1節　三角形と比

❶ 三角形と比

三角形における比の性質については，中学校で次のことを学んだ。

三角形と比

定理　△ABC の辺 AB，AC またはそれらの延長上に，それぞれ点 D, E があるとき

[1]　DE // BC　ならば

$$AD : AB = AE : AC = DE : BC$$

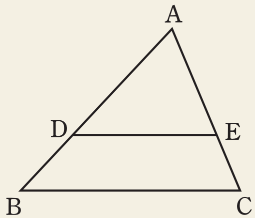
$$AD : DB = AE : EC$$

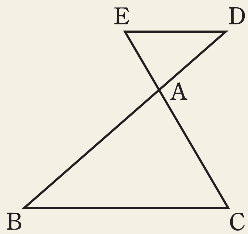
[2]　AD : AB = AE : AC　ならば

$$DE \parallel BC$$

[3]　AD : DB = AE : EC　ならば

$$DE \parallel BC$$





例 1　右の図で，DE // BC　とするとき，x，y を求めてみよう。

$$AD : DB = AE : EC$$

であるから　　$8 : 4 = x : 3$

よって　　$4x = 24$

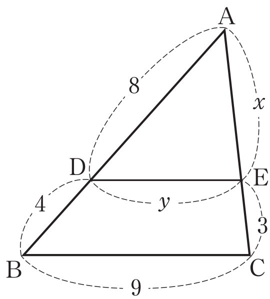
したがって　　$x = 6$

$$AD : AB = DE : BC$$

であるから　　$8 : 12 = y : 9$

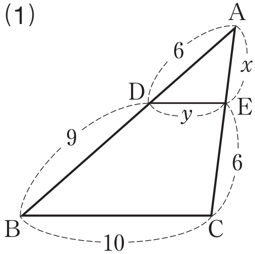
よって　　$12y = 72$

したがって　　$y = 6$

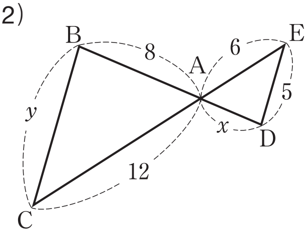


問 1　下の図で，DE // BC とするとき，x，y を求めよ。

(1)



(2)



注意　AD：AB＝AE：AC であることは，$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$ のように表すこともできる。

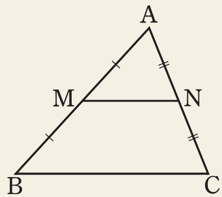
とくに，DとEがそれぞれ辺AB，ACの中点になっているときには，次の **中点連結定理** が成り立つ。

中点連結定理

定理　△ABCの2辺AB，ACの中点をそれぞれM，Nとするとき

$MN \parallel BC$

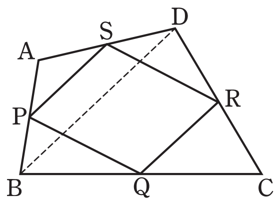
$MN=\dfrac{1}{2}BC$



問 2　右の図で，四角形ABCDの辺AB，BC，CD，DAの中点をそれぞれP，Q，R，Sとする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　四角形PQRSはどのような四角形になるか。

(2)　AC＝BD のとき，四角形PQRSはどのような四角形になるか。



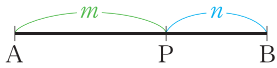
内分と外分

線分 AB 上に点 P があり

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

であるとき，P は AB を $m : n$ に **内分する** という。

[内分]



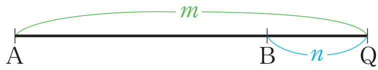
また，線分 AB の延長上に点 Q があり

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$$

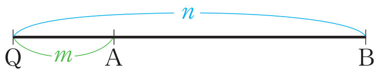
であるとき，Q は AB を $m : n$ に **外分する** という。m と n の大小関係により，点 Q の位置は右の図のようになる。

[外分]

