1 節　三角形と比

❶　三角形と比

三角形における比の性質については，中学校で次のことを学んだ。

三角形と比

定理　△ABC の辺 AB，AC またはそれらの延長上に，それぞれ点 D，E があるとき

[1]　DE // BC ならば

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AB} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC} = \mathrm{DE} : \mathrm{BC}$$

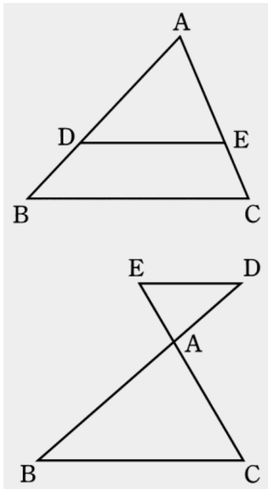
$$\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = \mathrm{AE} : \mathrm{EC}$$

[2]　AD : AB = AE : AC ならば

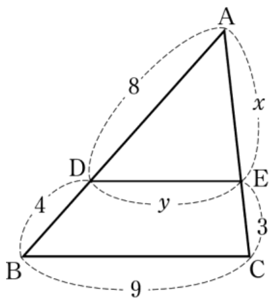
DE // BC

[3]　AD : DB = AE : EC ならば

DE // BC



例 1　右の図で，DE // BC とするとき，x，y を求めてみよう。



$$\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = \mathrm{AE} : \mathrm{EC}$$

であるから　$8 : 4 = x : 3$

よって　$4x = 24$

したがって　$x = 6$

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AB} = \mathrm{DE} : \mathrm{BC}$$

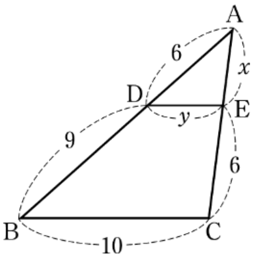
であるから　$8 : 12 = y : 9$

よって　$12y = 72$

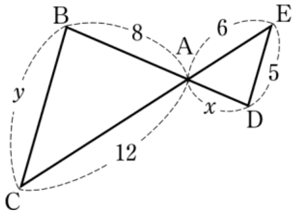
したがって　$y = 6$

$\boxed{\text{問1}}$　下の図で，DE // BC とするとき，x，y を求めよ。

(1)



(2)



$\boxed{\text{注意}}$　AD : AB = AE : AC であることは，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}}$ のように表すこともできる。

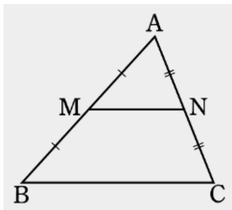
とくに，D と E がそれぞれ辺 AB，AC の中点になっているときには，次の**中点連結定理**が成り立つ。

中点連結定理

定理　△ABC の 2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき

MN // BC

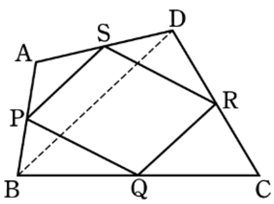
$\mathrm{MN} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$



$\boxed{\text{問 2}}$　右の図で，四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P，Q，R，S とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　四角形 PQRS はどのような四角形になるか。

(2)　AC = BD のとき，四角形 PQRS はどのような四角形になるか。



内分と外分

　線分 AB 上に点 P があり

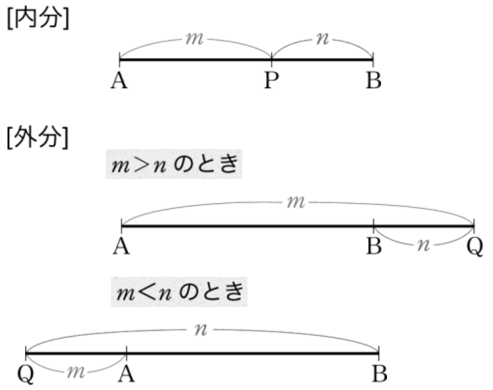
　　AP：PB＝m：n

であるとき，P は AB を m：n に**内分する**という。

　また，線分 AB の延長上に点 Q があり

　　AQ：QB＝m：n

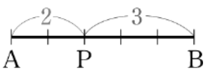
であるとき，Q は AB を m：n に**外分する**という。
mとnの大小関係により，点 Q の位置は右の図のようになる。



