１節 三角形と比

❶ 三角形と比

（教科書 p.108）

三角形における比の性質については，中学校で次のことを学んだ。

三角形と比

定理 △ABC の辺 AB，AC またはそれらの延長上に，それぞれ点 D，E があるとき

［1］ DE//BC ならば

AD : AB = AE : AC

= DE : BC

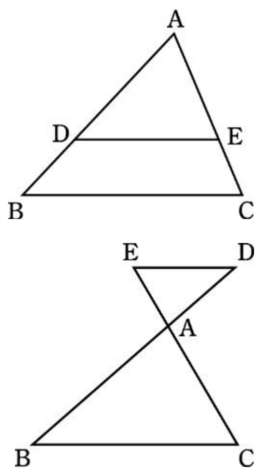
AD : DB = AE : EC

［2］ AD : AB = AE : AC ならば

DE//BC

［3］ AD : DB = AE : EC ならば

DE//BC



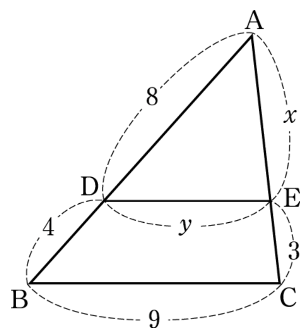
例1 右の図で，DE//BC とするとき，x，y を求めてみよう。

AD : DB = AE : EC

であるから

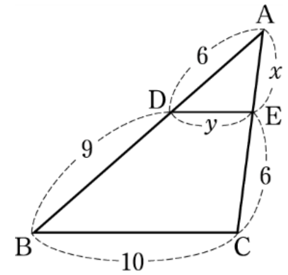
AD : AB = DE : BC

であるから

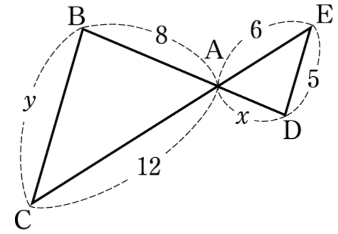


問1 下の図で，DE//BC とするとき，x，y を求めよ。

.(1)



(2)



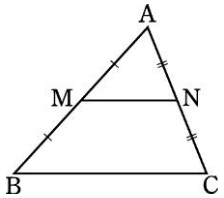
とくに, D と E がそれぞれ辺 AB, AC の中点になっているときには, 次の([1]　　　　　　　　　　)が成り立つ。

中点連結定理

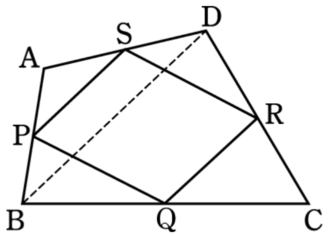
定理　△ABC の 2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき

$MN//BC$

$MN=\frac{1}{2}BC$



問2 右の図で, 四角形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とする。このとき，次の問に答えよ。



(1) 四角形 PQRS はどのような四角形になるか。

(2) AC = BD のとき，四角形 PQRS はどのような四角形になるか。

内分と外分

（教科書 p.110）

線分 AB 上に点 P があり

$AP:PB=m:n$

であるとき,

P は AB を $m:n$ に ([2]　　　　　　　) という。

また，線分 AB の延長上に点 Q があり

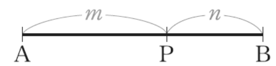
$AQ:QB=m:n$

であるとき,

Q は AB を $m:n$ に ([3]　　　　　　　) という。

※線分を 1 : 1 に外分する点はない。

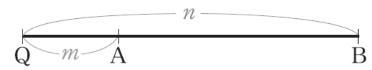
[内分]



[外分]

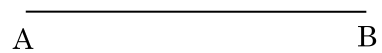
$m>n$ のとき

$m<n$ のとき

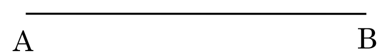


例2 線分 AB に対して，次のように内分する点，外分する点を図示してみよう。

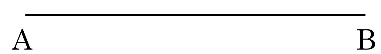
(1)　AB を 2 : 3 に内分する点 P



(2)　AB を 3 : 1 に外分する点 Q



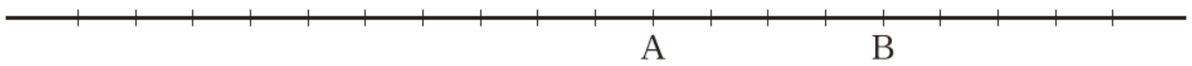
(3)　AB を 1 : 4 に外分する点 R



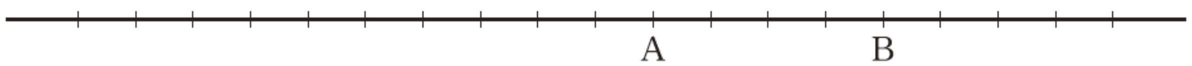
問3 次の点を下記の図に図示せよ。

(1) 線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P

(2) 線分 AB を 5 : 1 に外分する点 Q



(3) 線分 AB を 2 : 3 に外分する点 R



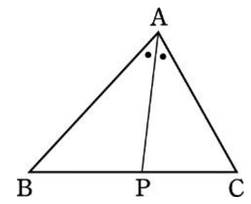
三角形の内角と外角の二等分線

（教科書 p.111）

内角の二等分線と比

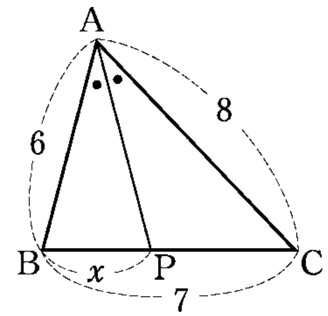
定理 △ABC の ∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると，P は BC を AB : AC に内分する。すなわち

BP : PC = AB : AC

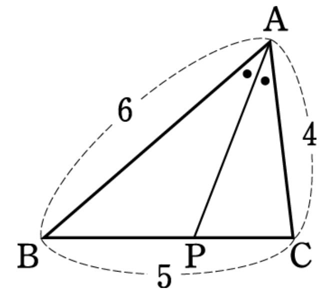


例3 右の図で，AP が △ABC の ∠A の二等分線であるとき，x を求めてみよう。

BP : PC = AB : AC であるから

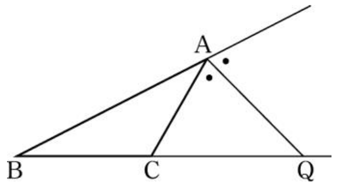


問4 △ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を P とするとき，BP，PC の長さをそれぞれ求めよ。

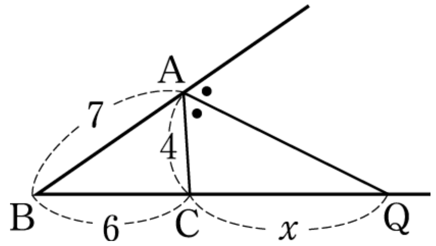


外角の二等分線と比

定理　△ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすると，Q は BC を AB：AC に外分する。
すなわち
BQ：QC = AB：AC

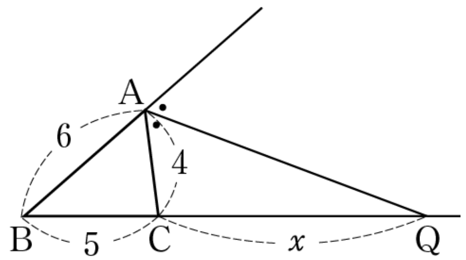


例4 右の図で，AQ が △ABC の頂点 A における外角の二等分線であるとき，x を求めてみよう。
BQ：QC = AB：AC であるから



よって

問5 △ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。頂点 A における外角の二等分線と BC の延長との交点を Q とするとき，CQ の長さを求めよ。



