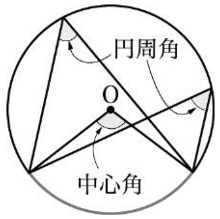
２節 円の性質

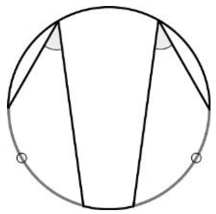
❶ 円周角の定理

（教科書 p.124）

中心角と円周角については，次の定理が成り立つ。

円周角の定理
定理 ［1］１つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。 ［2］１つの円で，大きさが等しい円周角に対する弧の長さは等しい。 ［3］１つの円で，長さが等しい弧に対する円周角の大きさは等しい。

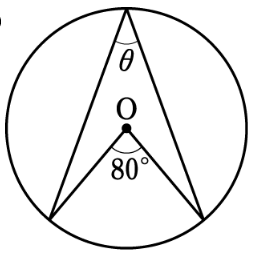




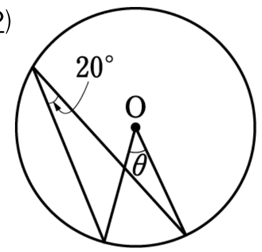
上の定理の[2]，[3]は，半径の等しい２つの円についても成り立つ。

問1 下の図で，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

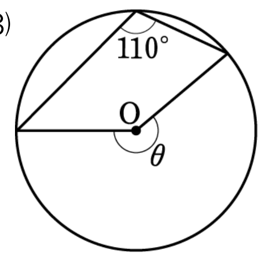
(1)



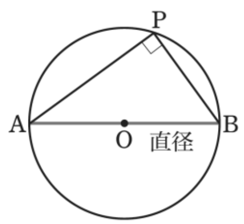
(2)



(3)

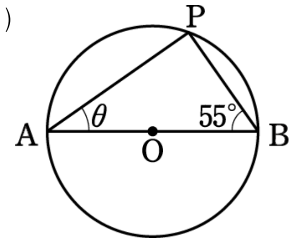


円 O において，直径 AB を引くと，弧 AB に対する中心角は 180° であるから，円周角の定理により，弧 AB に対する円周角は 90° となる。したがって，線分 AB を直径とする円周上に A，B とは異なる点 P をとると $\angle APB = 90°$ である。

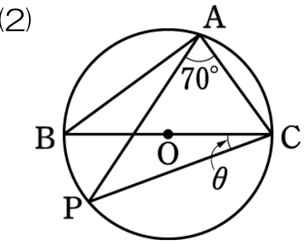


問2 下の図で，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

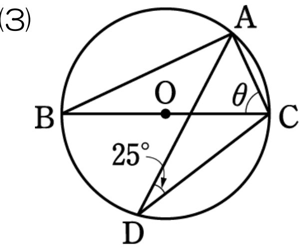
(1)



(2)

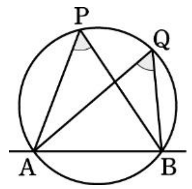


(3)



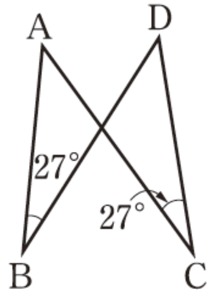
円周角の定理については，その逆が成り立つ。

円周角の定理の逆
定理　4 点 A，B，P，Q について，P，Q が直線 AB に関して同じ側にあって $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$ ならば，この 4 点は同一円周上にある。

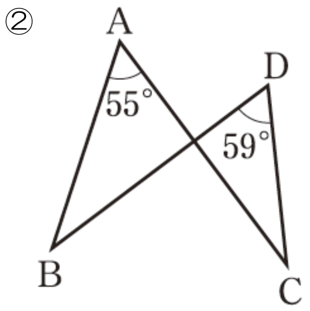


問3 次のうち，4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるものはどれか。

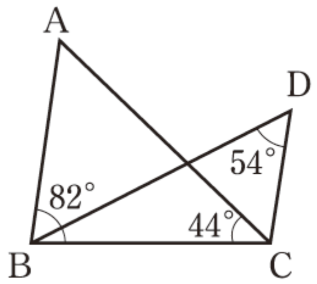
①



②



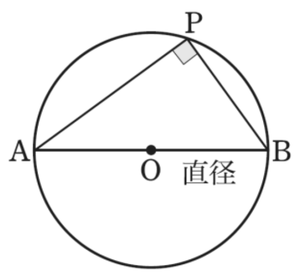
③



2 点 A，B に対し

$$\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$$

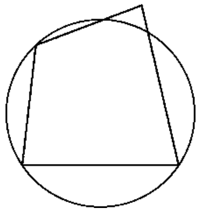
となる点 P は，AB を直径とする円周上にある。



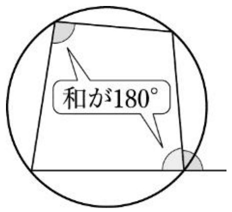
❷ 円に内接する四角形

（教科書 p.126）

　四角形の 4 つの頂点が 1 つの円周上にあるとき，その四角形は円に
（1　　　　　　　　　）という。
三角形は必ず円に内接するが，四角形は円に内接するとはかぎらない。
円に内接する四角形の性質について考えてみよう。

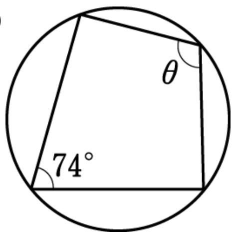


円に内接する四角形
定理　円に内接する四角形では，次の[1]，[2] が成り立つ。 [1] 対角の和は 180° である。 [2] 外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。

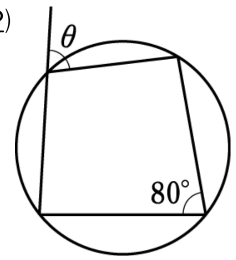


問4 下の図で，角 θ を求めよ。

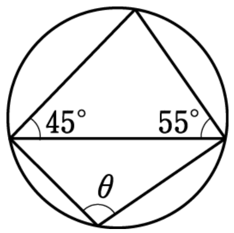
(1)



(2)



(3)

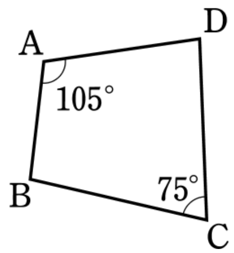


円に内接する四角形の定理は，その逆も成り立つ。

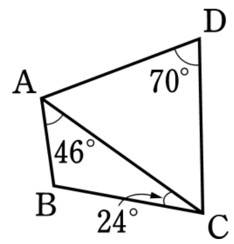
四角形が円に内接する条件
定理　次の[1]，[2]のいずれかが成り立つ四角形は円に内接する。 [1] 1 組の対角の和が 180° である。 [2] 1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しい。