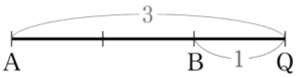
注意　線分を 1：1 に外分する点はない。

例 2　線分 AB に対して，次のように内分する点，外分する点を図示してみよう。

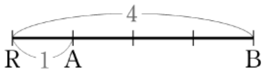
(1)　AB を 2：3 に内分する点 P



(2)　AB を 3：1 に外分する点 Q



(3)　AB を 1：4 に外分する点 R

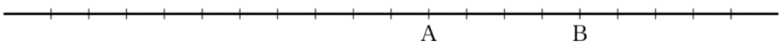


問 3　次の点を下の図に図示せよ。

(1)　線分 AB を 3：1 に内分する点 P

(2)　線分 AB を 5：1 に外分する点 Q

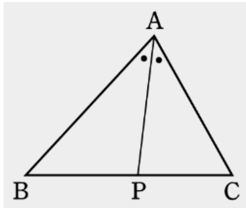
(3)　線分 AB を 2：3 に外分する点 R



三角形の内角と外角の二等分線

内角の二等分線と比

定理　△ABC の ∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると，
P は BC を AB : AC に内分する。すなわち
$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$

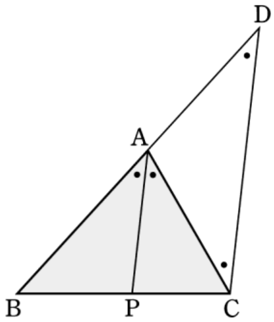


証明　頂点 C を通り AP に平行な直線を引き，
BA の延長との交点を D とすると

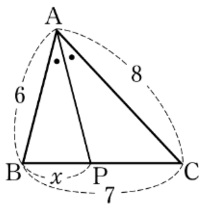
$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{CAP}$　―― 錯角
$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BAP}$　―― 同位角

$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{CAP}$であるから
$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{ADC}$

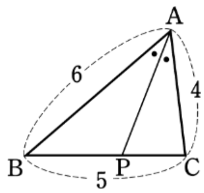
よって，△ACD は二等辺三角形であるから　$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}$　……①
また，PA∥CD より　$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{BA}:\mathrm{AD}$　……②
①，②より　$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$



例 3　右の図で，AP が△ABC の ∠A の二等分線であるとき，BP : PC = AB : AC であるから
$x:(7-x)=6:8$
よって　$8x=6(7-x)$
したがって　$x=3$



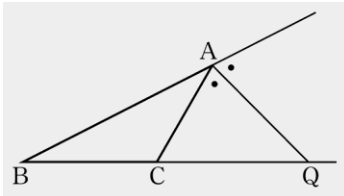
問 4　△ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。∠Aの二等分線と辺 BC との交点をPとするとき，BP，PCの長さをそれぞれ求めよ。



外角の二等分線と比

定理 △ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすると，Q はBCを AB : AC に外分する。
すなわち

BQ : QC = AB : AC

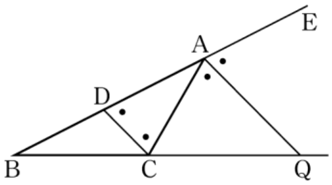


注意 AB = AC のときは，外角の二等分線は辺 BC に平行となり，点 Q をとれない。

証明 AB > AC のときについて証明する。
頂点 C を通り AQ に平行な直線を引き, BA との交点を D とする。
線分 BA の延長上に点 E をとる。

∠ACD = ∠CAQ ←― 錯角

∠ADC = ∠EAQ ←― 同位角



∠CAQ = ∠EAQ であるから

∠ACD = ∠ADC

よって，△ADC は二等辺三角形であるから

AD = AC ……①

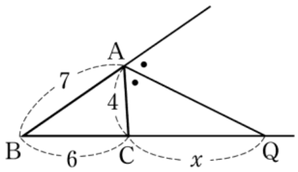
また，QA // CD より BQ : QC = BA : AD ……②

①，②より BQ : QC = AB : AC

例 4 右の図で，AQ が△ABC の頂点 A における外角の二等分線であるとき，
BQ : QC = AB : AC であるから

$(6 + x) : x = 7 : 4$

よって， $7x = 4(6 + x)$ より $x = 8$



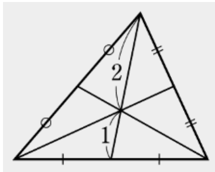
問 5 △ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。頂点 A における外角の二等分線と BC の延長との交点を Q とするとき，CQ の長さを求めよ。

