2 節　円の性質

❶　円周角の定理

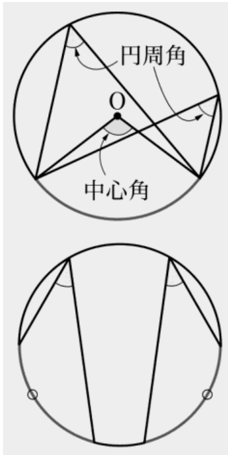
中心角と円周角については，次の定理が成り立つ。

円周角の定理

定理　［1］　1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり, その弧に対する中心角の半分である。

［2］　1 つの円で, 大きさが等しい円周角に対する弧の長さは等しい。

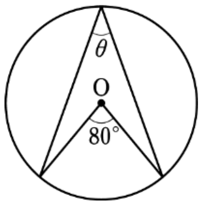
［3］　1 つの円で, 長さが等しい弧に対する円周角の大きさは等しい。



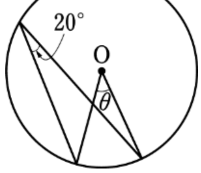
上の定理の[2]，[3]は，半径の等しい 2 つの円についても成り立つ。

$\boxed{\text{問 1}}$　下の図で，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

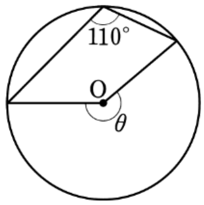
(1)



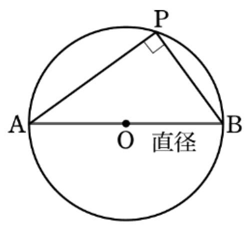
(2)



(3)

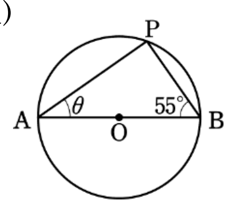


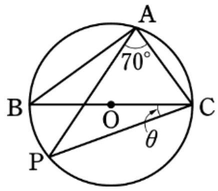
円 O において, 直径 AB を引くと, 弧 AB に対する中心角は 180° であるから，円周角の定理により，弧 AB に対する円周角は 90° となる。したがって，線分 AB を直径とする円周上に A，B とは異なる点 P をとると $\angle \mathrm{APB} = 90°$ である。

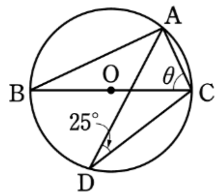


問 2　下の図で，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

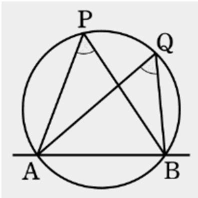
(1)　(2)　(3)





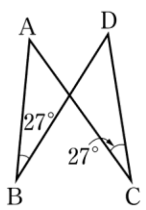


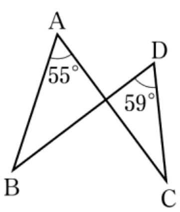
円周角の定理については，その逆が成り立つ。

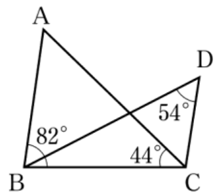
円周角の定理の逆
定理　4 点 A，B，P，Q について，P，Q が直線 AB に関して同じ側にあって $\angle APB = \angle AQB$ ならば，この 4 点は同一円周上にある。 

問 3　次のうち，4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるものはどれか。

①　②　③



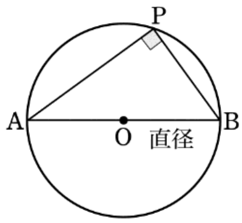




2 点 A，B に対し

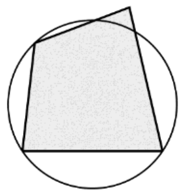
$$\angle APB = 90^\circ$$

となる点 P は，AB を直径とする円周上にある。



❷ 円に内接する四角形

　四角形の4つの頂点が1つの円周上にあるとき，その四角形は円に**内接する**という。三角形は必ず円に内接するが，四角形は円に内接するとは限らない。円に内接する四角形の性質を考えてみよう。