問5 次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか。

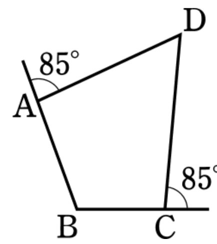
①



②



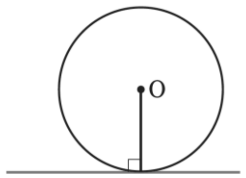
③



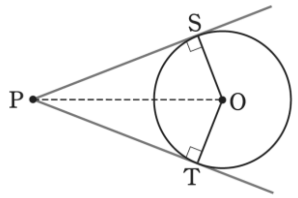
③ 円と接線

（教科書 p.128）

直線と円がただ 1 点を共有するとき，この直線は円に（[1]　　　　　　）といい，この直線を円の（[2]　　　　　　），その共有点を（[3]　　　　　　）という。このとき，円の接線は，接点を通る半径に垂直である。

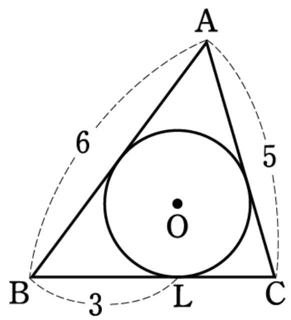


接線の長さ
定理　円の外部の 1 点からその円に引いた 2 本の接線において，その点から 2 つの接点までの距離は等しい。

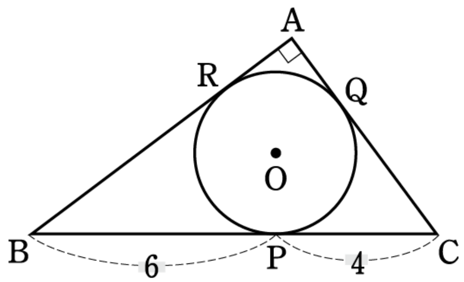


円外の点から接点までの距離を（[4]　　　　　　　　　）という。
円の 2 本の接線がつくる角の二等分線上に，その円の中心がある。

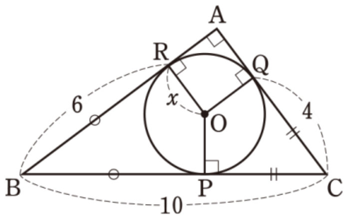
問6 右の図で，円 O は △ABC の内接円で，L は接点である。AB = 6，AC = 5，BL = 3 のとき，BC の長さを求めよ。



例題 1 右の図で，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。BP = 6，CP = 4 のとき，円 O の半径を求めよ。



解 四角形 AROQ は正方形であるから，円 O の半径を x とおくと



$\mathrm{AR} = \mathrm{AQ} = x$

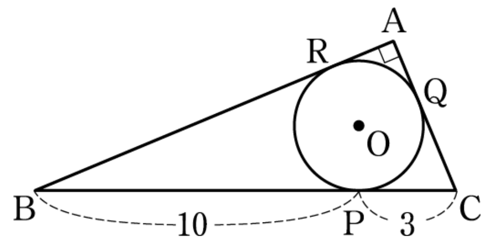
一方

$\mathrm{BR} = \mathrm{BP} = 6$

$\mathrm{CQ} = \mathrm{CP} = 4$

であるから，△ABC に三平方の定理を用いて

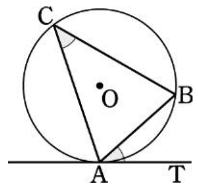
問7 右の図で，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。BP = 10，CP = 3 のとき，円 O の半径と AB，AC の長さをそれぞれ求めよ。



❹ 接線と弦のつくる角

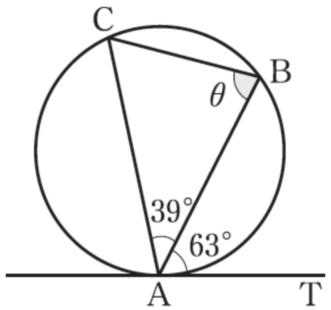
（教科書 p.130）

円の接線と接点を通る弦のつくる角について，次の定理が成り立つ。

接線と弦のつくる角
定理　円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。 

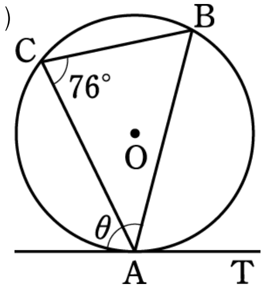
例1 右の図で，直線 AT が点 A で円に接しているとき，角 θ を求めてみよう。

接線と弦のつくる角の定理により，

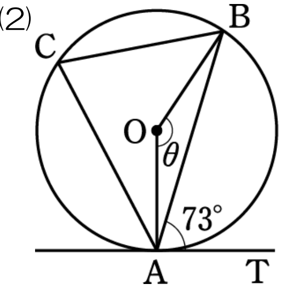


問8 下の図で，AT は円 O の接線，A は接点である。角 θ を求めよ。

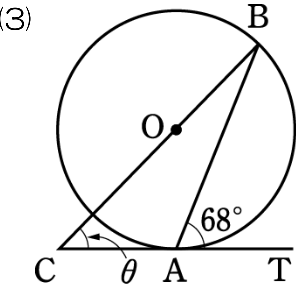
(1)



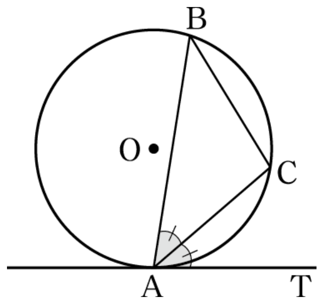
(2)



(3)

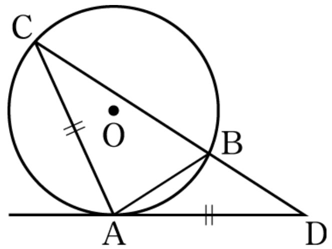


例題 2 右の図で，AT は円 O の接線，A は接点である。弦 AC が ∠BAT を 2 等分するとき，△ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。



解

問9 右の図で，AD は円 O の接線，A は接点である。AC = AD であるとき，BA = BD であることを証明せよ。



⑤ 方べきの定理

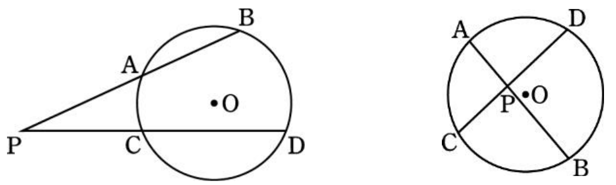
（教科書 p.132）

点 P を通る 2 直線と円 O との 4 つの交点が与えられたとき，P とこれらの点の間の距離には次の（[1]　　　　　　　　　　）が成り立つ。

方べきの定理(1)

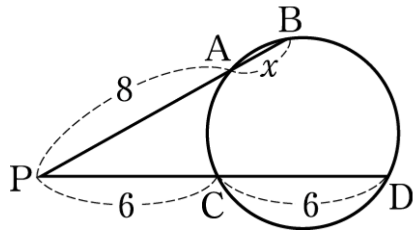
定理　点 P を通る 2 直線が，円 O とそれぞれ 2 点 A，B と 2 点 C，D で交わるとき