p.121 Training 1

❷ 三角形の重心・外心・内心

三角形の重心

三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を**中線**という。

三角形の重心
定理 三角形の3本の中線は1点で交わる。その交点は，それぞれの中線を2：1に内分する。 

証明 △ABCにおいて，2本の中線BEとCFの交点をGとする。E，Fはそれぞれ辺AC，ABの中点であるから，中点連結定理により

EF∥BC，　BC：EF＝2：1

よって　BG：GE＝CG：GF＝2：1

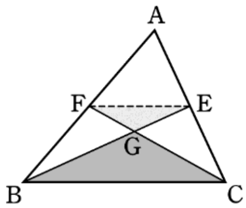
一方，2本の中線BEとADの交点をHとすると，同様に

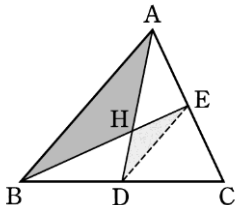
DE∥AB，　AB：DE＝2：1

であるから　BH：HE＝AH：HD＝2：1

よって，GとHは中線BEを同じ比に内分するから，一致する。

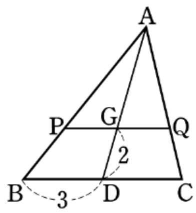
すなわち，3本の中線は1点Gで交わり，Gはそれぞれの中線を2：1に内分する。





三角形の3本の中線の交点を，その三角形の**重心**という。

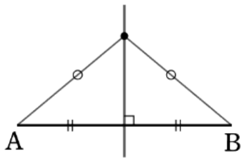
問6 右の図で，点Gは△ABCの重心で，線分PQはGを通って辺BCに平行である。BD＝3，GD＝2のとき，AG，PQの長さを求めよ。



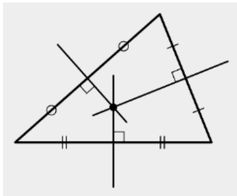
p.121 Training 2

三角形の外心

　線分 AB の垂直二等分線上の点は，両端 A，B から等距離にある。また，両端 A，B から等距離にある点は AB の垂直二等分線上にある。



　このことから，次の定理が成り立つ。

三角形の外心
定理　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。 

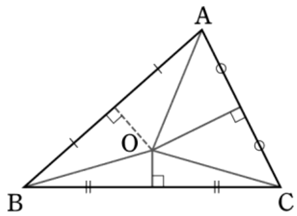
証明　△ABC において，2 辺 BC，CA の垂直二等分線の交点を O とすると

$$OB = OC \quad かつ \quad OC = OA$$

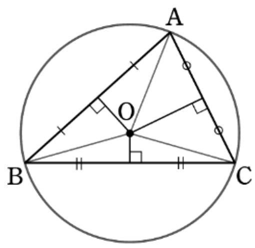
であるから

$$OB = OA$$

よって，O は辺 AB の垂直二等分線上にある。
すなわち，3 辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。

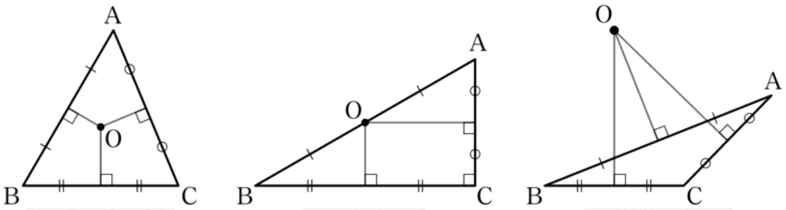


　上の証明より，OA = OB = OC であるから，点 O は 3 つの頂点から等距離にある。よって，O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができる。この円を三角形の**外接円**といい，中心 O を三角形の**外心**という。