② 三角形の重心・外心・内心

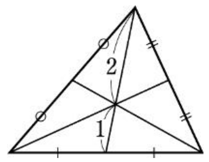
三角形の重心

（教科書 p.113）

三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を（[1] ）という。

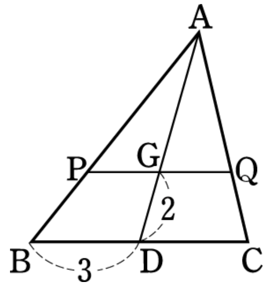
三角形の重心

定理 三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。
その交点は，それぞれの中線を 2 : 1 に内分する。



三角形の 3 本の中線の交点を，その三角形の（[2] ）という。

問6 右の図で，点 G は $\triangle$ ABC の重心で，線分 PQ は G を通って辺 BC に平行である。BD = 3，GD = 2 のとき，AG，PQ の長さを求めよ。

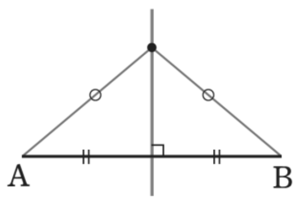


三角形の外心

（教科書 p.114）

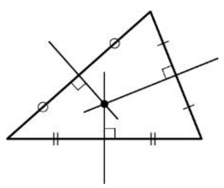
線分 AB の垂直二等分線上の点は，両端 A，B から等距離にある。また，両端 A，B から等距離にある点は AB の垂直二等分線上にある。

このことから，次の定理が成り立つ。



三角形の外心

定理 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。



証明 $\triangle$ ABC において，2 辺 BC，CA の垂直二等分線の交点を O とすると

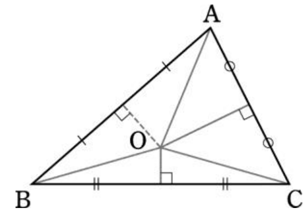
OB = OC かつ OC = OA

であるから

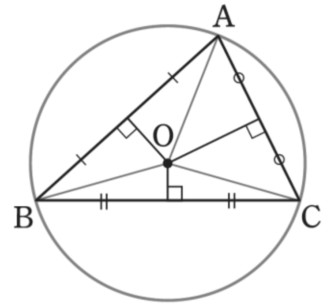
OB = OA

よって，O は辺 AB の垂直二等分線上にある。

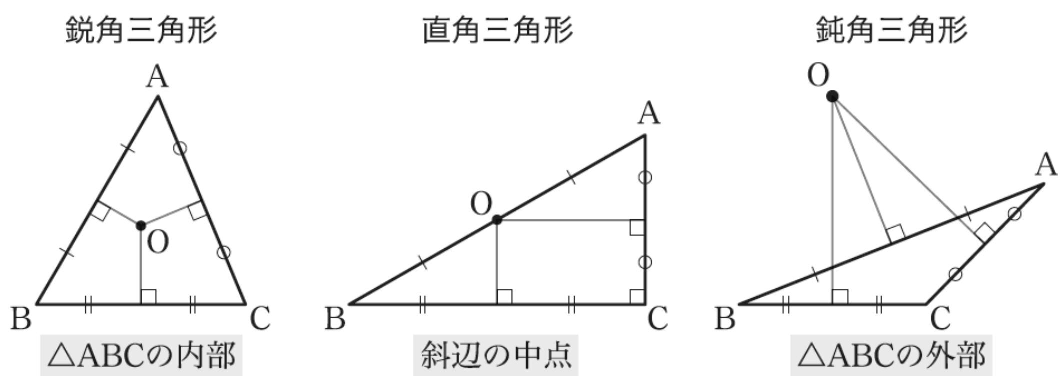
すなわち，3 辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。



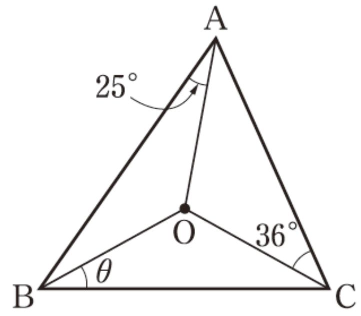
上の証明より，OA = OB = OC であるから，点 O は 3 つの頂点から等距離にある。よって，O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができる。この円を三角形の（[3] ）といい，中心 O を三角形の（[4] ）という。



鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形の外心 O の位置は，それぞれ下の図のようになる。



例5 右の図で，点 O が $\triangle$ABC の外心であり，$\angle$OAB $= 25°$，$\angle$OCA $= 36°$ のとき，角 θ を求めよ。



点 O は $\triangle$ABC の外心であるから

OA = OB = OC より

$\triangle$OAB，$\triangle$OBC，$\triangle$OCA は二等辺三角形である。

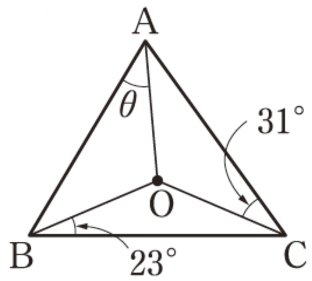
よって　$\angle$OBA =

$\angle$OAC =

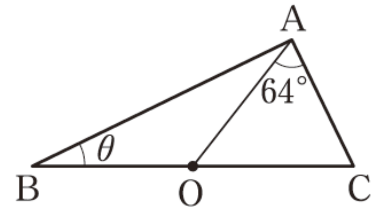
$\angle$OCB =

問7 下の図で，点 O が $\triangle$ABC の外心であるとき，角 θ を求めよ。

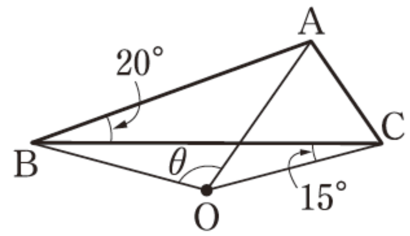
(1)



(2)



(3)

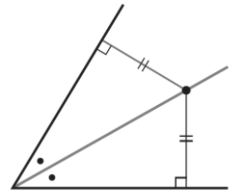


三角形の内心

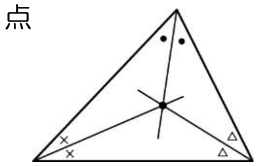
（教科書 p.116）

角の二等分線上の点は，角をつくる 2 辺から等距離にある。また，2 辺から等距離にある点は，角の二等分線上にある。

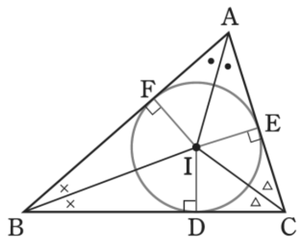
このことから，次の定理が成り立つ。



三角形の内心
定理　三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。



右の図で，ID = IE = IF であるから，点 I は 3 点 D，E，F から等距離にある。よって，I を中心として D，E，F を通る円をかくことができる。この円は三角形の 3 辺に接しているので，三角形の（⁵　　　　　　　）といい，中心 I を三角形の（⁶　　　　　　）という。



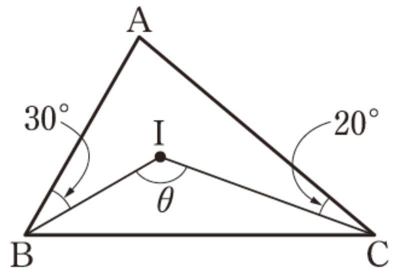
例6 右の図で，点 I が △ABC の内心であり，∠IBA = 30°，∠ICA = 20° のとき，角 θ を求めよ。