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



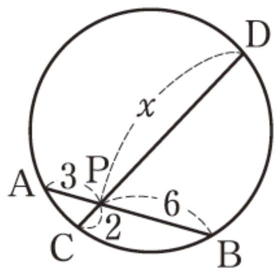
例2 右の図で，x を求めてみよう。

方べきの定理により

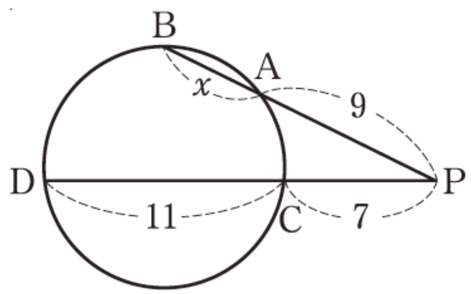


問 10 下の図で，x を求めよ。

(1)



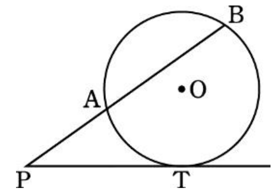
(2)



方べきの定理(2)

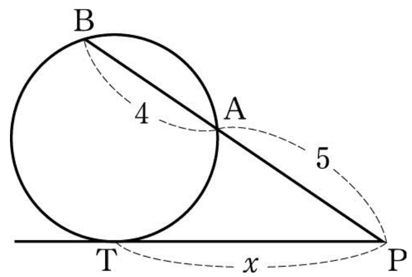
定理　点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A，B で交わり，もう一方が点 T で接するとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$

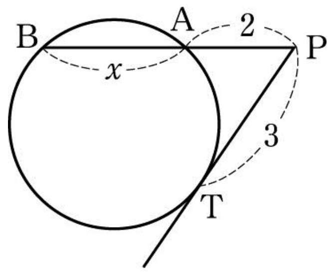


問 11 下の図で，PT は接線，T は接点である。x を求めよ。

(1)



(2)



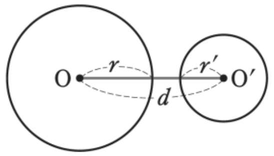
❻ ２つの円

（教科書 p.134）

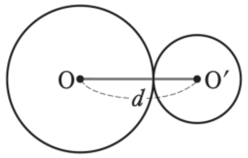
半径の異なる 2 つの円の位置関係については，下の図のように 5 通りの場合が考えられる。

(2)のような場合には 2 つの円は（[1]　　　　　　　　　）といい，(4)のような場合には（[2]　　　　　　　　　）という。いずれの場合も 2 つの円は 1 点を共有しており，その点を（[3]　　　　　　）という。

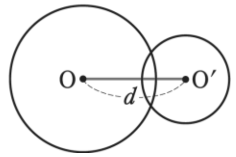
（1）互いに外部にある



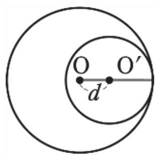
(2)（[1]　　　　　　　　　）



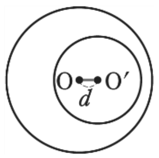
(3) 2 点で交わる



(4)（[2]　　　　　　　　　）



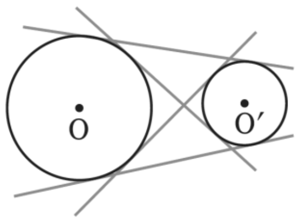
(5) 一方が他方を含む



2 つの円の位置関係は，それらの円の半径 r，r' と中心間の距離 d との関係で定まる。ただし，$r>r'$ とする。

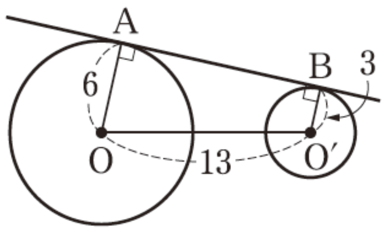
(1)	$d>r+r'$	互いに外部にある
(2)	$d=r+r'$	外接する
(3)	$r-r'<d<r+r'$	2 点で交わる
(4)	$r-r'=d$	内接する
(5)	$r-r'>d$	一方が他方を含む

また，右の図のように 1 本の直線が 2 つの円の接線となることがある。このような接線を，2 円の（[4]　　　　　　　　　）という。

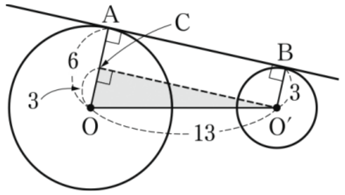


問 12 共通接線の本数は，上の 5 つの位置関係でどのように変わるか。

例題 3 右の図で，直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線，A，B は接点である。円 O，O′ の半径はそれぞれ 6，3 で，中心間の距離 OO′ は 13 である。このとき，線分 AB の長さを求めよ。



解

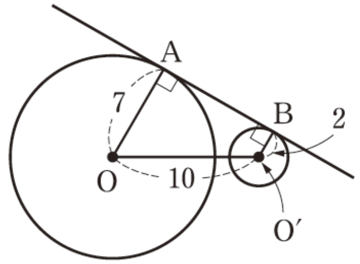


図のように，点 O′ から線分 AO に垂線 O′C を下ろす。

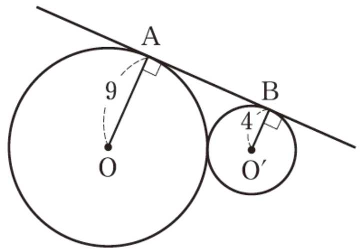
四角形 ACO′B は長方形となるから

問 13 下の図で，直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線，A，B は接点である。このとき，線分 AB の長さを求めよ。

(1)



(2)

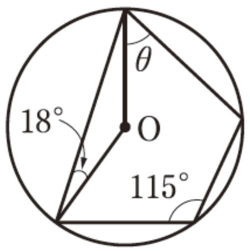


円Oと円O′は外接する

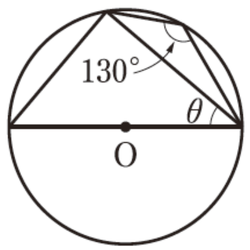
（教科書 p.136）

6　下の図で，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

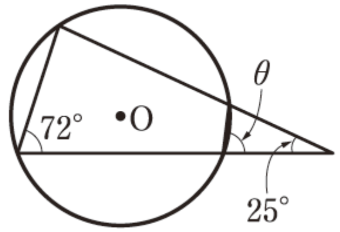
(1)



(2)

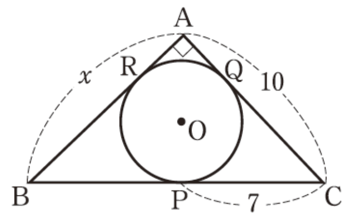


(3)

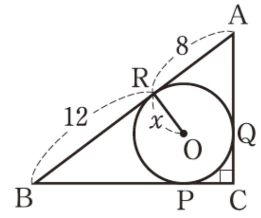


7　下の図で，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。x を求めよ。

(1)

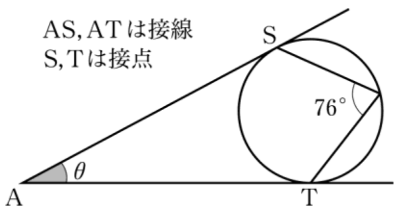


(2)