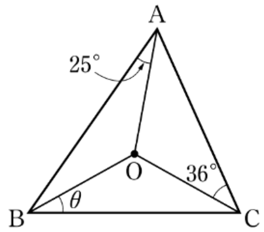
鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形の外心 O の位置は，それぞれ下の図のようになる。

鋭角三角形　直角三角形　鈍角三角形



△ABCの内部　斜辺の中点　△ABCの外部

例 5　右の図で，点 O が△ABC の外心であり，$\angle\mathrm{OAB} = 25°$，$\angle\mathrm{OCA} = 36°$のとき，角 θ を求めてみよう。



点 O は△ABC の外心であるから

$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$ より

△OAB，△OBC，△OCAは二等辺三角形である。

よって　$\angle\mathrm{OBA} = \angle\mathrm{OAB} = 25°$

$\angle\mathrm{OAC} = \angle\mathrm{OCA} = 36°$

$\angle\mathrm{OCB} = \angle\mathrm{OBC} = \theta$

△ABC において

$2(\angle\mathrm{OAB} + \angle\mathrm{OCA} + \angle\mathrm{OBC}) = 180°$　　三角形の内角の和は 180°

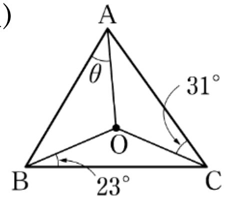
ゆえに

$2(25° + 36° + \theta) = 180°$

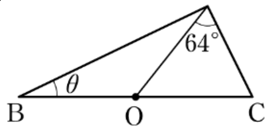
したがって　$\theta = 29°$

問 7　下の図で，点 O が△ABC の外心であるとき，角 θ を求めよ。

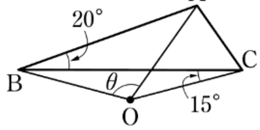
(1)



(2)



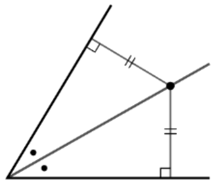
(3)

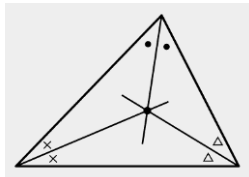


p.121 Training 3

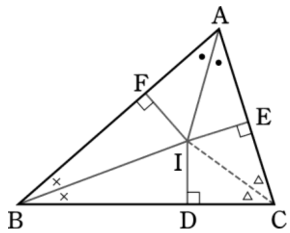
三角形の内心

　角の二等分線上の点は，角をつくる 2 辺から等距離にある。また，2 辺から等距離にある点は，角の二等分線上にある。
　このことから，次の定理が成り立つ。

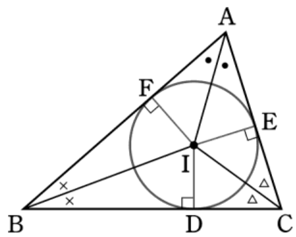


三角形の内心
定理　三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。 

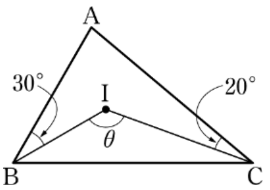
証明　△ABC において，∠A と ∠B の二等分線の交点を I とする。I から 3 辺 BC，CA，AB に垂線ID，IE，IF を下ろすと
　　IE = IF かつ IF = ID
であるから　　IE = ID
よって，I は ∠C の二等分線上にある。
すなわち，3 つの内角の二等分線は 1 点 I で交わる。



　上の証明より，ID = IE = IF であるから，点 I は 3 点 D，E，F から等距離にある。
よって，I を中心として D，E，F を通る円をかくことができる。この円は三角形の 3 辺に接している。この円を三角形の**内接円**といい，中心 I を三角形の**内心**という。



例 6　右の図で，点 I が△ABC の内心であり，$\angle\mathrm{IBA}=30^\circ$，$\angle\mathrm{ICA}=20^\circ$ のとき，角 θ を求めてみよう。



点 I は△ABC の内心であるから

$\angle\mathrm{IBC}=\angle\mathrm{IBA}=30^\circ$

$\angle\mathrm{ICB}=\angle\mathrm{ICA}=20^\circ$

よって△IBC において

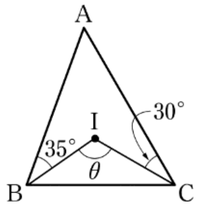
$30^\circ+20^\circ+\theta=180^\circ$　←── 三角形の内角の和は 180°

