$4 : x = 2 : 1$

$$4 \times 1 = 2x$$

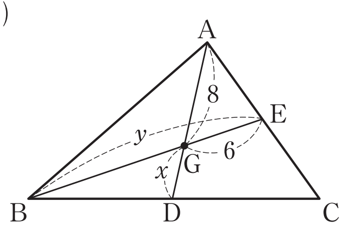
これを解いて　$x = 2$



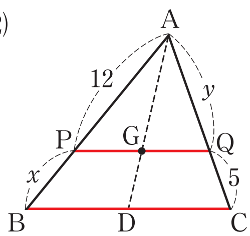
問7 次の図で，点Gは△ABCの重心である。x，yの値を求めなさい。

➡p.53 復習問題3

(1)



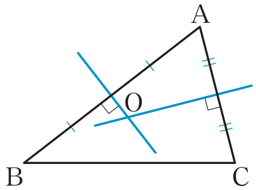
(2)



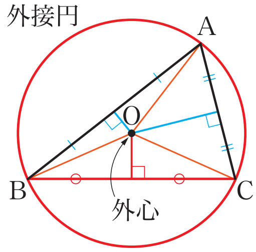
PQ // BC

三角形の外心

三角形の 3 辺の垂直二等分線のもつ性質を調べてみよう。



右の図の △ABC で， 2 辺 AB，AC の垂直二等分線の交点を O とする。辺の垂直二等分線上の点からその辺の両端までの距離は等しいから，OA ＝ OB，OA ＝ OC である。よって，OB ＝ OC となり，このとき，辺の両端から等距離にある点は，その辺の垂直二等分線上にあるから，辺 BC の垂直二等分線も点 O を通る。



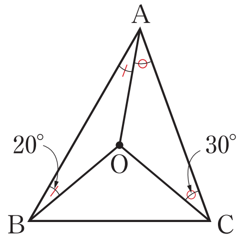
OA＝OB＝OC

点 O は 3 つの頂点から等距離にあるので，O を中心として OA を半径とする円は 3 つの頂点を通る。この円を △ABC の **外接円**（がいせつえん）といい，中心 O を △ABC の **外心**（がいしん）という。

> **三角形の外心**
> 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

●外心の性質を利用して角の大きさを求めてみよう。

例 6 右の図で，点 O が △ABC の外心であるとき，∠BAC の大きさを求めてみよう。



点 O が △ABC の外心であるから

$$OA = OB = OC$$

よって，△OAB，△OAC は二等辺三角形となり

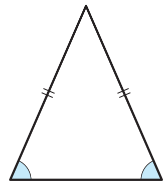
$$\angle OAB = \angle OBA = 20^\circ$$

$$\angle OAC = \angle OCA = 30^\circ$$

したがって

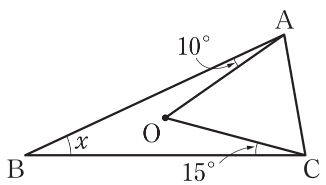
$$\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$$

◀二等辺三角形の底角は等しい。

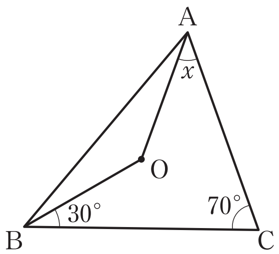


問 8 次の図で，点 O は △ABC の外心である。x の値を求めなさい。

(1)



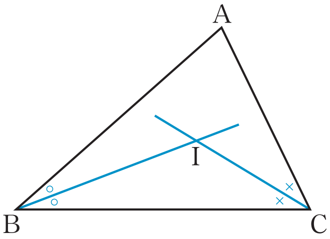
(2)



➔p.53 復習問題4(1)

三角形の内心

三角形の 3 つの内角の二等分線のもつ性質を調べてみよう。



右の図の △ABC で，∠B，∠C の二等分線の交点を I とする。I から辺 BC，CA，AB にそれぞれ垂線 ID，IE，IF を引くと，角の二等分線上の点から角をつくる 2 辺に引いた垂線の長さは等しいから

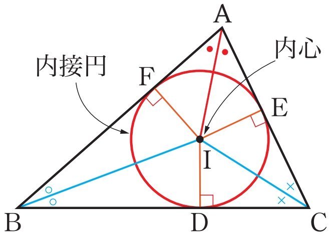
ID = IE，ID = IF である。

よって，IE = IF となり，△AIE ≡ △AIF である。

◀直角三角形の合同条件「斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい」を用いる。

したがって，∠IAE = ∠IAF となるから，IA は ∠A の二等分線である。

点 I は 3 辺から等距離にあるので，I を中心として ID を半径とする円は 3 辺に接する。この円を △ABC の **内接円**（ないせつえん）といい，中心 I を △ABC の **内心**（ないしん）という。

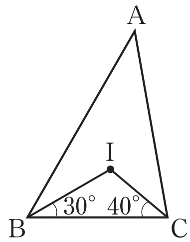


ID＝IE＝IF

> **三角形の内心**
> 三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。

●内心の性質を利用して角の大きさを求めてみよう。

例 7 右の図で，点 I が △ABC の内心であるとき，∠BAC の大きさを求めてみよう。



IB，IC はそれぞれ ∠ABC，∠ACB の二等分線であるから

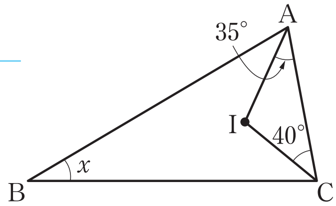
$\angle ABC = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$