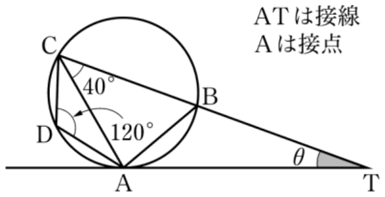


8 下の図で，角 θ を求めよ。

(1)

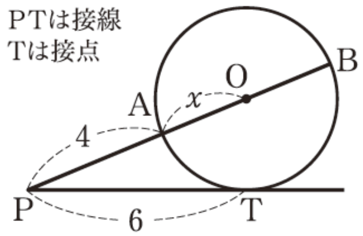


(2)

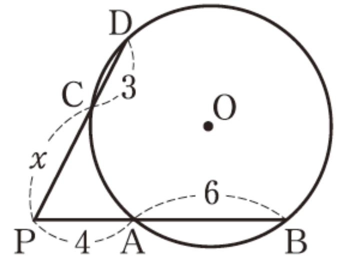


9 下の図で，x を求めよ。ただし，O は円の中心である。

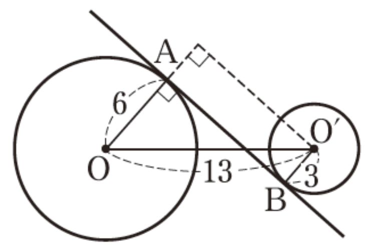
(1)



(2)



10 右の図で，直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線，A，B は接点である。円 O，O′ の半径がそれぞれ 6，3 で，中心間の距離 OO′ が 13 である。このとき，線分 AB の長さを求めよ。



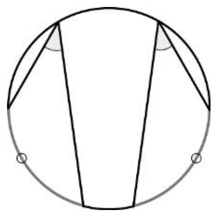
２節 円の性質

❶ 円周角の定理

（教科書 p.124）

中心角と円周角については，次の定理が成り立つ。

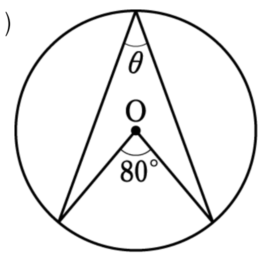
円周角の定理
定理 ［1］１つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。 ［2］１つの円で，大きさが等しい円周角に対する弧の長さは等しい。 ［3］１つの円で，長さが等しい弧に対する円周角の大きさは等しい。



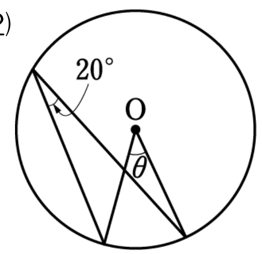
上の定理の[2]，[3]は，半径の等しい２つの円についても成り立つ。

問1 下の図で，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

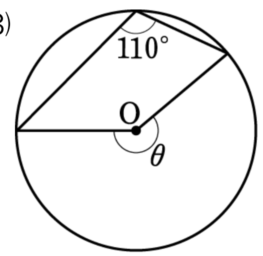
(1)



(2)



(3)

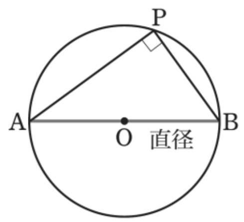


(1) $\theta = 80° \times \frac{1}{2} = 40°$

(2) $\theta = 20° \times 2 = 40°$

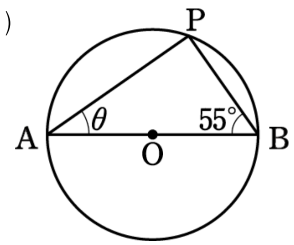
(3) $\theta = 110° \times 2 = 220°$

円 O において，直径 AB を引くと，弧 AB に対する中心角は 180° であるから，円周角の定理により，弧 AB に対する円周角は 90° となる。したがって，線分 AB を直径とする円周上に A，B とは異なる点 P をとると $\angle APB = 90°$ である。

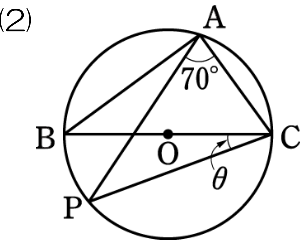


問2 下の図で，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

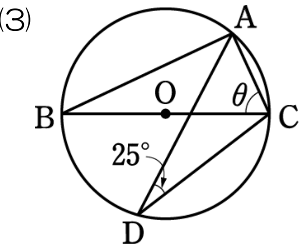
(1)



(2)



(3)



(1) AB は直径であるから

$\angle APB = 90°$

よって

$\theta = 180° - (90° + 55°) = 35°$

(2) BC は直径であるから

$\angle BAC = 90°$

よって

$\angle BAP = 90° - 70° = 20°$

円周角の定理により，$\angle BAP = \angle BCP$ であるから

$\theta = 20°$

(3) 円周角の定理により

$\angle ABC = \angle ADC = 25°$

BC は直径であるから

$\angle BAC = 90°$

よって

$\theta = 180° - (90° + 25°) = 65°$

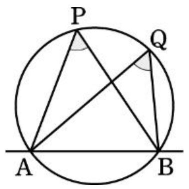
円周角の定理については，その逆が成り立つ。

円周角の定理の逆

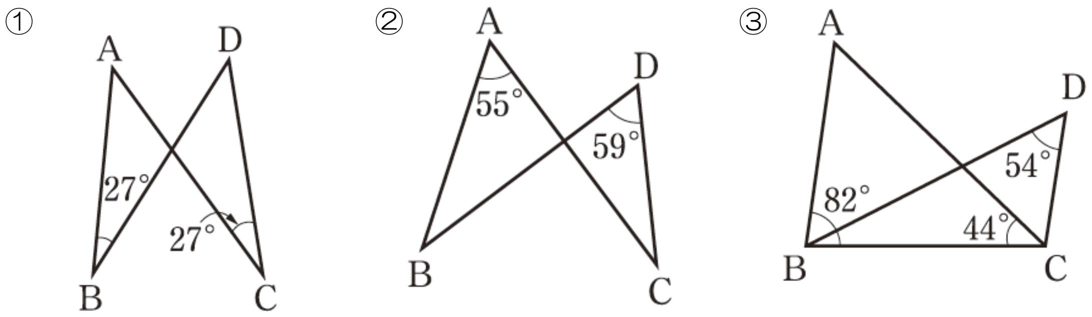
定理　4 点 A，B，P，Q について，P，Q が直線 AB に関して同じ側にあって