したがって

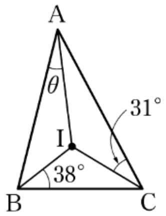
$\theta=130^\circ$

問 8　下の図で，点 I が△ABC の内心であるとき，角 θ を求めよ。

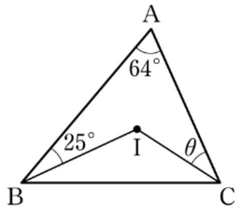
(1)



(2)



(3)

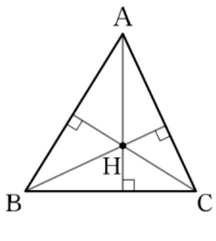


p.121 Training 4　p.152 Level Up 1

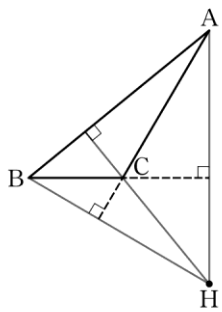
参考　三角形の垂心

△ABC の 3 つの頂点から対辺，またはその延長上に下ろした 3 本の垂線は，1 点 H で交わる。この点 H を三角形の**垂心**という。

鋭角三角形



鈍角三角形

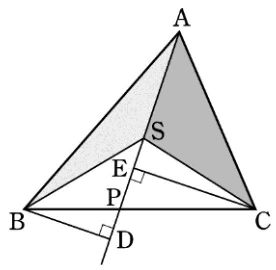


問 1　辺 AB を斜辺とする直角三角形 ABC の垂心の位置はどこか。

p.152 Level Up 2

❸　三角形の比の定理

チェバの定理



△ABC の辺 BC 上の点を P とし，AP 上に点 S をとる。B，C から直線 AP にそれぞれ垂線 BD，CE を下ろす。△ABS と△ACS において，AS を底辺と考えれば，BD，CE がそれぞれ高さとなるから，面積は

$\triangle ABS = \frac{1}{2} AS \cdot BD$　　△ABS は，その三角形の面積を表す

$\triangle ACS = \frac{1}{2} AS \cdot CE$

である。よって，面積の比は

$$\frac{\triangle ABS}{\triangle ACS} = \frac{BD}{CE} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{\frac{1}{2} AS \cdot BD}{\frac{1}{2} AS \cdot CE} = \frac{BD}{CE}$$

となる。

一方，BD // CE より　$\frac{BD}{CE} = \frac{BP}{CP}$　　……②

したがって，①，②より　$\frac{\triangle ABS}{\triangle ACS} = \frac{BP}{CP}$

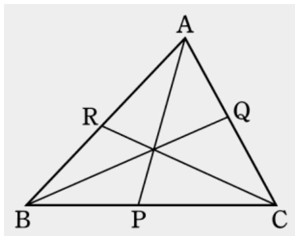
が成り立つ。

このことを用いると，次の**チェバの定理**が示される。

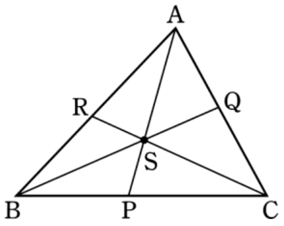
チェバの定理

定理　△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線AP，BQ，CR が 1 点で交われば

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



証明　3 直線 AP，BQ，CR が交わる点を S とすると



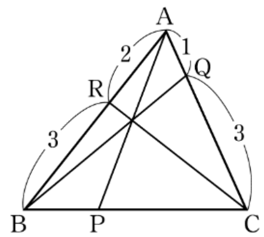
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\triangle\mathrm{ABS}}{\triangle\mathrm{CAS}},\quad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\triangle\mathrm{BCS}}{\triangle\mathrm{ABS}},$$

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{CAS}}{\triangle\mathrm{BCS}}$$

よって

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{ABS}}{\triangle\mathrm{CAS}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{BCS}}{\triangle\mathrm{ABS}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{CAS}}{\triangle\mathrm{BCS}}=1$$