点 I は △ABC の内心であるから

∠IBC =

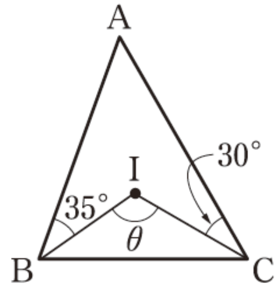
∠ICB =

よって △IBC において

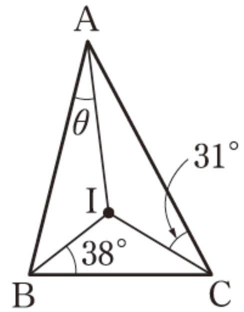


問8 下の図で，点 I が △ABC の内心であるとき，角 θ を求めよ。

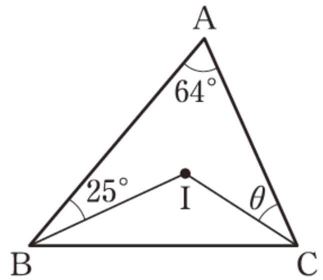
(1)



(2)



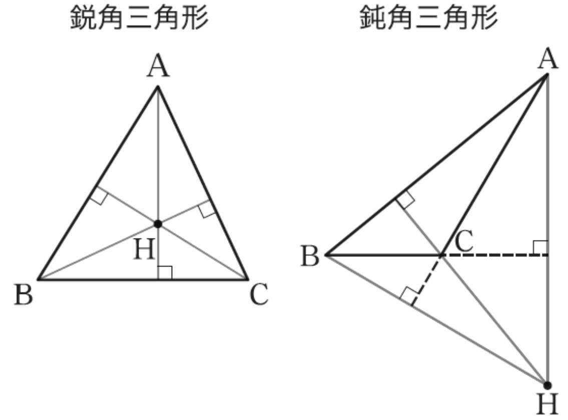
(3)



参考 三角形の垂心

(教科書 p.117)

△ABC の 3 つの頂点から対辺，またはその延長上に下ろした 3 本の垂線は，1 点 H で交わる。この点 H を三角形の（[1]　　　　　　）という。



問1 辺 AB を斜辺とする直角三角形 ABC の垂心の位置はどこか。

③ 三角形の比の定理

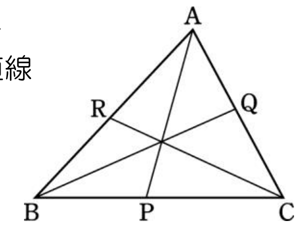
チェバの定理

(教科書 p.118)

チェバの定理

定理 △ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交われば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

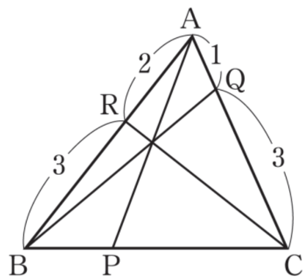


例7 右の図で

AQ : QC = 1 : 3

AR : RB = 2 : 3

であるとき，BP : PC を求めてみよう。



チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \qquad \cdots\cdots①$$

ここで

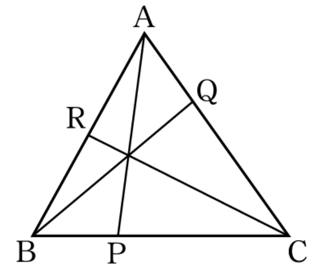
$$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{1} \qquad \cdots\cdots②$$

$$\frac{AR}{RB}=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots③$$

であるから，②，③を①に代入して

よって

問9 右の図で，点 Q，R がそれぞれ辺 AC，AB を次の比に内分するとき，BP : PC を求めよ。



(1) AQ : QC = 2 : 3，AR : RB = 2 : 1

(2) AQ : QC = 3 : 1，AR : RB = 3 : 1

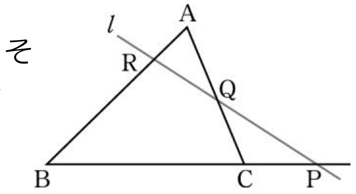
メネラウスの定理

（教科書p.120）

メネラウスの定理

定理 直線 l が $\triangle$ABC の辺 BC, CA, AB, またはその延長と，それぞれ点 P，Q，R で交われば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

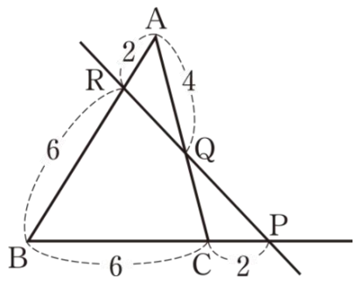


例8 右の図で，CQ の長さを求めてみよう。

メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

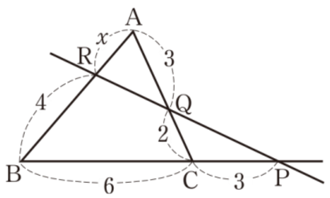
であるから



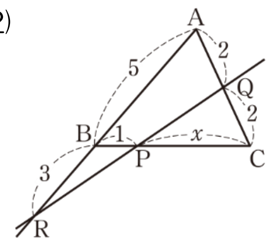
よって

問 10 下の図で，x を求めよ。

(1)



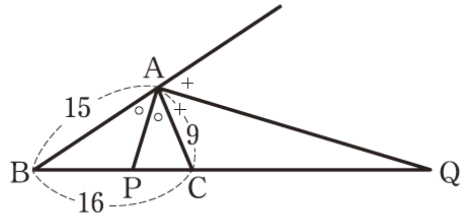
(2)



（教科書 p.121）

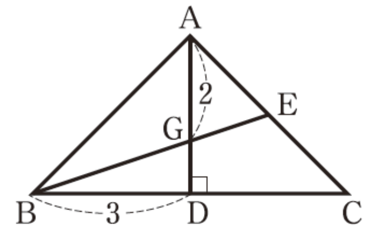
1 △ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 15，16，9 とする。頂点 A における内角の二等分線と辺 BC との交点を P，外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を Q とするとき，次の長さを求めよ。

(1) BP　　(2) BQ



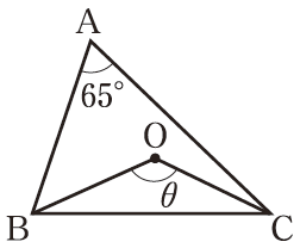
2 右の図で，点 G は △ABC の重心で，AG = 2，BD = 3，∠ADC = 90° である。次の長さを求めよ。

(1) AE　　(2) GE

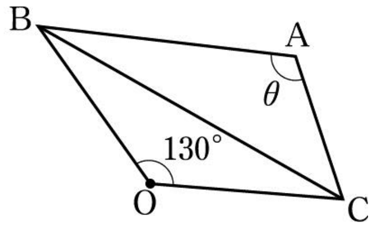


3 下の図で，点 O が $\triangle$ABC の外心であるとき，角 θ を求めよ。

(1)

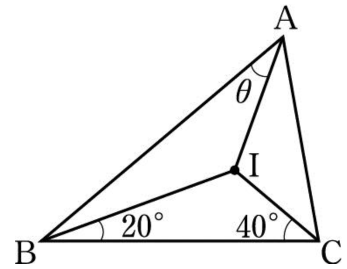


(2)

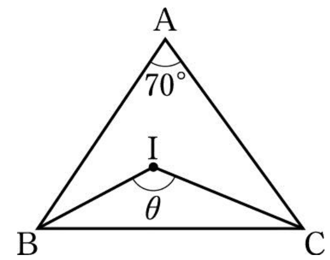


4 下の図で，点 I が $\triangle$ABC の内心であるとき，角 θ を求めよ。

(1)



(2)



