

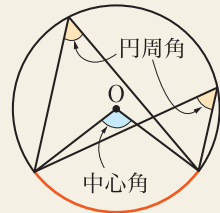
2 節 円の性質

1 円周角の定理

中心角と円周角については、次の定理が成り立つ。

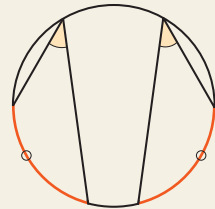
円周角の定理

定理 [1] 1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の半分である。



5

[2] 1つの円で、大きさが等しい円周角に対する弧の長さは等しい。



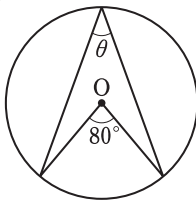
10

[3] 1つの円で、長さが等しい弧に対する円周角の大きさは等しい。

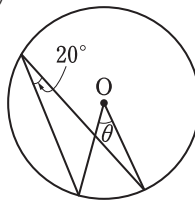
上の定理の [2], [3] は、半径の等しい2つの円についても成り立つ。

問 1 下の図で、角 θ を求めよ。ただし、O は円の中心である。

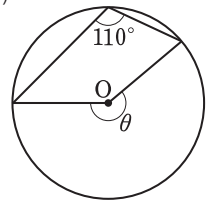
(1)



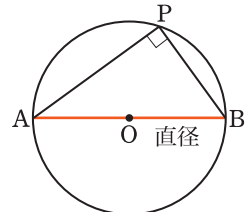
(2)



(3)



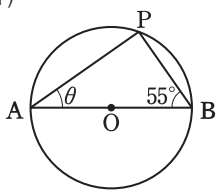
円Oにおいて、直径ABを引くと、弧ABに対する中心角は 180° であるから、円周角の定理により、弧ABに対する円周角は 90° となる。したがって、線分ABを直径とする円周上にA, Bとは異なる点Pをとると $\angle APB = 90^\circ$ である。



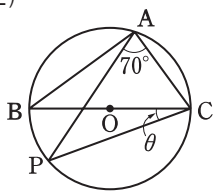
15

問2 下の図で、角 θ を求めよ。ただし、O は円の中心である。

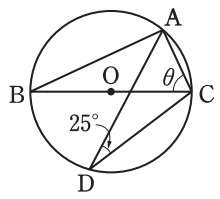
(1)



(2)



(3)



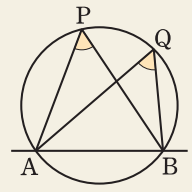
円周角の定理については、その逆が成り立つ。

円周角の定理の逆

定理 4点 A, B, P, Q について、P, Q が直線 AB に関して同じ側にあつて

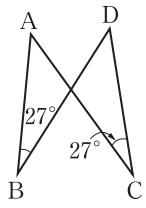
$$\angle APB = \angle AQB$$

ならば、この4点は同一円周上にある。

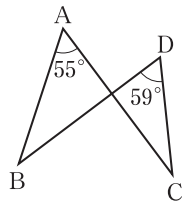


問3 次のうち、4点 A, B, C, D が同一円周上にあるものはどれか。

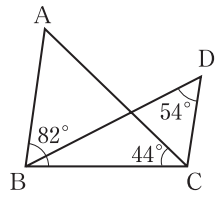
①



②



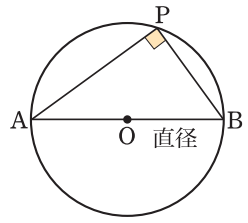
③



2点 A, B に対し

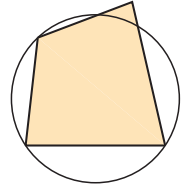
$$\angle APB = 90^\circ$$

となる点 P は、AB を直径とする円周上にある。



② 円に内接する四角形

四角形の4つの頂点が1つの円周上にあるとき、その四角形は円に **内接する** という。三角形は必ず円に内接するが、四角形は円に内接するとは限らない。円に内接する四角形の性質を考えてみよう。