$\angle APB = \angle AQB$

ならば，この 4 点は同一円周上にある。



問3 次のうち，4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるものはどれか。



① $\angle ABD = \angle ACD$

② $\angle BAC \neq \angle BDC$

③ $\angle BAC = 180° - (82° + 44°) = 54°$ より

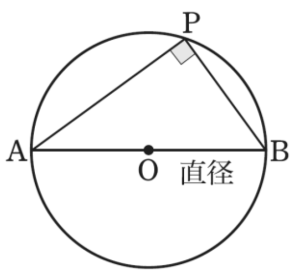
$\angle BAC = \angle BDC$

①〜③より，4 点が同一円周上にあるものは①と③

2 点 A，B に対し

$\angle APB = 90°$

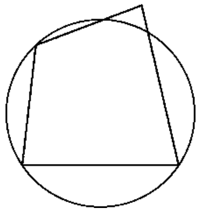
となる点 P は，AB を直径とする円周上にある。



❷ 円に内接する四角形

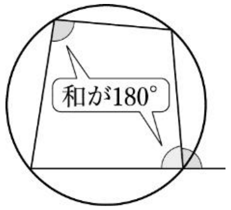
（教科書 p.126）

四角形の 4 つの頂点が 1 つの円周上にあるとき，その四角形は円に（[1] 内接する ）という。
三角形は必ず円に内接するが，四角形は円に内接するとはかぎらない。
円に内接する四角形の性質について考えてみよう。

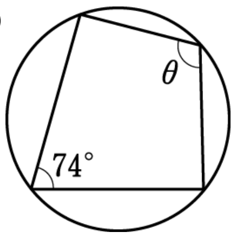


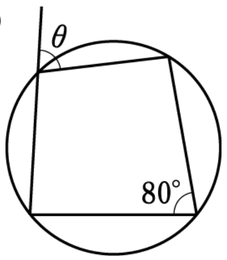
円に内接する四角形

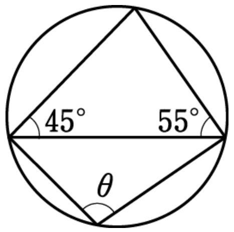
定理 円に内接する四角形では，次の[1]，[2] が成り立つ。
[1] 対角の和は 180° である。
[2] 外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。



問4 下の図で，角 θ を求めよ。

(1)


(2)


(3)


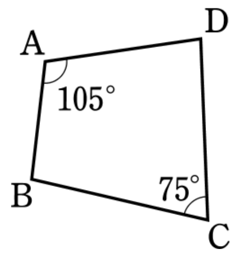
(1) 円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから
$\theta = 180° - 74° = 106°$
(2) 円に内接する四角形の外角は，それと隣り合う内角の対角に等しいから
$\theta = 80°$
(3) $\theta + \{180° - (45° + 55°)\} = 180°$ より
$\theta = 100°$

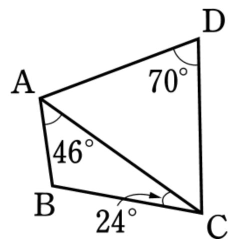
円に内接する四角形の定理は，その逆も成り立つ。

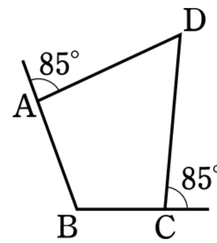
四角形が円に内接する条件

定理 次の[1]，[2]のいずれかが成り立つ四角形は円に内接する。
[1] 1 組の対角の和が 180° である。
[2] 1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しい。

問5 次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか。

①


②


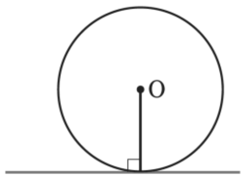
③


① $\angle A + \angle C = 105° + 75° = 180°$
② $\angle B = 180° - (46° + 24°) = 110°$
$\angle B + \angle D = 110° + 70° = 180°$
③ $\angle BAD = 180° - 85° = 95°$
よって，$\angle BAD$ と $\angle BCD$ の外角は等しくない。
①～③より，四角形 ABCD が円に内接するものは①，②

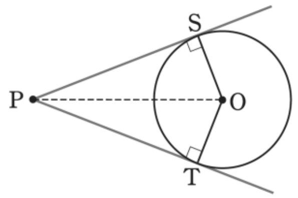
❸ 円と接線

（教科書 p.128）

直線と円がただ 1 点を共有するとき，この直線は円に（[1] 接する ）といい，この直線を円の（[2] 接線 ），その共有点を（[3] 接点 ）という。このとき，円の接線は，接点を通る半径に垂直である。

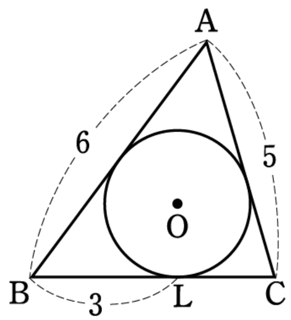


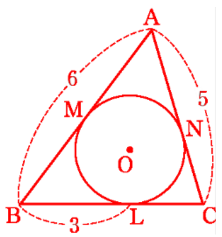
接線の長さ
定理　円の外部の 1 点からその円に引いた 2 本の接線において，その点から 2 つの接点までの距離は等しい。



円外の点から接点までの距離を（[4] 接線の長さ ）という。
円の 2 本の接線がつくる角の二等分線上に，その円の中心がある。

問6 右の図で，円 O は △ABC の内接円で，L は接点である。AB = 6，AC = 5，BL = 3 のとき，BC の長さを求めよ。





図のように，AB，AC と円 O との接点をそれぞれ M，N とする。
接線の長さの定理により

$\mathrm{BM} = \mathrm{BL} = 3$

$\mathrm{AM} = \mathrm{BA} - \mathrm{BM}$

$= 6 - 3 = 3$

$\mathrm{AN} = \mathrm{AM} = 3$

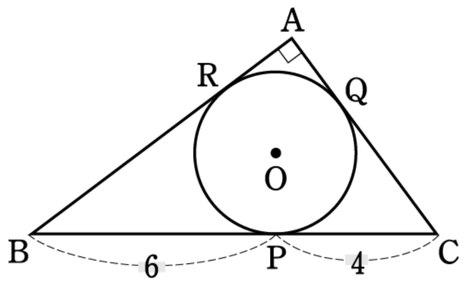
$\mathrm{CN} = \mathrm{AC} - \mathrm{AN}$

$= 5 - 3 = 2$

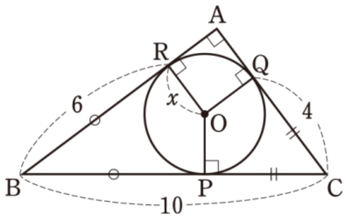
$\mathrm{CL} = \mathrm{CN} = 2$

よって $\mathrm{BC} = \mathrm{BL} + \mathrm{CL} = 3 + 2 = 5$

例題 1 右の図で，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。BP = 6，CP = 4 のとき，円 O の半径を求めよ。



解 四角形 AROQ は正方形であるから，円 O の半径を x とおくと



$AR = AQ = x$

一方

$BR = BP = 6$

$CQ = CP = 4$

であるから，△ABC に三平方の定理を用いて

$(x+6)^2 + (x+4)^2 = 10^2$

整理して

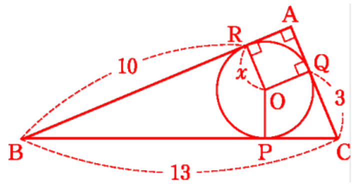
$x^2 + 10x - 24 = 0$

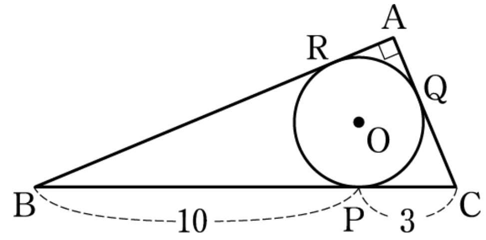
よって　$x = -12,\ 2$

x は半径であるから，$x > 0$ より　$x = 2$

したがって，円 O の半径は 2 である。

問7 右の図で，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。BP = 10，CP = 3 のとき，円 O の半径と AB, AC の長さをそれぞれ求めよ。