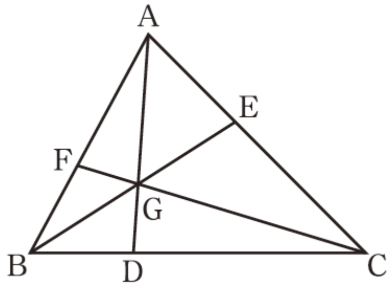
5 右の図において

$AF : FB = 3 : 2$, $AE : EC = 2 : 3$

であるとき，次の比を求めよ。

(1) $BD : DC$

(2) $AG : GD$

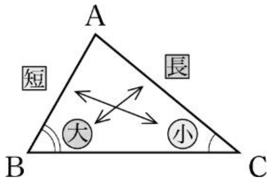


参考 辺と角の大小関係

（教科書 p.122）

一般に，次の定理が成り立つ。

辺と角の大小関係
定理 三角形において，長い辺に対する角は，短い辺に対する角より大きい。また，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より長い。



このことを用いると，三角形の3辺の長さについて，以下の関係が成り立つことが示される。

三角形の3辺の長さの関係
定理 三角形において，2辺の長さの和は，他の1辺の長さより大きい。

問1 2辺の長さの和と他の1辺の長さを比較することにより，3辺の長さが次のような $\triangle ABC$ が存在するかどうか調べよ。

$AB = 6$, $BC = 2$, $CA = 3$

1節 三角形と比

❶ 三角形と比

（教科書 p.108）

三角形における比の性質については，中学校で次のことを学んだ。

三角形と比

定理 △ABC の辺 AB，AC またはそれらの延長上に，それぞれ点 D，E があるとき

［1］ DE//BC ならば

$AD : AB = AE : AC$

$= DE : BC$

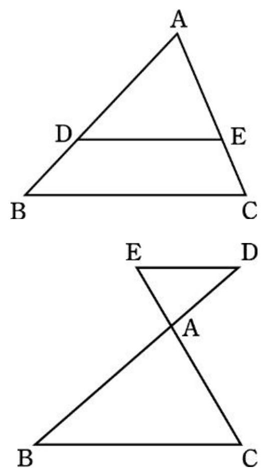
$AD : DB = AE : EC$

［2］ $AD : AB = AE : AC$ ならば

DE//BC

［3］ $AD : DB = AE : EC$ ならば

DE//BC



例1 右の図で，DE//BC とするとき，x，y を求めてみよう。

$AD : DB = AE : EC$

であるから $8 : 4 = x : 3$

よって　　$4x = 24$

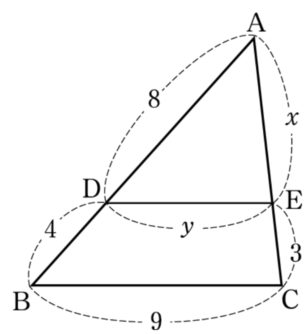
したがって $x = 6$

$AD : AB = DE : BC$

であるから $8 : 12 = y : 9$

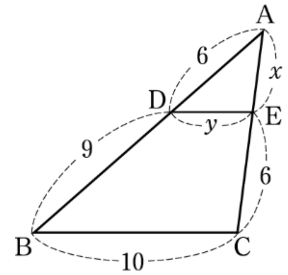
よって　　$12y = 72$

したがって $y = 6$

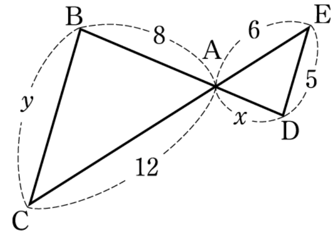


問1 下の図で，DE//BC とするとき，x，y を求めよ。

(1)



(2)



(1) $AD : DB = AE : EC$ であるから

$6 : 9 = x : 6$

$9x = 36$

$x = 4$

$AD : AB = DE : BC$ であるから

$6 : (6+9) = y : 10$

$15y = 60$

$y = 4$

(2) $AB : AD = AC : AE$ であるから

$8 : x = 12 : 6$

$12x = 48$

$x = 4$

$AC : AE = BC : DE$ であるから

$12 : 6 = y : 5$

$6y = 60$

$y = 10$

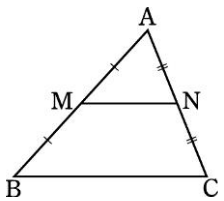
とくに, D と E がそれぞれ辺 AB, AC の中点になっているときには, 次の([1] 中点連結定理)が成り立つ。

中点連結定理

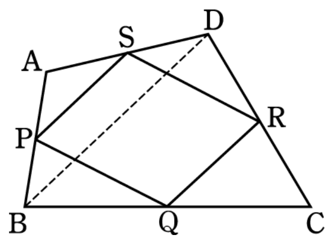
定理 △ABC の 2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき

$MN//BC$

$MN=\frac{1}{2}BC$



問2 右の図で, 四角形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R，S とする。このとき，次の問に答えよ。



(1) 四角形 PQRS はどのような四角形になるか。

B と D を結ぶ。△ABD において，P，S はそれぞれ AB，AD の中点であるから，中点連結定理により

$PS//BD,\ PS=\frac{1}{2}BD$

同様に，△CBD において

$QR//BD,\ QR=\frac{1}{2}BD$

よって，PS//QR，PS = QR となり，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，四角形 PQRS は平行四辺形になる。

(2) AC = BD のとき，四角形 PQRS はどのような四角形になるか。

(1)より

$PS=QR=\frac{1}{2}BD$

(1)と同様にして，A と C を結んで考えると

$PQ=SR=\frac{1}{2}AC$

AC = BD であるから

$PS=QR=PQ=SR$

よって，4 つの辺がすべて等しいから，四角形 PQRS はひし形になる。

内分と外分

(教科書 p.110)

線分 AB 上に点 P があり

$AP:PB=m:n$

であるとき，

P は AB を $m:n$ に ([2] 内分する) という。

また，線分 AB の延長上に点 Q があり

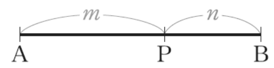
$AQ:QB=m:n$

であるとき，

Q は AB を $m:n$ に ([3] 外分する) という。

※線分を 1 : 1 に外分する点はない。

[内分]



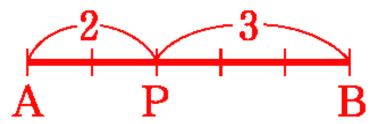
[外分]