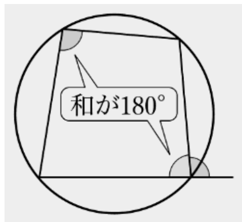


円に内接する四角形

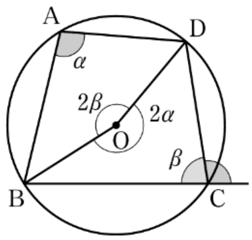
定理　円に内接する四角形では，次の[1]，[2] が成り立つ。

[1]　対角の和は180° である。

[2]　外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。



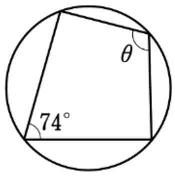
証明　[1]　円に内接する四角形をABCD，$\angle A=\alpha$，$\angle C=\beta$ とする。
円周角の定理により
弧BCD に対する中心角は 2α
弧BAD に対する中心角は 2β となる。
$2\alpha+2\beta=360°$ より　$\alpha+\beta=180°$
よって，[1]が成り立つ。



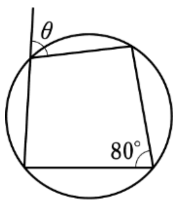
[2]　[1]より，$\alpha=180°-\beta$ であるから，∠C の外角は∠A に等しい。

問4　下の図で，角 θ を求めよ。

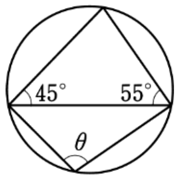
(1)



(2)



(3)



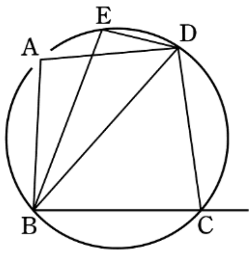
p.136 Training 6

前ページの定理は，その逆も成り立つ。

四角形が円に内接する条件
定理　次の[1]，[2]のいずれかが成り立つ四角形は円に内接する。 [1]　1 組の対角の和が 180° である。 [2]　1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しい。

証明　[1]　四角形 ABCD において，$\angle A + \angle C = 180°$ とする。

△BCD の外接円をかき，BD に関して C と反対側の円周上に点 E をとる。



四角形 BCDE は円に内接するから

$$\angle C + \angle BED = 180°$$

一方，仮定より

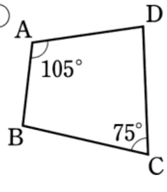
$$\angle C + \angle BAD = 180°$$

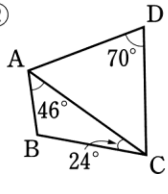
よって，$\angle BED = \angle BAD$ となり，円周角の定理の逆により，4 点 B，D，A，E は同一円周上にある。

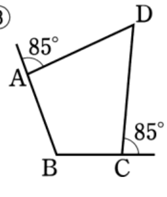
ここで，△BDE の外接円は△BCD の外接円でもあるから，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあることになり，四角形 ABCD は円に内接する。

[2]　$\angle C$ の外角がその対角 $\angle A$ に等しいとすると，$180° - \angle C = \angle A$ が成り立つ。このとき，$\angle A + \angle C = 180°$ となるから，[1]の場合と一致し，四角形 ABCD は円に内接する。

問 5　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか。

①


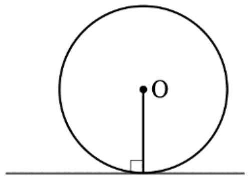
②


③


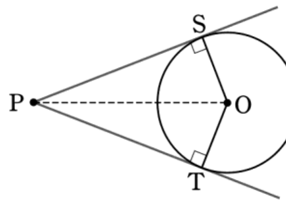
p.152 Level Up 4

❸ 円と接線

直線と円がただ1点を共有するとき，この直線は円に**接する**といい，この直線を円の**接線**，その共有点を**接点**という。このとき，円の接線は，接点を通る半径に垂直である。