四角形 AROQ は正方形であるから，円 O の半径を x とおくと

$AR = AQ = x$

一方

$BR = BP = 10$

$CQ = CP = 3$

であるから，△ABC に三平方の定理を用いて

$(x+10)^2 + (x+3)^2 = 13^2$

整理して　$x^2 + 13x - 30 = 0$

$(x+15)(x-2) = 0$

よって　$x = -15,\ 2$

x は半径であるから，$x > 0$ より $x = 2$

したがって，円 O の半径は 2 である。

また

$AB = AR + RB = 2 + 10 = 12$

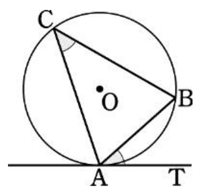
$AC = AQ + QC = 2 + 3 = 5$

❹ 接線と弦のつくる角

（教科書 p.130）

円の接線と接点を通る弦のつくる角について，次の定理が成り立つ。

接線と弦のつくる角
定理　円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



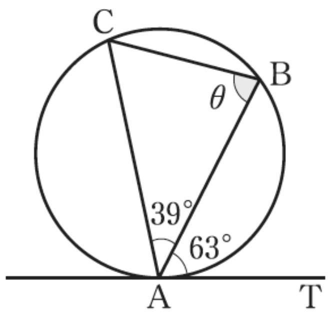
例1 右の図で，直線 AT が点 A で円に接しているとき，角 θ を求めてみよう。

接線と弦のつくる角の定理により，

$\angle ACB = \angle BAT = 63°$

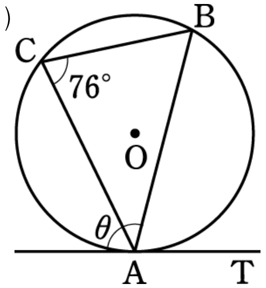
であるから

$\theta = 180° - (39° + 63°) = 78°$

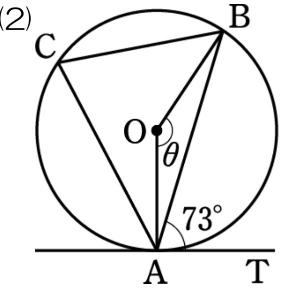


問8 下の図で，AT は円 O の接線，A は接点である。角 θ を求めよ。

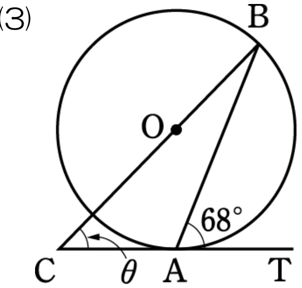
(1)



(2)



(3)



(1) $\angle BAT = \angle ACB = 76°$

よって

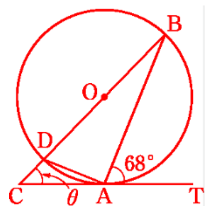
$\theta = 180° - 76° = 104°$

(2) $\angle ACB = \angle BAT = 73°$

よって，円周角の定理により

$\theta = 2 \times 73° = 146°$

(3) 図のように，BC と円 O との交点を D とし，A と D を結ぶ。



$\angle ADB = \angle BAT = 68°$

$\angle BAD = 90°$

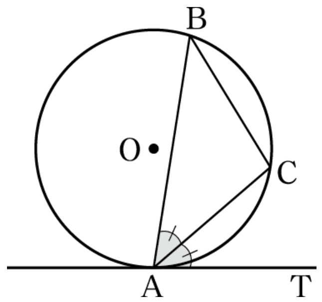
より　$\angle ABD = 180° - (68° + 90°) = 22°$

$\triangle ABC$ において，内角と外角の関係から

$\theta + \angle ABD = \angle BAT$

よって　$\theta = 68° - 22° = 46°$

例題 2 右の図で，AT は円 O の接線，A は接点である。弦 AC が ∠BAT を 2 等分するとき，△ ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。



解 仮定より　∠CAT = ∠BAC　　　　……①

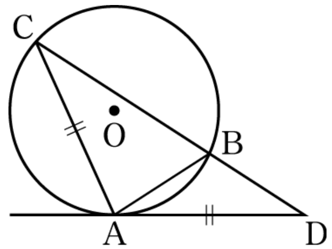
一方，接線と弦のつくる角の定理により

∠CAT = ∠ABC　　　　……②

①，②より，∠ABC = ∠BAC であるから，

△ ABC は二等辺三角形である。

問9 右の図で，AD は円 O の接線，A は接点である。AC = AD であるとき，BA = BD であることを証明せよ。



AC = AD であるから，△ ACD は二等辺三角形であり

∠ACB = ∠ADB　……①

また，接線と弦のつくる角の定理により

∠ACB = ∠DAB　……②

①，②より

∠ADB = ∠DAB

よって，△ ABD は二等辺三角形であり，

BA = BD である。

❺ 方べきの定理

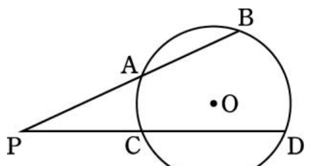
（教科書 p.132）

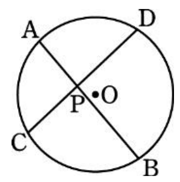
点 P を通る 2 直線と円 O との 4 つの交点が与えられたとき，P とこれらの点の間の距離には次の（[1] 方べきの定理 ）が成り立つ。

方べきの定理(1)

定理 点 P を通る 2 直線が，円 O とそれぞれ 2 点 A，B と 2 点 C，D で交わるとき

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

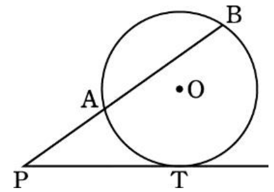




方べきの定理(2)

定理 点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A，B で交わり，もう一方が点 T で接するとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$



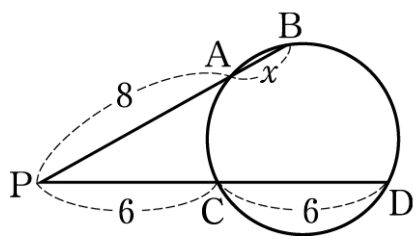
例2 右の図で，x を求めてみよう。

方べきの定理により

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

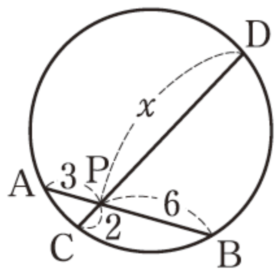
よって $8(x+8) = 6(6+6)$

すなわち $x = 1$

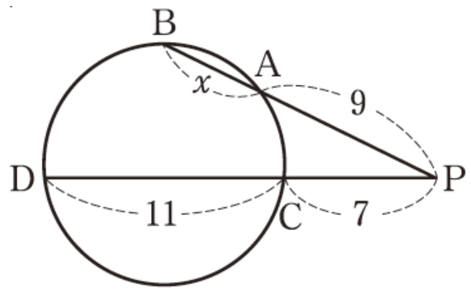


問 10 下の図で，x を求めよ。

(1)