$m>n$ のとき

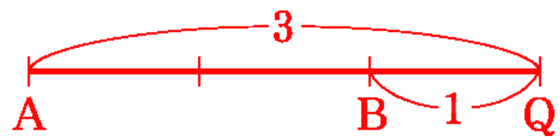
$m<n$ のとき

例2 線分 AB に対して，次のように内分する点，外分する点を図示してみよう。

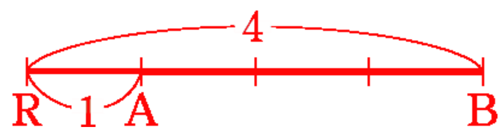
(1) AB を 2 : 3 に内分する点 P



(2) AB を 3 : 1 に外分する点 Q

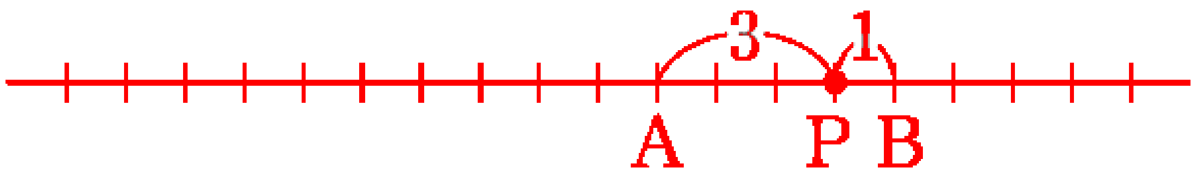


(3) AB を 1 : 4 に外分する点 R

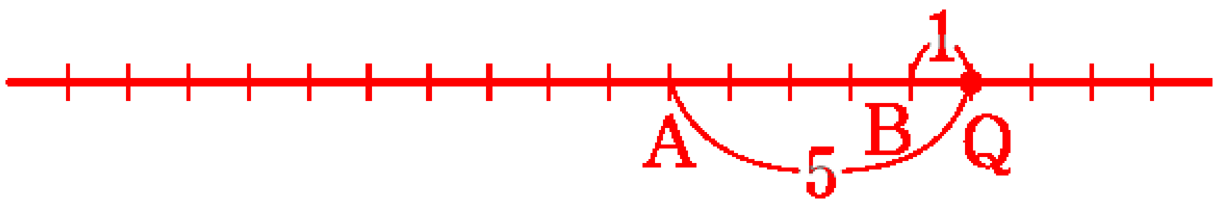


問3 次の点を下記の図に図示せよ。

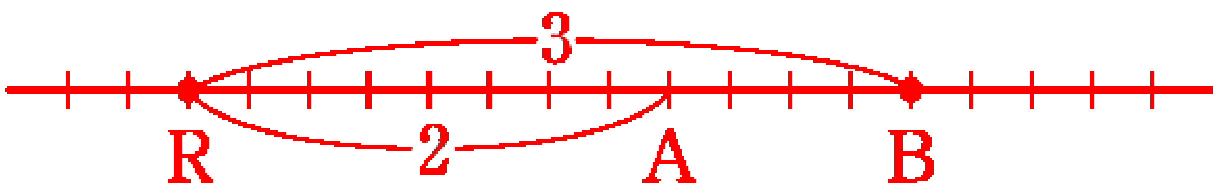
(1) 線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P



(2) 線分 AB を 5 : 1 に外分する点 Q



(3) 線分 AB を 2 : 3 に外分する点 R



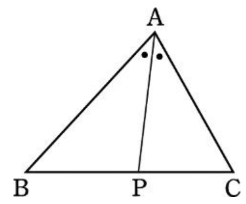
三角形の内角と外角の二等分線

（教科書 p.111）

内角の二等分線と比

定理　△ABC の ∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると，P は BC を AB : AC に内分する。すなわち

BP : PC = AB : AC



例3 右の図で，AP が △ABC の ∠A の二等分線であるとき，x を求めてみよう。

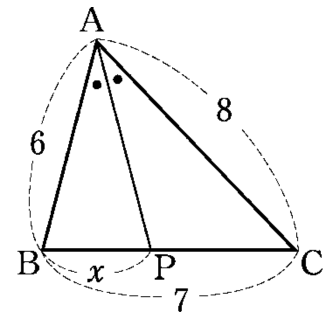
BP : PC = AB : AC であるから

$x : (7-x) = 6 : 8$

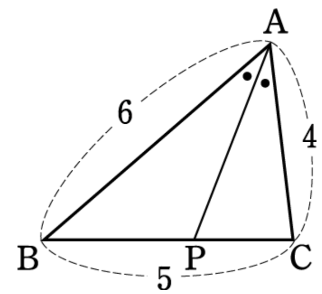
よって

$8x = 6(7-x)$

したがって　$x = 3$



問4 △ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を P とするとき，BP，PC の長さをそれぞれ求めよ。



△ABC において，内角の二等分線と比の定理により

BP : PC = AB : AC

= 6 : 4

= 3 : 2

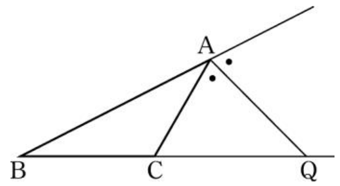
よって

$BP = \frac{3}{3+2}BC = \frac{3}{5}\cdot 5 = 3$

$PC = BC - BP = 5 - 3 = 2$

外角の二等分線と比

定理 △ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすると，Q は BC を AB : AC に外分する。
すなわち
BQ : QC = AB : AC



例4 右の図で，AQ が △ABC の頂点 A における外角の二等分線であるとき，x を求めてみよう。

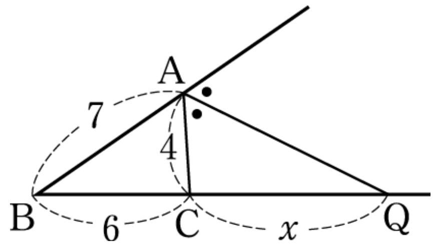
BQ : QC = AB : AC であるから

$(6 + x) : x = 7 : 4$

よって

$7x = 4(6 + x)$

$x = 8$



問5 △ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。頂点 A における外角の二等分線と BC の延長との交点を Q とするとき，CQ の長さを求めよ。

△ABC において，外角の二等分線と比の定理により

BQ : QC = AB : AC

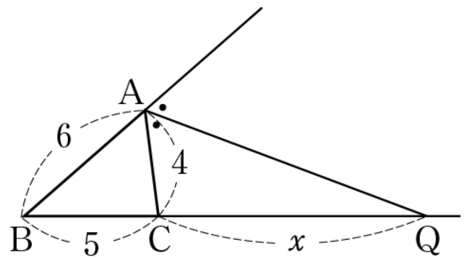
CQ = x とおくと

$(5 + x) : x = 6 : 4$

$6x = 4(x + 5)$

$x = 10$

よって　CQ = 10



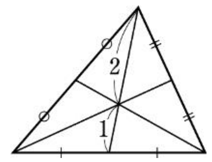
❷ 三角形の重心・外心・内心

三角形の重心

（教科書 p.113）

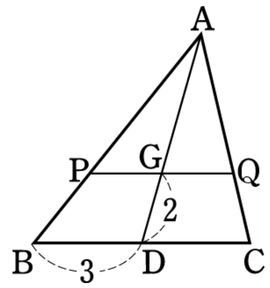
三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を（[1] 中線 ）という。

三角形の重心
定理　三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。 その交点は，それぞれの中線を 2 : 1 に内分する。



三角形の 3 本の中線の交点を，その三角形の（[2] 重心 ）という。

問6 右の図で，点 G は △ABC の重心で，線分 PQ は G を通って辺 BC に平行である。BD = 3，GD = 2 のとき，AG，PQ の長さを求めよ。