例 7　右の図で



$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=1:3$

$\mathrm{AR}:\mathrm{RB}=2:3$

であるとき，BP : PC を求めてみよう。

チェバの定理により

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1 \quad \cdots\cdots①$$

ここで　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{3}{1}$　　$\cdots\cdots②$

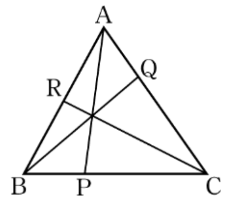
$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{2}{3}$　　$\cdots\cdots③$

であるから，②，③を①に代入して

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{2}{3}=1$　　よって　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{1}{2}$

したがって　　$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=1:2$

問 9　右の図で，点 Q，R がそれぞれ辺 AC，AB を次の比に内分するとき，BP : PC を求めよ。



(1)　$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=2:3$，　$\mathrm{AR}:\mathrm{RB}=2:1$

(2)　$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=3:1$，　$\mathrm{AR}:\mathrm{RB}=3:1$

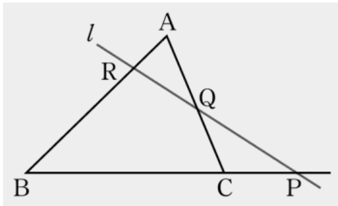
メネラウスの定理

三角形と直線に関して，次の**メネラウスの定理**が成り立つ。

メネラウスの定理

定理 直線 l が△ABC の辺 BC，CA，AB，またはその延長と，それぞれ点P，Q，Rで交われば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

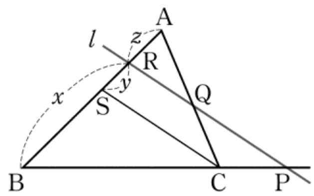


証明 点 C を通って直線 l に平行な直線を引き，辺 AB との交点を S とする。

RB $= x$，RS $= y$，AR $= z$ と表すと

$$\frac{BP}{PC}=\frac{x}{y},\quad \frac{CQ}{QA}=\frac{y}{z},\quad \frac{AR}{RB}=\frac{z}{x}$$

よって $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1$



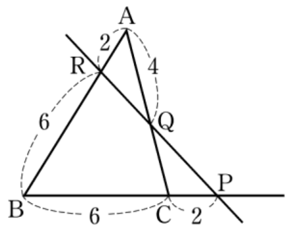
例 8 右の図で，CQの長さを求めてみよう。

メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

であるから $\frac{8}{2}\cdot\frac{CQ}{4}\cdot\frac{2}{6}=1$

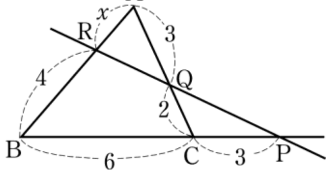
よって，CQ $= 3$ である。



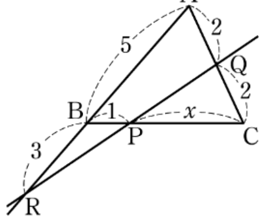
問 10 下の図で，x を求めよ。

p.121 Training 5 p.152 Level Up 3

(1)

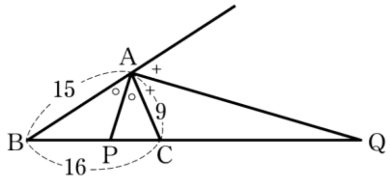


(2)



Training

1　△ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ15，16，9とする。頂点 A における内角の二等分線と辺 BC との交点を P，外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を Q とするとき，次の長さを求めよ。

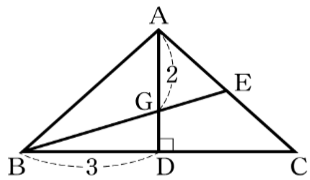


(1)　BP　　　　(2)　BQ

p.112

2　右の図で，点 G は△ABC の重心で，AG = 2，BD = 3，∠ADC = 90° である。次の長さを求めよ。

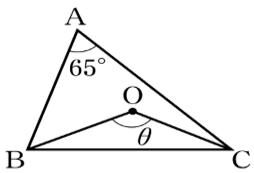
(1)　AE　　　　(2)　GE



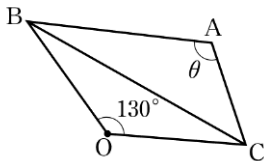
p.113

3　下の図で，点 O が△ABC の外心であるとき，角 θ を求めよ。

(1)