円Oに対して，円の外部の点Pからは2本の接線が引ける。その接点をそれぞれS，Tとする。



△PSOと△PTOにおいて

$\angle PSO = \angle PTO = 90°$

円の半径であるから

$OS = OT$

また，POは共通であるから

$\triangle PSO \equiv \triangle PTO$

2つの直角三角形において斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい

よって　　$PS = PT$

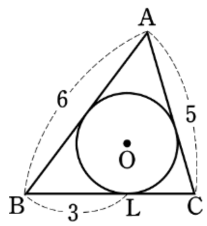
すなわち，次の定理が成り立つ。

接線の長さ
定理　円の外部の1点からその円に引いた2本の接線において，その点から2つの接点までの距離は等しい。

円外の点から接点までの距離を**接線の長さ**という。

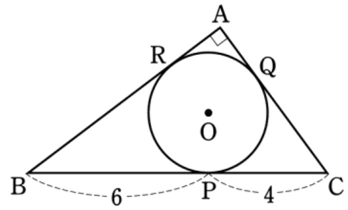
上の証明からわかるように，円の2本の接線がつくる角の二等分線上に，その円の中心がある。

問6　右の図で，円Oは△ABCの内接円で，Lは接点である。$AB = 6$，$AC = 5$，$BL = 3$のとき，BCの長さを求めよ。



例題１　三角形と内接円

右の図で，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。BP = 6，CP = 4 のとき，円 O の半径を求めよ。



解　四角形 AROQ は正方形であるから，円 O の半径を x とおくと

$$AR = AQ = x$$

一方

$$BR = BP = 6$$

$$CQ = CP = 4$$

であるから，△ABC に三平方の定理を用いて

$$(x+6)^2 + (x+4)^2 = 10^2$$

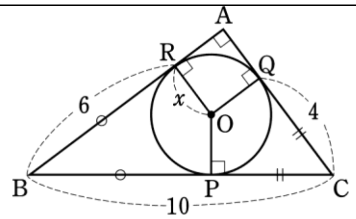
整理して　$x^2 + 10x - 24 = 0$

$$(x+12)(x-2) = 0$$

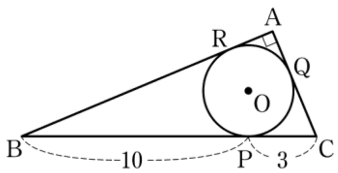
よって　$x = -12,\ 2$

x は半径であるから，$x > 0$ より　$x = 2$

したがって，円 O の半径は 2 である。



問７　右の図で，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。BP = 10，CP = 3 のとき，円 O の半径と AB，AC の長さをそれぞれ求めよ。



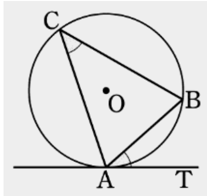
p.136 Training 7　p.152 Level Up 5

❹ 接線と弦のつくる角

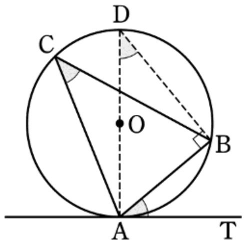
円の接線と接点を通る弦のつくる角について，次の定理が成り立つ。

接線と弦のつくる角

定理　円の接線とその接点を通る弦のつくる角は, その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



証明　上の図のように，点 A における円 O の接線を AT，A を通る弦を AB とする。$\angle BAT$ が鋭角のときに，$\angle BAT = \angle ACB$ を証明する。



直径 AD を引くと，$\angle ACB$ と $\angle ADB$ はいずれも弧ABに対する円周角であるから

$\angle ACB = \angle ADB$　　　　……①

また，AD は直径であるから，$\angle DAT$ は直角であり

$\angle BAT = 90° - \angle DAB$

一方，$\angle ABD$ も直角であるから

$\angle ADB = 90° - \angle DAB$

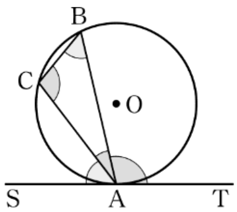
よって　　$\angle BAT = \angle ADB$　　……②

①，②より　　$\angle BAT = \angle ACB$

注意　$\angle BAT$ が直角または鈍角のときは，右の図において，$\angle CAS$ が鋭角となるから

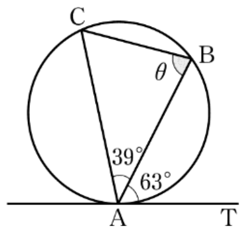
$\angle CAS = \angle ABC$

これより，$\angle BAT = \angle ACB$ が示される。



例1　右の図で，直線ATが点Aで円に接しているとき，角θを求めてみよう。
接線と弦のつくる角の定理により，$\angle ACB = \angle BAT = 63°$であるから