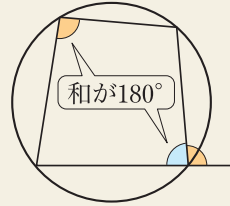


5

円に内接する四角形

定理 円に内接する四角形では、次の [1]、[2] が成り立つ。

- [1] 対角の和は 180° である。
- [2] 外角は、それと隣り合う内角の対角に等しい。



10

証明

[1] 円に内接する四角形を ABCD,

$\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$ とする。

円周角の定理により

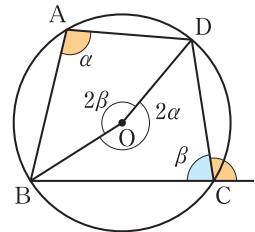
弧 BCD に対する中心角は 2α

弧 BAD に対する中心角は 2β となる。

$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$ より $\alpha + \beta = 180^\circ$

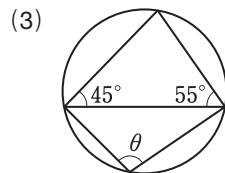
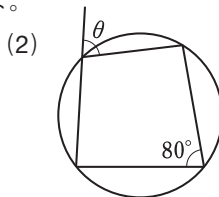
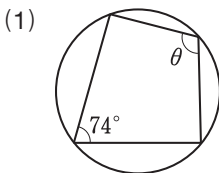
よって、[1] が成り立つ。

[2] [1] より、 $\alpha = 180^\circ - \beta$ であるから、 $\angle C$ の外角は $\angle A$ に等しい。



15

問 4 下の図で、角 θ を求めよ。



前ページの定理は、その逆も成り立つ。

四角形が円に内接する条件

定理 次の [1], [2] のいずれかが成り立つ四角形は円に内接する。

[1] 1組の対角の和が 180° である。

[2] 1つの外角が、それと隣り合う内角の対角に等しい。

証明

[1] 四角形 ABCD において、 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ とする。

$\triangle BCD$ の外接円をかき、BD に関して C と反対側の円周上に点 E をとる。

四角形 BCDE は円に内接するから

$$\angle C + \angle BED = 180^\circ$$

一方、仮定より

$$\angle C + \angle BAD = 180^\circ$$

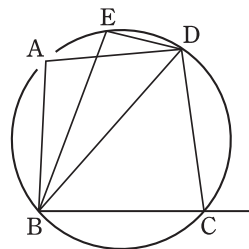
よって、 $\angle BED = \angle BAD$ となり、円周角の定理の逆により、4点 B, D, A, E は同一円周上にある。

ここで、 $\triangle BDE$ の外接円は $\triangle BCD$ の外接円でもあるから、4点 A, B, C, D は同一円周上にあることになり、四角形 ABCD は円に内接する。

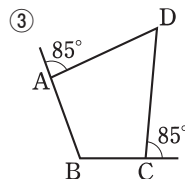
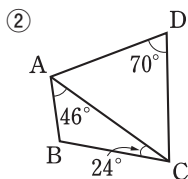
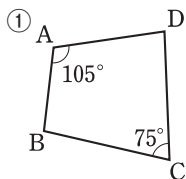
[2] $\angle C$ の外角がその対角 $\angle A$ に等しいとすると、

$180^\circ - \angle C = \angle A$ が成り立つ。このとき、

$\angle A + \angle C = 180^\circ$ となるから、[1] の場合と一致し、四角形 ABCD は円に内接する。

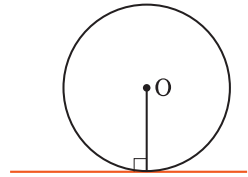


問 5 次の四角形 ABCD のうち、円に内接するものはどれか。 p.152 LevelUp 4、



③ 円と接線

直線と円がただ 1 点を共有するとき、この直線は円に **接する** といい、この直線を円の **接線**、その共有点を **接点** という。このとき、円の接線は、接点を通る半径に垂直である。