$\angle ACB = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$

三角形の内角の和は 180° であるから

$$\begin{aligned}\angle BAC &= 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB)\\ &= 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ)\\ &= 40^\circ\end{aligned}$$

問 9 右の図で，点 I は △ABC の内心である。x の値を求めなさい。



→p.53 復習問題4(2)

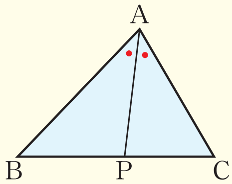
4 角の二等分線と線分の比

ねらい 三角形の角の二等分線が，対辺をどのような比に分けるのかについて学び，それを利用して，いろいろな線分の長さを求めます。

角の二等分線と線分の比

△ABC で，∠A の二等分線と対辺 BC の交点を P とすると

$$\mathrm{BP : PC = AB : AC}$$



証明 点 C を通り PA に平行な直線を引き，BA の延長との交点を D とすると

$\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{CAP}$，　$\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{BAP}$

ここで，$\angle \mathrm{CAP} = \angle \mathrm{BAP}$ であるから

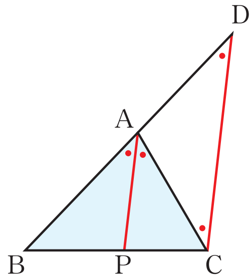
$\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{ADC}$

よって，△ACD は二等辺三角形であるから

$\mathrm{AC = AD}$ ……①

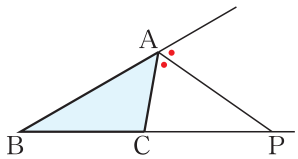
PA // CD より　$\mathrm{BP : PC = BA : AD}$ ……②

①，② より　$\mathrm{BP : PC = AB : AC}$



△ABC で，頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長の交点を P としても，次の式は成り立つ。

$$\mathrm{BP : PC = AB : AC}$$



●角の二等分線と線分の比の性質を用いて，線分の長さを求めてみよう。

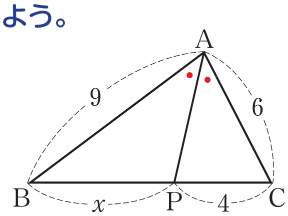
例 8 右の図で，AP を ∠A の二等分線とすると

$$\mathrm{BP : PC = AB : AC}$$

よって　$x : 4 = 9 : 6$

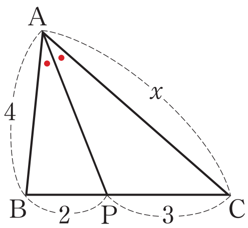
$6x = 4 \times 9$

これを解いて　$x = 6$



問 10 右の図で，AP は ∠A の二等分線である。x の値を求めなさい。

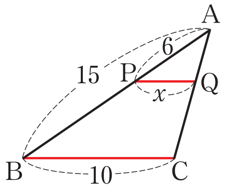
→p.53 復習問題5



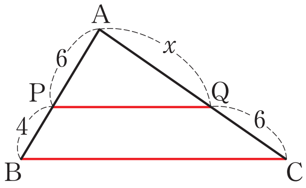
復　習　問　題

1 次の図で，PQ // BC であるとき，x の値を求めなさい。

(1)

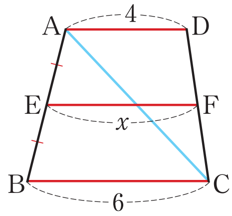


(2)



三角形と比
p.46 例 3

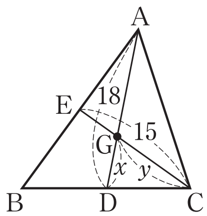
2 右の図で，四角形 ABCD は AD // BC の台形である。また，点 E は辺 AB の中点で，EF // AD である。x の値を求めなさい。



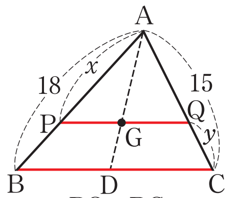
中点連結定理
p.47 例 4

3 次の図で，点 G は △ABC の重心である。x，y の値を求めなさい。

(1)



(2)

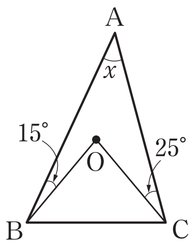


PQ // BC

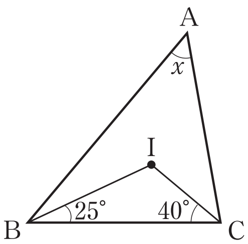
三角形の重心
p.49 例 5

4 次の図で，点 O，I はそれぞれ △ABC の外心，内心である。x の値を求めなさい。

(1)



(2)

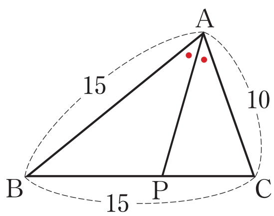


三角形の外心・内心
p.50 例 6
p.51 例 7

5 右の図で，AP は ∠A の二等分線である。次の問に答えなさい。

(1) BP：PC を求めなさい。

(2) BP，PC の長さを求めなさい。



角の二等分線と線分の比
p.52 例 8