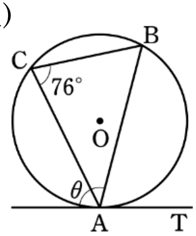
$$\theta = 180° - (39° + 63°) = 78°$$



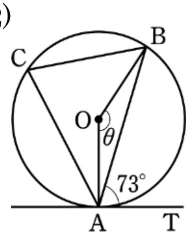
問8　下の図で，ATは円Oの接線，Aは接点である。角θを求めよ。

p.136 Training 8

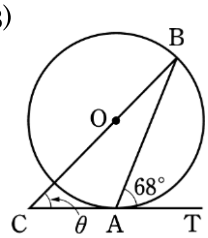
(1)



(2)

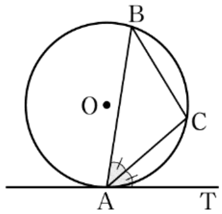


(3)



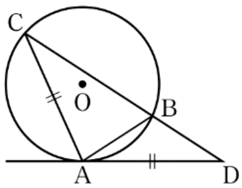
例題2　接線と弦のつくる角

右の図で，ATは円Oの接線，Aは接点である。弦ACが$\angle BAT$を2等分するとき，$\triangle ABC$は二等辺三角形であることを証明せよ。



証明　仮定より　$\angle CAT = \angle BAC$　　……①
一方，接線と弦のつくる角の定理により
$\angle CAT = \angle ABC$　　……②
①，②より，$\angle ABC = \angle BAC$であるから，$\triangle ABC$は二等辺三角形である。

問9　右の図で，ADは円Oの接線，Aは接点である。$AC = AD$であるとき，$BA = BD$であることを証明せよ。



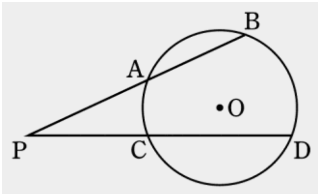
❺ 方べきの定理

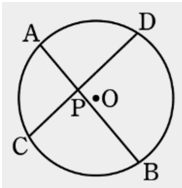
点 P を通る 2 直線と円 O との 4 つの交点が与えられたとき, P とこれらの点の間の距離には次の**方べきの定理**が成り立つ。

方べきの定理(1)

定理 点 P を通る 2 直線が，円 O とそれぞれ 2 点 A，B と 2 点 C，D で交わるとき

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$





証明 点 P が円 O の外部にあるとき，△PAC と△PDB において，円に内接する四角形の性質より

$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PDB}$

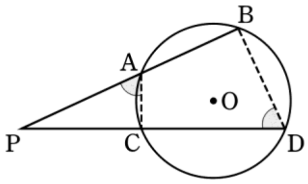
であり，$\angle\mathrm{P}$ は共通であるから

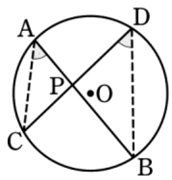
$\triangle\mathrm{PAC}\backsim\triangle\mathrm{PDB}$