5

円 O に対して、円の外部の点 P からは 2 本の接線が引ける。その接点をそれぞれ S, T とする。

$\triangle PSO$ と $\triangle PTO$ において

$$\angle PSO = \angle PTO = 90^\circ$$

円の半径であるから

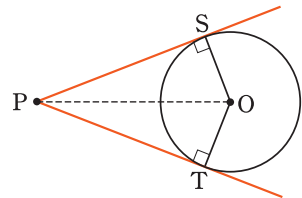
$$OS = OT$$

また、PO は共通であるから

$$\triangle PSO \equiv \triangle PTO$$

よって $PS = PT$

すなわち、次の定理が成り立つ。



10

—— 2つの直角三角形において斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい

15

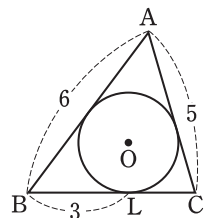
接線の長さ

定理 円の外部の 1 点からその円に引いた 2 本の接線において、その点から 2 つの接点までの距離は等しい。

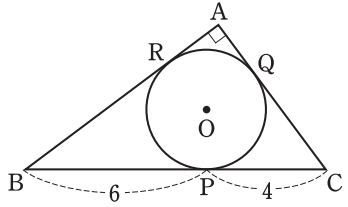
円外の点から接点までの距離を **接線の長さ** という。

上の証明からわかるように、円の 2 本の接線がつくる角の二等分線上に、その円の中心がある。

問 6 右の図で、円 O は $\triangle ABC$ の内接円で、L は接点である。AB = 6, AC = 5, BL = 3 のとき、BC の長さを求めよ。



1 右の図で、円Oは直角三角形ABCの内接円で、P, Q, Rは接点である。BP = 6, CP = 4のとき、円Oの半径を求めよ。



解 四角形 AROQ は正方形であるから、円Oの半径を x とおくと

$$AR = AQ = x$$

一方

$$BR = BP = 6$$

$$CQ = CP = 4$$

であるから、 $\triangle ABC$ に三平方の定理を用いて

$$(x+6)^2 + (x+4)^2 = 10^2$$

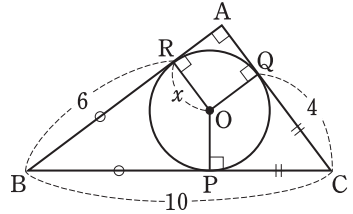
整理して $x^2 + 10x - 24 = 0$

$$(x+12)(x-2) = 0$$

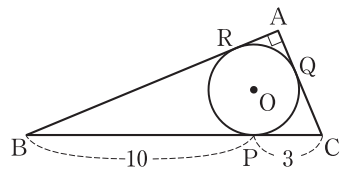
よって $x = -12, 2$

x は半径であるから、 $x > 0$ より $x = 2$

したがって、円Oの半径は2である。



問7 右の図で、円Oは直角三角形ABCの内接円で、P, Q, Rは接点である。BP = 10, CP = 3のとき、円Oの半径とAB, ACの長さをそれぞれ求めよ。



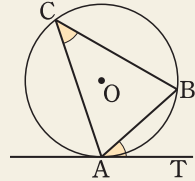
[p.136 Training 7](#)、[p.152 LevelUp 5](#)

4 接線と弦のつくる角

円の接線と接点を通る弦のつくる角について、次の定理が成り立つ。

接線と弦のつくる角

定理 円の接線とその接点を通る弦のつくる角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



5

証明

上の図のように、点Aにおける円Oの接線をAT、Aを通る弦をABとする。 $\angle BAT$ が鋭角のときに、 $\angle BAT = \angle ACB$ を証明する。

直径ADを引くと、 $\angle ACB$ と $\angle ADB$ はいずれも弧ABに対する円周角であるから

$$\angle ACB = \angle ADB \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また、ADは直径であるから、 $\angle DAT$ は直角であり