点 G は △ABC の重心であるから

$AG : GD = 2 : 1$

$AG = 2GD = 2 \cdot 2 = 4$

点 D は辺 BC の中点であるから

$DC = 3$

よって

$BC = 3 + 3 = 6$

PQ//BC であるから，三角形と比の定理により

$PQ : BC = AP : AB$

$= AG : AD$

よって　$PQ : 6 = 2 : 3$

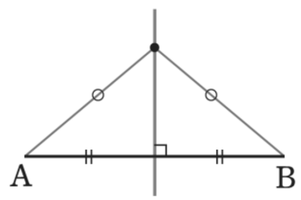
$3PQ = 12$

したがって　$PQ = 4$

三角形の外心

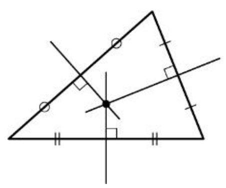
（教科書 p.114）

線分 AB の垂直二等分線上の点は，両端 A，B から等距離にある。また，両端 A，B から等距離にある点は AB の垂直二等分線上にある。



このことから，次の定理が成り立つ。

三角形の外心
定理　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。



証明　△ABC において，2 辺 BC，CA の垂直二等分線の交点を O とすると

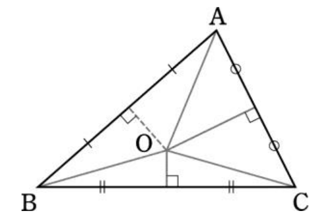
OB = OC　かつ　OC = OA

であるから

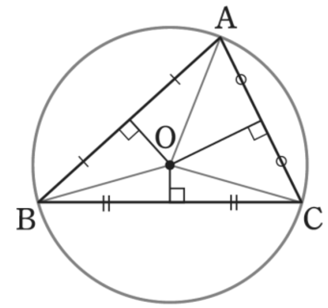
OB = OA

よって，O は辺 AB の垂直二等分線上にある。

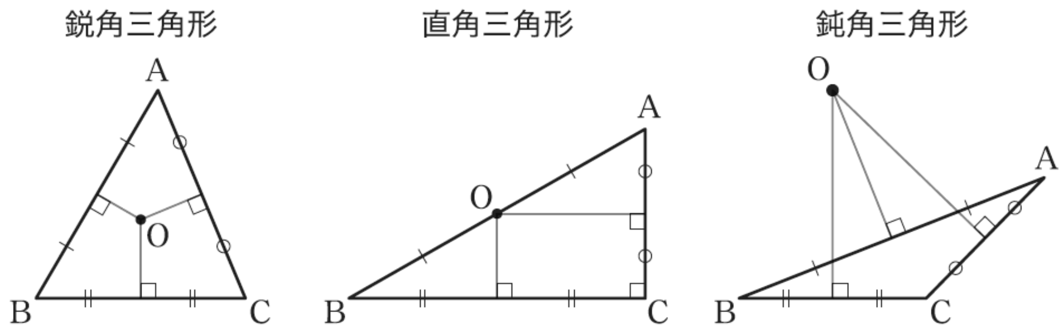
すなわち，3 辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。



上の証明より，OA = OB = OC であるから，点 O は 3 つの頂点から等距離にある。よって，O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができる。この円を三角形の（[3] 外接円 ）といい，中心 O を三角形の（[4] 外心 ）という。

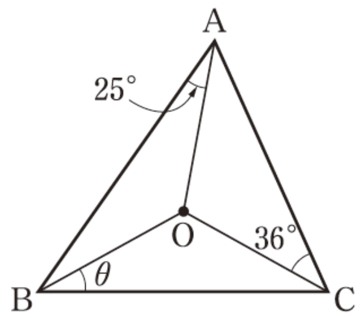


鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形の外心 O の位置は，それぞれ下の図のようになる。



△ABCの内部　　斜辺の中点　　△ABCの外部

例5 右の図で，点 O が $\triangle$ ABC の外心であり，$\angle$OAB $= 25°$，$\angle$OCA $= 36°$ のとき，角 θ を求めよ。



点 O は $\triangle$ ABC の外心であるから

OA $=$ OB $=$ OC より

$\triangle$ OAB，$\triangle$ OBC，$\triangle$ OCA は二等辺三角形である。

よって　$\angle$OBA $=$ $\angle$OAB $= 25°$

$\angle$OAC $=$ $\angle$OCA $= 36°$

$\angle$OCB $=$ $\angle$OBC $= \theta$

$\triangle$ ABC において

$2(\angle\text{OAB} + \angle\text{OCA} + \angle\text{OBC}) = 180°$

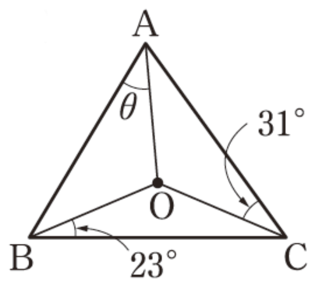
ゆえに

$2(25° + 36° + \theta) = 180°$

したがって　$\theta = 29°$

問7 下の図で，点 O が $\triangle$ ABC の外心であるとき，角 θ を求めよ。

(1)



点 O は $\triangle$ ABC の外心であるから

OA $=$ OB $=$ OC より

$\triangle$ OAB，$\triangle$ OBC，$\triangle$ OCA は二等辺三角形である。

よって　$\angle$OBA $=$ $\angle$OAB $= \theta$

$\angle$OCB $=$ $\angle$OBC $= 23°$

$\angle$OAC $=$ $\angle$OCA $= 31°$

$\triangle$ ABC において

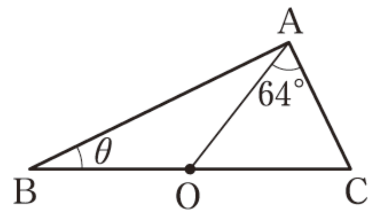
$2(\angle\text{OAB} + \angle\text{OBC} + \angle\text{OCA}) = 180°$

ゆえに

$2(\theta + 23° + 31°) = 180°$

したがって　$\theta = 36°$

(2)



点 O は $\triangle$ ABC の外心であるから

OA $=$ OB $=$ OC より

$\triangle$ OAB，$\triangle$ OCA は二等辺三角形である。

よって　$\angle$OAB $=$ $\angle$OBA $= \theta$

$\angle$OCA $=$ $\angle$OAC $= 64°$

$\triangle$ ABC において

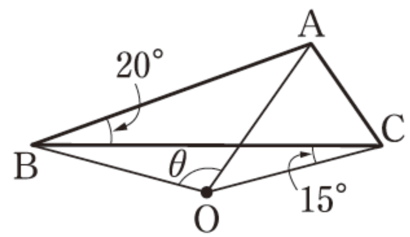
$2(\angle\text{OBA} + \angle\text{OAC}) = 180°$

ゆえに

$2(\theta + 64°) = 180°$

したがって　$\theta = 26°$

(3)



点 O は $\triangle$ ABC の外心であるから

OA $=$ OB $=$ OC より

$\triangle$ OAB，$\triangle$ OBC は二等辺三角形である。

よって　$\angle$OBC $=$ $\angle$OCB $= 15°$

$\angle$OAB $=$ $\angle$OBA

$= \angle$OBC $+ \angle$CBA

$= 15° + 20° = 35°$

$\triangle$ OAB において

$\angle\text{OAB} + \angle\text{OBA} + \angle\text{AOB} = 180°$

ゆえに

$35° + 35° + \theta = 180°$

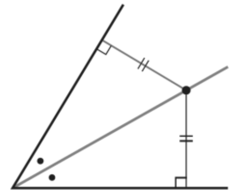
したがって　$\theta = 110°$

三角形の内心

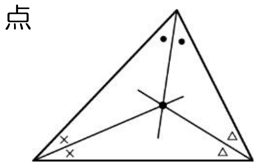
（教科書 p.116）

角の二等分線上の点は，角をつくる 2 辺から等距離にある。また，2 辺から等距離にある点は，角の二等分線上にある。

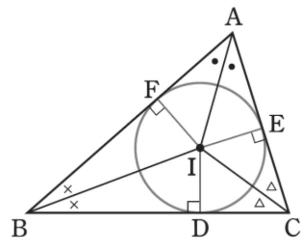
このことから，次の定理が成り立つ。



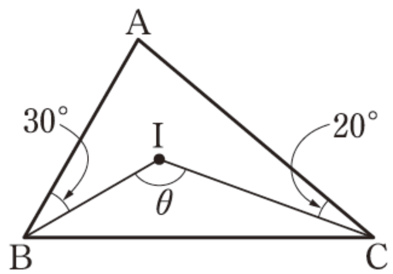
三角形の内心
定理　三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。



右の図で，ID = IE = IF であるから，点 I は 3 点 D，E，F から等距離にある。よって，I を中心として D，E，F を通る円をかくことができる。この円は三角形の 3 辺に接しているので，三角形の（5　内接円　）といい，中心 I を三角形の（6　内心　）という。



例6 右の図で，点 I が △ ABC の内心であり，∠IBA = 30°，∠ICA = 20° のとき，角 θ を求めよ。



点 I は △ ABC の内心であるから

$\angle IBC = \angle IBA = 30°$

$\angle ICB = \angle ICA = 20°$

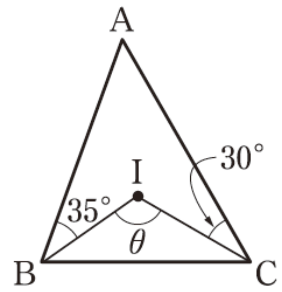
よって △ IBC において

$30° + 20° + \theta = 180°$

したがって　$\theta = 130°$

問8 下の図で，点 I が △ ABC の内心であるとき，角 θ を求めよ。

(1)