(2)



(1) 方べきの定理により

$3 \cdot 6 = 2x$

よって $x = 9$

(2) 方べきの定理により

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

よって

$9(9+x) = 7(7+11)$

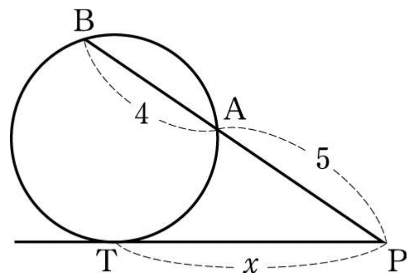
$81 + 9x = 126$

$9x = 45$

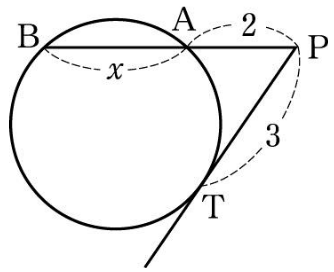
$x = 5$

問 11 下の図で，PT は接線，T は接点である。x を求めよ。

(1)



(2)



(1) 方べきの定理により

$5 \cdot (5+4) = x^2$

$x^2 = 45$

$x > 0$ より $x = 3\sqrt{5}$

(2) 方べきの定理により

$2(2+x) = 3^2$

$4 + 2x = 9$

$2x = 5$

$x = \frac{5}{2}$

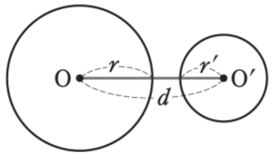
⑥ ２つの円

（教科書 p.134）

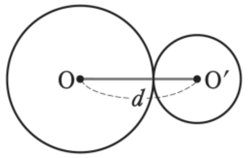
半径の異なる 2 つの円の位置関係については，下の図のように 5 通りの場合が考えられる。

(2)のような場合には 2 つの円は（[1] 外接する ）といい，(4)のような場合には（[2] 内接する ）という。いずれの場合も 2 つの円は 1 点を共有しており，その点を（[3] 接点 ）という。

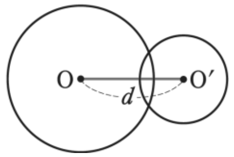
(1) 互いに外部にある



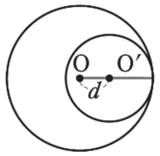
(2) （[1] 外接する ）



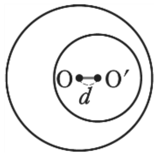
(3) 2 点で交わる



(4) （[2] 内接する ）



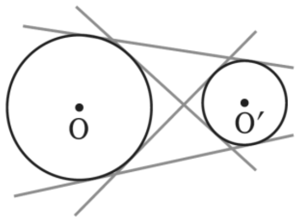
(5) 一方が他方を含む



2 つの円の位置関係は，それらの円の半径 r, r' と中心間の距離 d との関係で定まる。ただし，$r > r'$ とする。

(1)	$d > r + r'$	互いに外部にある
(2)	$d = r + r'$	外接する
(3)	$r - r' < d < r + r'$	2 点で交わる
(4)	$r - r' = d$	内接する
(5)	$r - r' > d$	一方が他方を含む

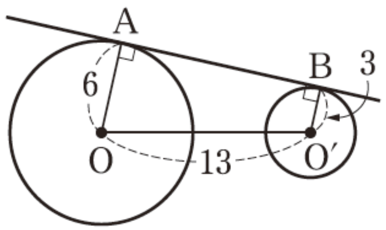
また，右の図のように 1 本の直線が 2 つの円の接線となることがある。このような接線を，2 円の（[4] 共通接線 ）という。



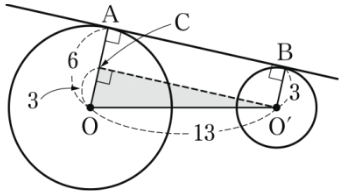
問 12 共通接線の本数は，上の 5 つの位置関係でどのように変わるか。

互いに外部にある ……4 本
外接する ……3 本
2 点で交わる ……2 本
内接する ……1 本
一方が他方を含む ……なし

例題 3 右の図で，直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線，A，B は接点である。円 O，O′ の半径はそれぞれ 6，3 で，中心間の距離 OO′ は 13 である。このとき，線分 AB の長さを求めよ。



解



図のように，点 O′ から線分 AO に垂線 O′C を下ろす。

四角形 ACO′B は長方形となるから

$\mathrm{CA} = \mathrm{O'B} = 3$

よって　$\mathrm{OC} = 6 - 3 = 3$

△OO′C において，三平方の定理により

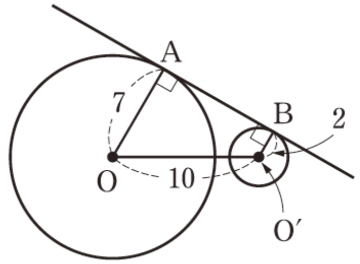
$\mathrm{CO'}^2 = \mathrm{OO'}^2 - \mathrm{OC}^2 = 13^2 - 3^2 = 160$

$\mathrm{CO'} > 0$ より　$\mathrm{CO'} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

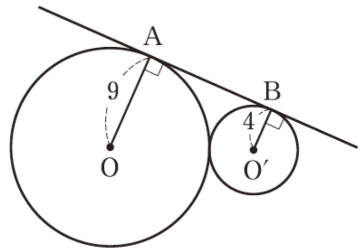
すなわち　$\mathrm{AB} = \mathrm{CO'} = 4\sqrt{10}$

問 13 下の図で，直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線，A，B は接点である。このとき，線分 AB の長さを求めよ。

(1)



(2)



円Oと円O′は外接する

(1) 点 O′ から線分 AO に垂線 O′C を下ろす。

四角形 ACO′B は長方形となるから

$\mathrm{CA} = \mathrm{O'B} = 2$

よって　$\mathrm{OC} = 7 - 2 = 5$

△COO′ において，三平方の定理により

$\mathrm{OC}^2 + \mathrm{CO'}^2 = \mathrm{OO'}^2$

$\mathrm{CO'}^2 = 10^2 - 5^2 = 75$

$\mathrm{CO'} > 0$ より　$\mathrm{CO'} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