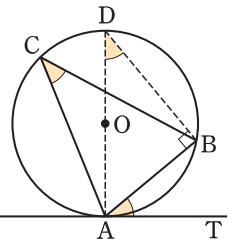
$$\angle BAT = 90^\circ - \angle DAB$$

一方、 $\angle ABD$ も直角であるから

$$\angle ADB = 90^\circ - \angle DAB$$

よって $\angle BAT = \angle ADB \quad \dots\dots \textcircled{2}$

①, ②より $\angle BAT = \angle ACB$



10

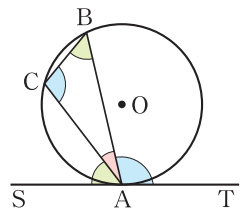
15

注意

$\angle BAT$ が直角または鈍角のときは、右の図において、 $\angle CAS$ が鋭角となるから

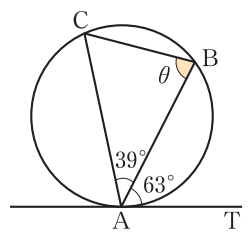
$$\angle CAS = \angle ABC$$

これより、 $\angle BAT = \angle ACB$ が示される。



20

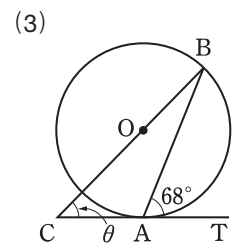
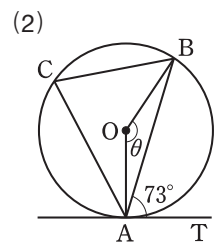
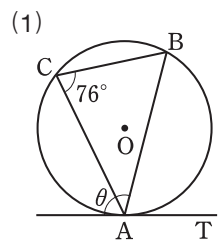
例 1 右の図で、直線 AT が点 A で円に接しているとき、角 θ を求めてみよう。
接線と弦のつくる角の定理により、
 $\angle ACB = \angle BAT = 63^\circ$ であるから
 $\theta = 180^\circ - (39^\circ + 63^\circ) = 78^\circ$



5

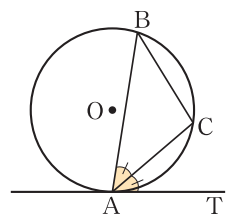
問 8 下の図で、AT は円 O の接線、A は接点である。角 θ を求めよ。

p.136 Training 8



例題 接線と弦のつくる角

2 右の図で、AT は円 O の接線、A は接点である。弦 AC が $\angle BAT$ を 2 等分するとき、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形であることを証明せよ。



10

証明 仮定より $\angle CAT = \angle BAC$ ①

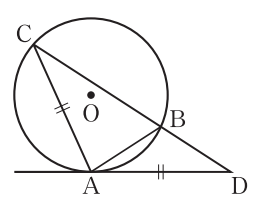
一方、接線と弦のつくる角の定理により

$\angle CAT = \angle ABC$ ②

15

①、②より、 $\angle ABC = \angle BAC$ であるから、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形である。

問 9 右の図で、AD は円 O の接線、A は接点である。AC = AD であるとき、BA = BD であることを証明せよ。



20

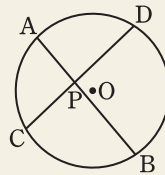
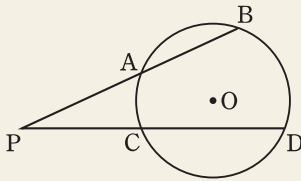
5 方べきの定理

点Pを通る2直線と円Oとの4つの交点が与えられたとき、Pとこれらの点の間の距離には次の^{ほう}方べきの定理が成り立つ。

方べきの定理(1)

定理 点Pを通る2直線が、円Oとそれぞれ2点A、Bと2点C、Dで交わるとき

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



証明

点Pが円Oの外部にあるとき、 $\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において、円に内接する四角形の性質より

$$\angle PAC = \angle PDB$$

であり、 $\angle P$ は共通であるから

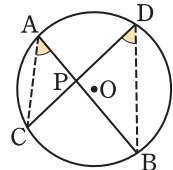
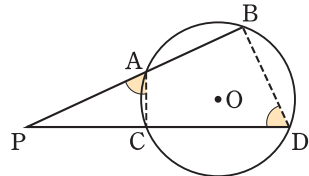
$$\triangle PAC \sim \triangle PDB$$

よって $PA : PD = PC : PB$

すなわち $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

点Pが円Oの内部にあるときも、

同様に証明できる。



例2

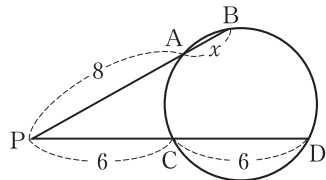
右の図で、 x を求めてみよう。

方べきの定理により

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

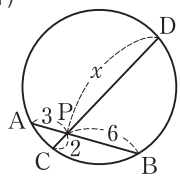
よって $8(x+8) = 6(6+6)$

すなわち $x = 1$

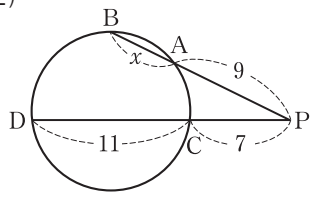


問 10 下の図で、 x を求めよ。

(1)