点 I は △ ABC の内心であるから

$\angle IBC = \angle IBA = 35°$

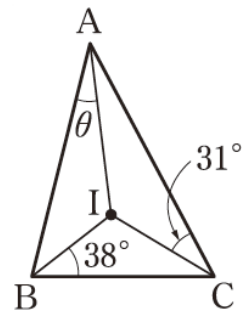
$\angle ICB = \angle ICA = 30°$

よって △ IBC において

$35° + 30° + \theta = 180°$

したがって　$\theta = 115°$

(2)



点 I は △ ABC の内心であるから

$\angle ICB = \angle ICA = 31°$

$\angle IBA = \angle IBC = 38°$

$\angle IAC = \angle IAB = \theta$

よって　△ ABC において

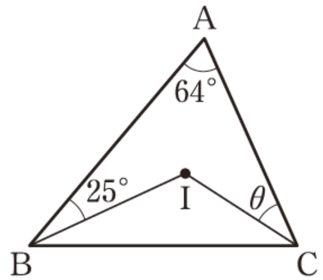
$2(\angle IBC + \angle ICA + \angle IAB) = 180°$

ゆえに

$2(38° + 31° + \theta) = 180°$

したがって　$\theta = 21°$

(3)



点 I は △ABC の内心であるから

$\angle IBC = \angle IBA = 25°$

$\angle ICB = \angle ICA = \theta$

よって　△ABC において

$2(\angle IBA + \angle ICA) + \angle BAC = 180°$

ゆえに

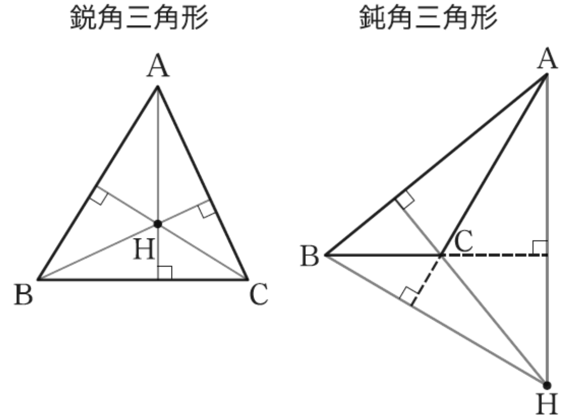
$2(25° + \theta) + 64° = 180°$

したがって　$\theta = 33°$

参考　三角形の垂心

（教科書 p.117）

△ABC の 3 つの頂点から対辺，またはその延長上に下ろした 3 本の垂線は，1 点 H で交わる。この点 H を三角形の（[1]　垂心　）という。



問1 辺 AB を斜辺とする直角三角形 ABC の垂心の位置はどこか。

頂点 C の位置

③ 三角形の比の定理

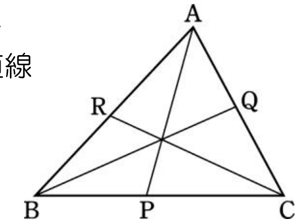
チェバの定理

（教科書 p.118）

チェバの定理

定理　△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交われば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

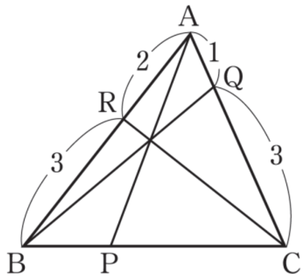


例7 右の図で

AQ : QC = 1 : 3

AR : RB = 2 : 3

であるとき，BP : PC を求めてみよう。



チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad\cdots\cdots①$$

ここで

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{1} \quad\cdots\cdots②$$

$$\frac{AR}{RB}=\frac{2}{3} \quad\cdots\cdots③$$

であるから，②，③を①に代入して

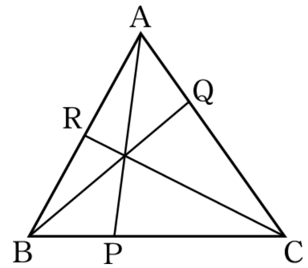
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{3}=1$$

よって

$$\frac{BP}{PC}=\frac{1}{2}$$

したがって　BP : PC = 1 : 2

問9 右の図で，点 Q，R がそれぞれ辺 AC，AB を次の比に内分するとき，BP : PC を求めよ。



(1)　AQ : QC = 2 : 3，AR : RB = 2 : 1

チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

ここで　$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{2}$，$\frac{AR}{RB}=\frac{2}{1}$

であるから

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$$

よって　$\frac{BP}{PC}=\frac{1}{3}$

すなわち　BP : PC = 1 : 3

(2)　AQ : QC = 3 : 1，AR : RB = 3 : 1

チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

ここで　$\frac{CQ}{QA}=\frac{1}{3}$，$\frac{AR}{RB}=\frac{3}{1}$

であるから

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1}=1$$

よって　$\frac{BP}{PC}=1$

すなわち　BP : PC = 1 : 1

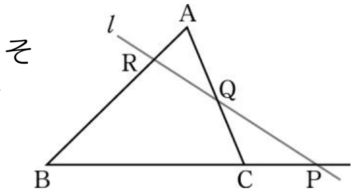
メネラウスの定理

（教科書p.120）

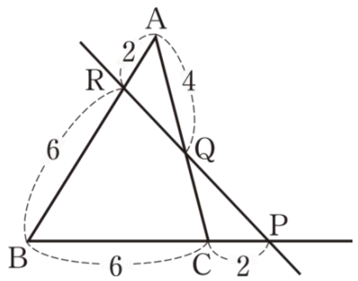
メネラウスの定理

定理　直線 l が $\triangle$ABC の辺 BC，CA，AB，またはその延長と，それぞれ点 P，Q，R で交われば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



例8 右の図で，CQ の長さを求めてみよう。



メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

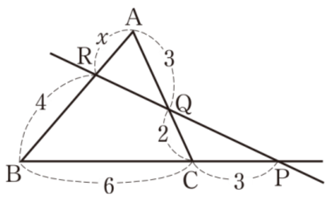
であるから

$$\frac{8}{2}\cdot\frac{CQ}{4}\cdot\frac{2}{6}=1$$

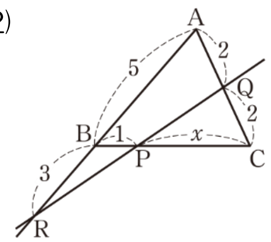
よって　$CQ=3$

問 10 下の図で，x を求めよ。

(1)



(2)



(1) メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

であるから　$\frac{9}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{4}=1$

よって，　$x=2$ である。

(2) メネラウスの定理により

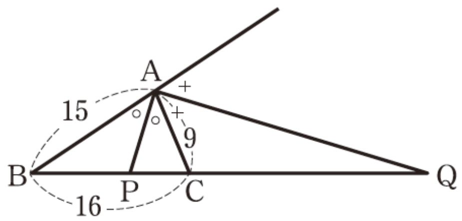
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

であるから　$\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{8}{3}=1$

よって，　$x=\frac{8}{3}$ である。

（教科書 p.121）

1　△ABC において，辺 AB, BC, CA の長さをそれぞれ 15, 16, 9 とする。頂点 A における内角の二等分線と辺 BC との交点を P, 外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を Q とするとき，次の長さを求めよ。