よって　$\mathrm{PA}:\mathrm{PD}=\mathrm{PC}:\mathrm{PB}$

すなわち　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

点 P が円 O の内部にあるときも，同様に証明できる。





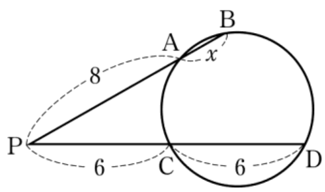
例 2 右の図で，x を求めてみよう。

方べきの定理により

$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

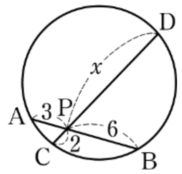
よって　$8(x+8)=6(6+6)$

すなわち　$x=1$

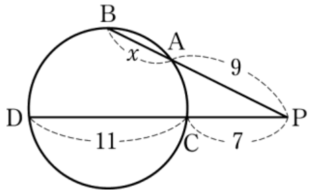


$\boxed{\text{問 10}}$ 下の図で，x を求めよ。

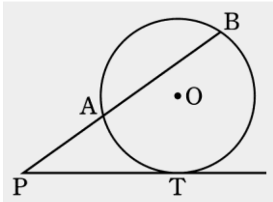
(1)



(2)



方べきの定理(2)
定理 点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A，B で交わり，もう一方が点 T で接するとき $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$



$\boxed{\text{証明}}$ T と A，T と B を結ぶ。

△PTA と△PBT において，

接線と弦のつくる角の定理により

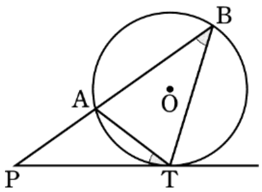
$\angle\mathrm{PTA}=\angle\mathrm{PBT}$

であり，∠P は共通であるから

$\triangle\mathrm{PTA}\backsim\triangle\mathrm{PBT}$

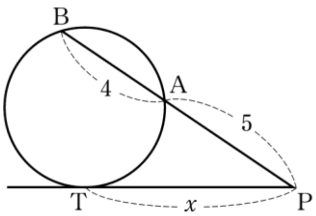
よって $\mathrm{PT}:\mathrm{PB}=\mathrm{PA}:\mathrm{PT}$

すなわち $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

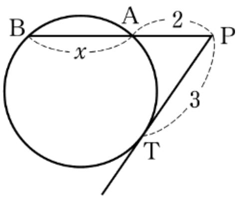


$\boxed{\text{問 11}}$ 下の図で，PT は接線，T は接点である。x を求めよ。

(1)



(2)

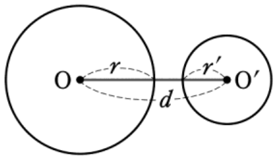


p.136 Training 9 p.153 Level Up 6

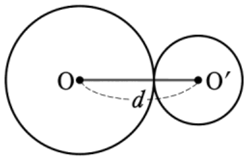
❻　2つの円

　半径の異なる2つの円の位置関係については，右の図のように5通りの場合が考えられる。
　(2)のような場合には2つの円は**外接する**といい，(4)のような場合には**内接する**という。
いずれの場合も2つの円は1点を共有しており，その点を**接点**という。このとき，接点は2つの円の中心を通る直線上にある。

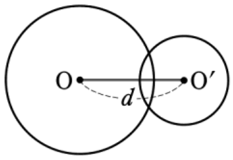
(1)　互いに外部にある



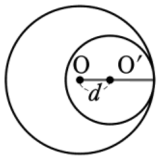
(2)　外接する



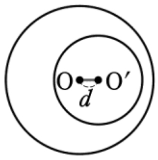
(3)　2点で交わる



(4)　内接する



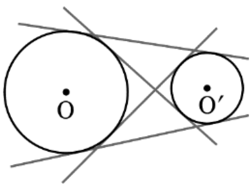
(5)　一方が他方を含む



　2つの円の位置関係は，それらの円の半径r，r'と中心間の距離dとの関係で定まる。ただし，$r > r'$とする。

(1)	$d > r + r'$	互いに外部にある
(2)	$d = r + r'$	外接する
(3)	$r - r' < d < r + r'$	2点で交わる
(4)	$r - r' = d$	内接する
(5)	$r - r' > d$	一方が他方を含む

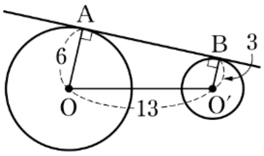
　また，下の図のように1本の直線が2つの円の接線となることがある。このような接線を，2円の**共通接線**という。