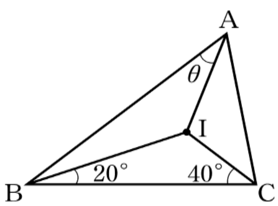
(2)



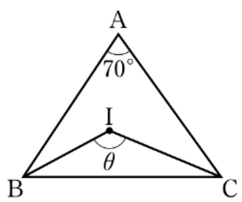
p.115

4　下の図で，点 I が△ABC の内心であるとき，角 θ を求めよ。

(1)



(2)



p.117

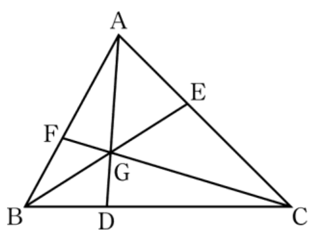
5　右の図において

　　AF : FB = 3 : 2，AE : EC = 2 : 3

であるとき，次の比を求めよ。

(1)　BD : DC

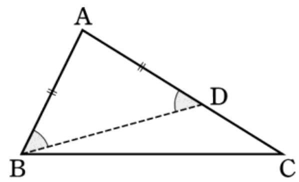
(2)　AG : GD



p.120

参考　辺と角の大小関係

△ABCにおいて，辺AB，ACが等しければ，この三角形は二等辺三角形であり，∠Bと∠Cは等しい。AB，ACが等しくないとき，それぞれの辺に対する角の大小関係がどうなるかを考えてみよう。



$AB < AC$ の場合は，辺AC上に，$AB = AD$ となるように点Dをとることができる。このとき，△ABDは二等辺三角形となり，$\angle ABD = \angle ADB$ である。よって

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$$
$$= \angle ADB + \angle CBD \quad \longleftarrow \angle ABD = \angle ADB$$

∠ADBは△BCDの頂点Dにおける外角であるから

$$\angle ADB = \angle C + \angle CBD$$

ゆえに　$\angle ABC = \angle C + \angle CBD + \angle CBD > \angle C$

となる。

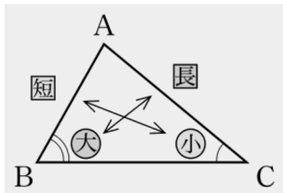
すなわち，$AB < AC$ ならば $\angle C < \angle B$ が成り立つ。

また，その逆，すなわち $\angle C < \angle B$ ならば $AB < AC$ も成り立つことが知られている。

以上より，次の定理が成り立つ。

辺と角の大小関係

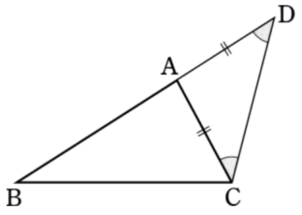
定理　三角形において，長い辺に対する角は，短い辺に対する角より大きい。
また，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より長い。



このことを用いると，三角形の3辺の長さについて，次のページの関係が成り立つことが示される。

三角形の 3 辺の長さの関係
定理　三角形において，2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きい。

証明　△ABC において，$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}>\mathrm{BC}$
であることを示す。
辺 BA の延長上に，$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}$ と
なるように点 D をとる。



このとき

$$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=\mathrm{AB}+\mathrm{AD}=\mathrm{BD} \quad \cdots\cdots①$$

となる。
また△ACD は二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{D} \quad \cdots\cdots②$$

よって，②より

$$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BCA}+\angle\mathrm{ACD}$$
$$=\angle\mathrm{BCA}+\angle\mathrm{D}>\angle\mathrm{D}$$

したがって，辺と角の大小関係により

$$\mathrm{BD}>\mathrm{BC} \quad \cdots\cdots③$$

①，③から　$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}>BC$
が成り立つ。
同様にして $\mathrm{AC}+\mathrm{BC}>\mathrm{AB}$，$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}>\mathrm{AC}$ も成り立つ。

問 1　2 辺の長さの和と他の 1 辺の長さを比較することにより，3 辺の長さが次のような△ABC が存在するかどうか調べよ。

$$\mathrm{AB}=6,\ \mathrm{BC}=2,\ \mathrm{CA}=3$$