(1)　BP　　　(2)　BQ

(1)　AP が △ABC の頂点 A における内角の二等分線であるから

$$BP : PC = AB : AC$$
$$= 15 : 9$$
$$= 5 : 3$$

よって　$BP = BC \times \frac{5}{8}$

$$= 16 \times \frac{5}{8}$$

したがって　$BP = 10$

(2)　AQ が △ABC の頂点 A における外角の二等分線であるから

$$BQ : QC = AB : AC$$
$$= 15 : 9$$
$$= 5 : 3 \quad \cdots\cdots①$$

また　$BQ = BC + CQ$

$$= 16 + CQ \quad \cdots\cdots②$$

②を①に代入して

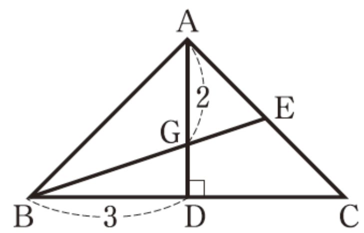
$$(16 + CQ) : CQ = 5 : 3$$

よって　$CQ = 24$

したがって　$BQ = 16 + 24$

$$= 40$$

2　右の図で，点 G は △ABC の重心で，$AG = 2$, $BD = 3$, $\angle ADC = 90°$ である。次の長さを求めよ。



(1)　AE　　　(2)　GE

(1)　点 G は △ABC の重心であるから

$$DC = BD = 3$$
$$AG : GD = 2 : 1, \quad AG = 2$$

より

$$GD = 1$$

△ADC は $\angle ADC = 90°$ の直角二等辺三角形であるから

$$AC = 3\sqrt{2}$$

E は AC の中点であるから

$$AE = \frac{1}{2}AC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(2)　△BDG は $\angle BDG = 90°$ の直角三角形であるから，三平方の定理により

$$BG^2 = BD^2 + DG^2$$
$$= 3^2 + 1^2$$
$$= 10$$

$BG > 0$ より　$BG = \sqrt{10}$

点 G は △ABC の重心であるから

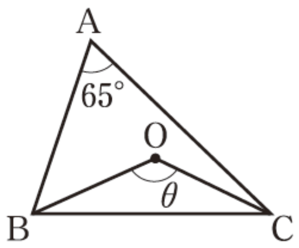
$$BG : GE = 2 : 1$$

よって　$\sqrt{10} : GE = 2 : 1$

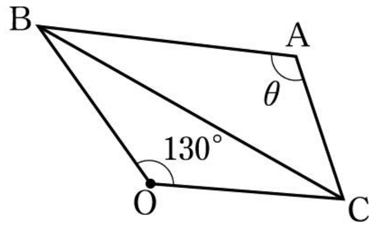
したがって　$GE = \frac{\sqrt{10}}{2}$

3 下の図で，点 O が $\triangle$ ABC の外心であるとき，角 θ を求めよ。

(1)



(2)



(1) 点 O は $\triangle$ ABC の外心であるから OA = OB = OC より，$\triangle$ OAB，$\triangle$ OBC，$\triangle$ OCA は二等辺三角形である。

$\angle OAB = \angle OBA$

$\angle OAC = \angle OCA$

$\angle OAB + \angle OAC = 65°$ であるから，$\triangle$ ABC において

$\angle OBC + \angle OCB + 2(\angle OAB + \angle OAC) = 180°$

ゆえに

$\angle OBC + \angle OCB = 50°$

$\triangle$ OBC において

$\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180°$

よって

$50° + \theta = 180°$

したがって　$\theta = 130°$

(2) O と A を結ぶ。点 O は $\triangle$ ABC の外心であるから

OA = OB = OC より

$\triangle$ OAB，$\triangle$ OCA は二等辺三角形である。

よって

$\angle OAB = \angle OBA$

$\angle OAC = \angle OCA$

$\angle OAB + \angle OAC = \theta$ であるから

$\angle OBA + \angle OCA = \theta$

四角形 OCAB において

$\angle OBA + \angle OCA + \angle BAC + \angle BOC = 360°$

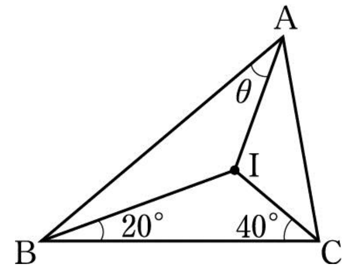
ゆえに

$2\theta + 130° = 360°$

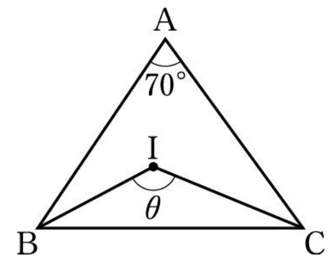
したがって　$\theta = 115°$

4 下の図で，点 I が $\triangle$ ABC の内心であるとき，角 θ を求めよ。

(1)



(2)



(1) 点 I が $\triangle$ ABC の内心であるから

$\angle IBA = \angle IBC = 20°$

$\angle ICA = \angle ICB = 40°$

$\angle IAC = \angle IAB = \theta$

よって，$\triangle$ ABC において

$2(\angle IBC + \angle ICB + \angle IAB) = 180°$

ゆえに

$\theta + 60° = 90°$

したがって　$\theta = 30°$

(2) 点 I が $\triangle$ ABC の内心であるから

$\angle IBC = \angle IBA$

$\angle ICB = \angle ICA$

よって，$\triangle$ ABC において

$2(\angle IBC + \angle ICB) + \angle BAC = 180°$

ゆえに

$\angle IBC + \angle ICB = 55°$

$\triangle$ IBC において

$\angle IBC + \angle ICB + \angle BIC = 180°$

ゆえに

$55° + \theta = 180°$

したがって　$\theta = 125°$

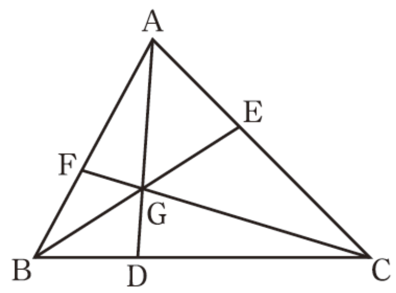
5 右の図において

$AF : FB = 3 : 2$, $AE : EC = 2 : 3$

であるとき，次の比を求めよ。

(1) $BD : DC$

(2) $AG : GD$



(1) チェバの定理により

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

ここで $\frac{CE}{EA}=\frac{3}{2}$, $\frac{AF}{FB}=\frac{3}{2}$

であるから

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=1$$

よって $\frac{BD}{DC}=\frac{4}{9}$

したがって　$BD : DC = 4 : 9$

(2) メネラウスの定理により

$$\frac{AG}{GD}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$$

ここで，(1)より　　$BD : DC = 4 : 9$

であるから

$$\frac{DC}{CB}=\frac{9}{9+4}=\frac{9}{13}$$

また $\frac{BF}{FA}=\frac{2}{3}$

よって $\frac{AG}{GD}\cdot\frac{9}{13}\cdot\frac{2}{3}=1$

したがって $\frac{AG}{GD}=\frac{13}{6}$

ゆえに　$AG : GD = 13 : 6$

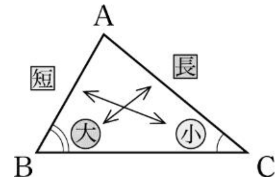
参考　辺と角の大小関係

（教科書 p.122）

一般に，次の定理が成り立つ。

辺と角の大小関係

定理　三角形において，長い辺に対する角は，短い辺に対する角より大きい。
また，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より長い。



このことを用いると，三角形の 3 辺の長さについて，以下の関係が成り立つことが示される。

三角形の 3 辺の長さの関係

定理　三角形において，2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きい。

問1 2 辺の長さの和と他の 1 辺の長さを比較することにより，3 辺の長さが次のような △ABC が存在するかどうか調べよ。

$AB = 6$, $BC = 2$, $CA = 3$

$2+3<6$ より　$BC+CA<AB$

よって，△ABC は存在しない。