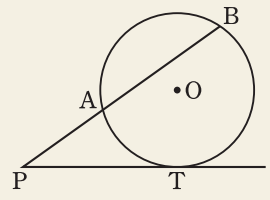
(2)



方べきの定理 (2)

定理 点 P を通る 2 直線的一方が円 O と 2 点 A, B で交わり、もう一方が点 T で接するとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$



証明

T と A, T と B を結ぶ。

$\triangle PTA$ と $\triangle PBT$ において、
接線と弦のつくる角の定理により

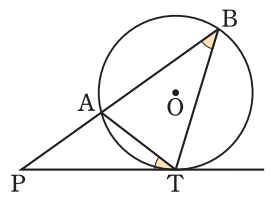
$$\angle PTA = \angle PBT$$

であり、 $\angle P$ は共通であるから

$$\triangle PTA \sim \triangle PBT$$

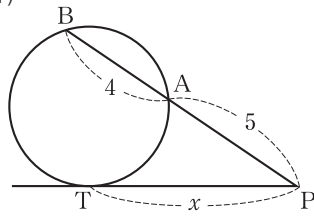
よって $PT : PB = PA : PT$

すなわち $PA \cdot PB = PT^2$

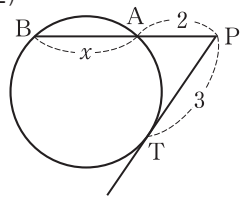


問 11 下の図で、PT は接線、T は接点である。 x を求めよ。

(1)



(2)



p.136 Training 9

p.153 LevelUp 6

6 2つの円

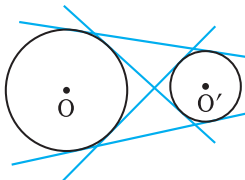
半径の異なる2つの円の位置関係については、右の図のように5通りの場合が考えられる。

(2)のような場合には2つの円は**外接する**といい、(4)のような場合には**内接する**という。いずれの場合も2つの円は1点を共有しており、その点を**接点**という。このとき、接点は2つの円の中心を通る直線上にある。

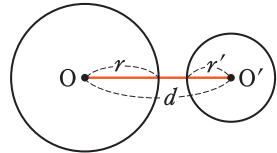
2つの円の位置関係は、それらの円の半径 r 、 r' と中心間の距離 d との関係で定まる。ただし、 $r > r'$ とする。

(1)	$d > r + r'$	互いに外部にある
(2)	$d = r + r'$	外接する
(3)	$r - r' < d < r + r'$	2点で交わる
(4)	$r - r' = d$	内接する
(5)	$r - r' > d$	一方が他方を含む

また、下の図のように1本の直線が2つの円の接線となることがある。このような接線を、2円の**共通接線**という。

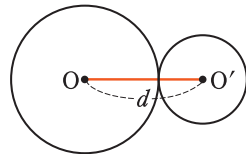


(1) 互いに外部にある



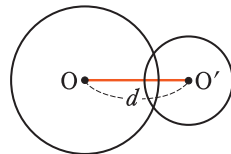
5

(2) 外接する

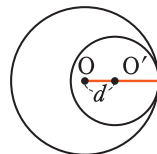


10

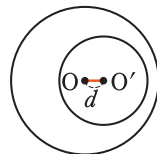
(3) 2点で交わる



(4) 内接する



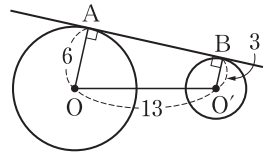
(5) 一方が他方を含む



問12 共通接線の本数は、上の5つの位置関係でどのように変わるか。

15

3 右の図で、直線 AB は 2 つの円 O, O' の共通接線, A, B は接点である。円 O, O' の半径はそれぞれ 6, 3 で、中心間の距離 OO' は 13 である。このとき、線分 AB の長さを求めよ。