$\boxed{\text{問 12}}$　共通接線の本数は，上の5つの位置関係でどのように変わるか。

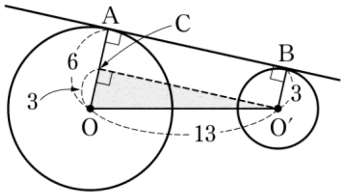
例題 3　共通接線

右の図で，直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線，A，B は接点である。
円O，O′ の半径はそれぞれ 6，3 で，中心間の距離 OO′ は 13 である。このとき，線分 AB の長さを求めよ。



考え方　点 O′ から線分 AO に垂線 O′C を下ろし，直角三角形 OO′ C をつくる。
このとき，四角形 ACO′B は長方形となる。

解　右の図のように，点 O′ から線分 AO に垂線 O′C を下ろす。



四角形 ACO′B は長方形となるから

$CA = O'B = 3$

よって　　$OC = 6 - 3 = 3$

△OO′C において，三平方の定理により

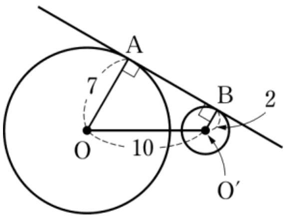
$$CO'^2 = OO'^2 - OC^2 = 13^2 - 3^2$$
$$= 160$$

$CO' > 0$ より　　$CO' = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

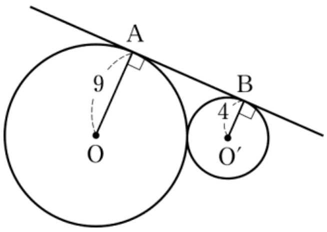
すなわち　　$AB = CO' = 4\sqrt{10}$

問 13　下の図で，直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線，A，B は接点である。このとき，線分 AB の長さを求めよ。

(1)



(2)

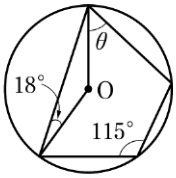


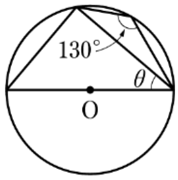
円Oと円O′は外接する

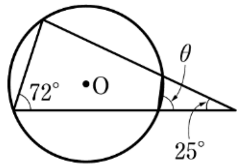
p.136 Training 10

Training

6　下の図で，角 θを求めよ。ただし，O は円の中心である。

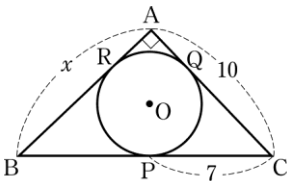
(1)


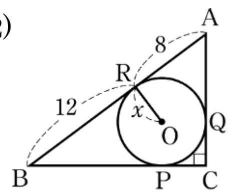
(2)


(3)


p.126

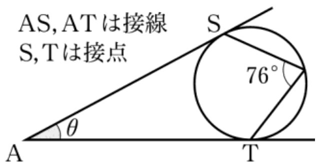
7　下の図で，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。
x を求めよ。

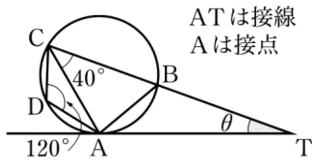
(1)


(2)


p.129

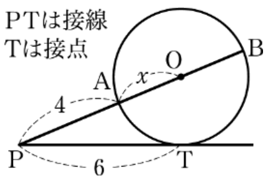
8　下の図で，角 θ を求めよ。

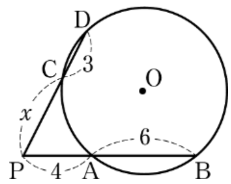
(1)


(2)


p.131

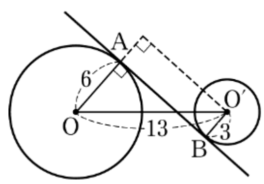
9　下の図で，x を求めよ。ただし，O は円の中心である。

(1)


(2)


p.133

10　右の図で，直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線，A，B は接点である。円 O，O′ の半径がそれぞれ 6，3 で，中心間の距離 OO′ が 13 である。このとき，線分 AB の長さを求めよ。



p.135