すなわち　$\mathrm{AB} = \mathrm{CO'} = 5\sqrt{3}$

(2) 点 O′ から線分 AO に垂線 O′C を下ろす。

四角形 ACO′B は長方形となるから

$\mathrm{CA} = \mathrm{O'B} = 4$

よって　$\mathrm{OC} = 9 - 4 = 5$

また，中心間の距離 OO′ は，2 円の半径の和であるから

$\mathrm{OO'} = 9 + 4 = 13$

△COO′ において，三平方の定理により

$\mathrm{OC}^2 + \mathrm{CO'}^2 = \mathrm{OO'}^2$

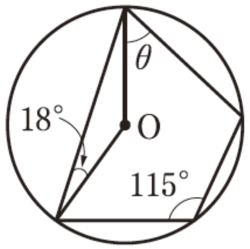
$\mathrm{CO'}^2 = 13^2 - 5^2 = 144$

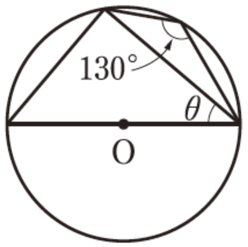
$\mathrm{CO'} > 0$ より　$\mathrm{CO'} = \sqrt{144} = 12$

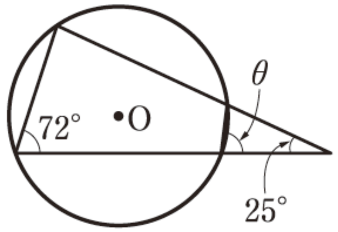
すなわち　$\mathrm{AB} = \mathrm{CO'} = 12$

（教科書 p.136）

6 下の図で，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

(1)


(2)


(3)


(1) 円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

$(18^\circ + \theta) + 115^\circ = 180^\circ$

よって　$\theta = 47^\circ$

(2) 半円の弧に対する円周角は 90° であり，また，円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

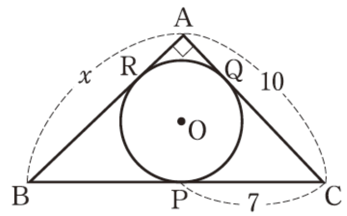
$(90^\circ - \theta) + 130^\circ = 180^\circ$

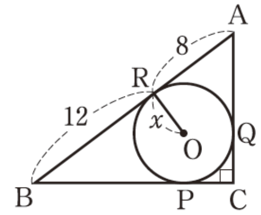
よって　$\theta = 40^\circ$

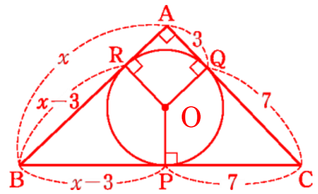
(3) 円に内接する四角形の外角は，それと隣り合う内角の対角に等しいから

$\theta = 180^\circ - (72^\circ + 25^\circ) = 83^\circ$

7 下の図で，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。x を求めよ。

(1)


(2)


(1)


$AR = AQ = 10 - 7$ より

$AR = AQ = 3$

したがって

$BR = BP = x - 3$

よって　$BC = (x-3) + 7 = x + 4$

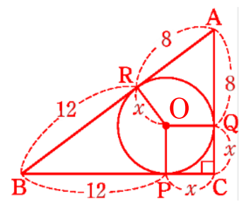
△ABC に三平方の定理を用いて

$x^2 + 10^2 = (x+4)^2$

$x^2 + 100 = x^2 + 8x + 16$

$8x = 84$

$x = \frac{21}{2}$

(2)


四角形 CQOP は正方形で，1 辺の長さは円 O の半径に等しいから

$CP = CQ = OR = x$

$BP = BR = 12$

$AQ = AR = 8$

△ABC に三平方の定理を用いて

$(8+x)^2 + (12+x)^2 = (12+8)^2$

整理して　$x^2 + 20x - 96 = 0$

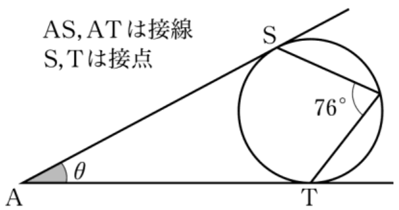
$(x+24)(x-4) = 0$

よって　$x = -24,\ 4$

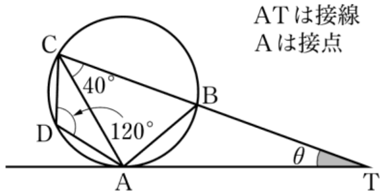
x は半径であるから，$x > 0$ より　$x = 4$

8 下の図で，角 θ を求めよ。

(1)



(2)



(1)　S と T を結ぶ。接線と弦のつくる角の定理により

$\angle\mathrm{AST} = 76°$，$\angle\mathrm{ATS} = 76°$

よって，$\triangle$ AST において

$\theta = 180° - (76° + 76°) = 28°$

(2)　四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle\mathrm{ABT} = \angle\mathrm{ADC} = 120°$

また，接線と弦のつくる角の定理により

$\angle\mathrm{BAT} = \angle\mathrm{ACB} = 40°$

よって，$\triangle$ ABT において

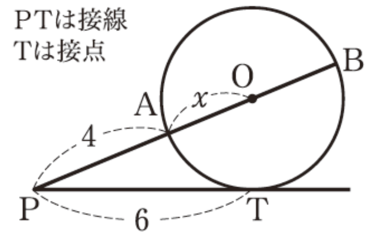
$\theta = 180° - (\angle\mathrm{ABT} + \angle\mathrm{BAT})$

$= 180° - (120° + 40°)$

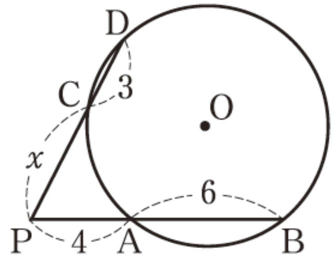
$= 20°$

9 下の図で，x を求めよ。ただし，O は円の中心である。

(1)



(2)



(1) 方べきの定理により

$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$

よって　$4(4+2x) = 6^2$

$16 + 8x = 36$

$8x = 20$

$x = \frac{5}{2}$

(2) 方べきの定理により

$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

よって　$4(4+6) = x(x+3)$

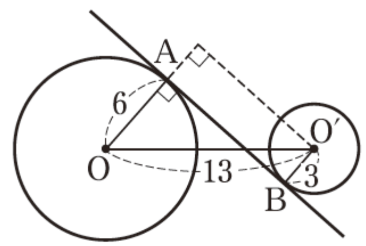
整理して　$x^2 + 3x - 40 = 0$

$(x+8)(x-5) = 0$

したがって　$x = -8$，5

$x > 0$ より　$x = 5$

10 右の図で，直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線，A，B は接点である。円 O，O′ の半径がそれぞれ 6，3 で，中心間の距離 OO′ が 13 である。このとき，線分 AB の長さを求めよ。



点 O′ から線分 OA の延長に垂線 O′C を下ろす。

四角形 ABO′C は長方形となるから

$\mathrm{AC} = \mathrm{BO'} = 3$

よって　$\mathrm{CO} = 3 + 6 = 9$

$\triangle$ COO′ において，三平方の定理により

$\mathrm{OC}^2 + \mathrm{CO'}^2 = \mathrm{OO'}^2$

$\mathrm{CO'}^2 = 13^2 - 9^2 = 88$

$\mathrm{CO'} > 0$ より　$\mathrm{CO'} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$

すなわち　$\mathrm{AB} = \mathrm{CO'} = 2\sqrt{22}$