考え方 点 O' から線分 AO に垂線 O'C を下ろし、直角三角形 OO'C をつくる。このとき、四角形 ACO'B は長方形となる。

解 右の図のように、点 O' から線分 AO に垂線 O'C を下ろす。四角形 ACO'B は長方形となるから

$$CA = O'B = 3$$

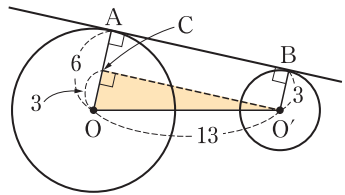
$$\text{よって } OC = 6 - 3 = 3$$

△OO'C において、三平方の定理により

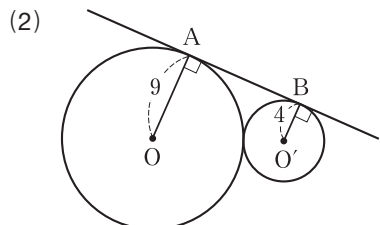
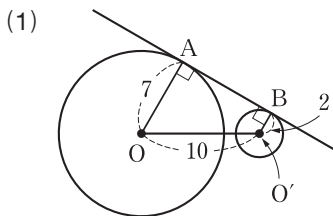
$$\begin{aligned} CO'^2 &= OO'^2 - OC^2 = 13^2 - 3^2 \\ &= 160 \end{aligned}$$

$$CO' > 0 \text{ より } CO' = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

$$\text{すなわち } AB = CO' = 4\sqrt{10}$$

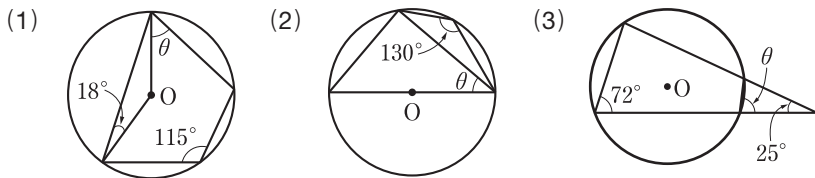


20 問 13 下の図で、直線 AB は 2 つの円 O, O' の共通接線, A, B は接点である。このとき、線分 AB の長さを求めよ。 p.136 Training 10、

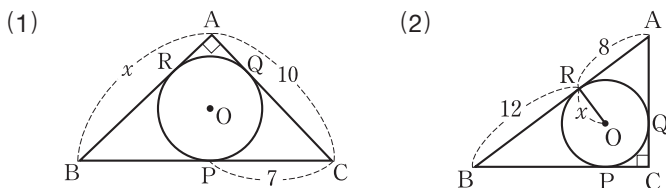


円 O と円 O' は外接する

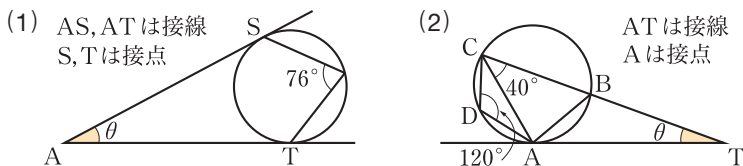
6 下の図で、角 θ を求めよ。ただし、 O は円の中心である。 p.126



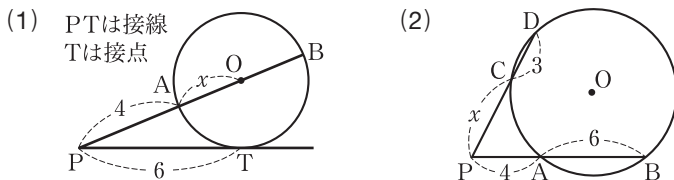
7 下の図で、円 O は直角三角形 ABC の内接円で、 P, Q, R は接点である。
 x を求めよ。 p.129



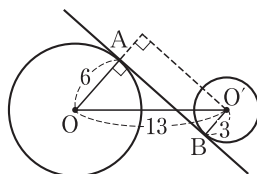
8 下の図で、角 θ を求めよ。 p.131 5



9 下の図で、 x を求めよ。ただし、 O は円の中心である。 p.133



10 右の図で、直線 AB は 2 つの円 O, O' の共通接線、 A, B は接点である。円 O, O' の半径がそれぞれ 6, 3 で、中心間の距離 OO' が 13 である。このとき、線分 AB の長さを求めよ。



p.135