$m>n$ のとき



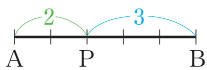
$m<n$ のとき



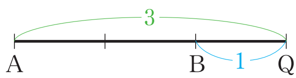
注意　線分を 1：1 に外分する点はない。

例 2　線分 AB に対して，次のように内分する点，外分する点を図示してみよう。

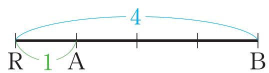
(1)　AB を 2：3 に内分する点 P



(2)　AB を 3：1 に外分する点 Q



(3)　AB を 1：4 に外分する点 R

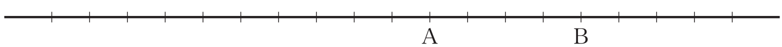


問 3　次の点を下の図に図示せよ。

(1)　線分 AB を 3：1 に内分する点 P

(2)　線分 AB を 5：1 に外分する点 Q

(3)　線分 AB を 2：3 に外分する点 R

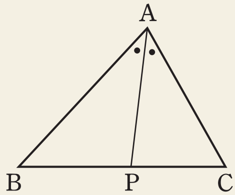


三角形の内角と外角の二等分線

内角の二等分線と比

定理　△ABC の ∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると，P は BC を AB : AC に内分する。すなわち

$$BP : PC = AB : AC$$



証明　頂点 C を通り AP に平行な直線を引き，BA の延長との交点を D とすると

$\angle ACD = \angle CAP$　—— 錯角

$\angle ADC = \angle BAP$　—— 同位角

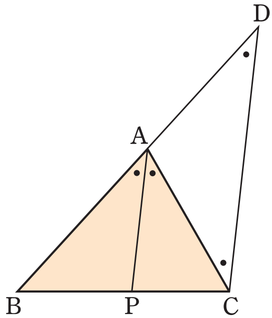
$\angle BAP = \angle CAP$ であるから

$\angle ACD = \angle ADC$

よって，△ACD は二等辺三角形であるから　　$AC = AD$　……①

また，PA // CD より　　$BP : PC = BA : AD$　……②

①，② より　　$BP : PC = AB : AC$



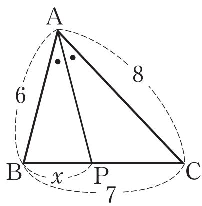
例 3　右の図で，AP が △ABC の ∠A の二等分線であるとき，

BP : PC = AB : AC であるから

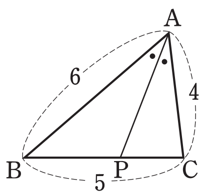
$$x : (7-x) = 6 : 8$$

よって　　$8x = 6(7-x)$

したがって　　$x = 3$



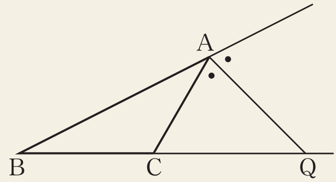
問 4　△ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を P とするとき，BP，PC の長さをそれぞれ求めよ。



外角の二等分線と比

定理　△ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすると，Q は BC を AB：AC に外分する。
すなわち

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$



注意　AB ＝ AC のときは, 外角の二等分線は辺 BC に平行となり, 点 Q をとれない。

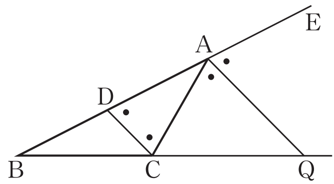
証明　AB ＞ AC のときについて証明する。
頂点 C を通り AQ に平行な直線を引き，BA との交点を D とする。
線分 BA の延長上に点 E をとる。

$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{CAQ}$　──── 錯角

$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{EAQ}$　──── 同位角

$\angle\mathrm{CAQ}=\angle\mathrm{EAQ}$　であるから

$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{ADC}$



よって，△ADC は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AC}\qquad\cdots\cdots ①$$

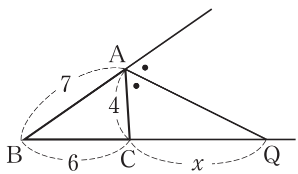
また，QA // CD より　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\mathrm{BA}:\mathrm{AD}$　……②

①，② より　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$

例 4　右の図で，AQ が △ABC の頂点 A における外角の二等分線であるとき，
BQ：QC ＝ AB：AC であるから

$(6+x):x=7:4$

よって，　$7x=4(6+x)$　より　$x=8$



問 5　△ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。頂点 A における外角の二等分線と BC の延長との交点を Q とするとき，CQ の長さを求めよ。

p.121 Training 1

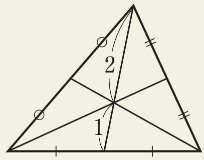
❷ 三角形の重心・外心・内心

三角形の重心

三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を **中線** という。

三角形の重心

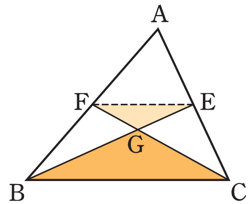
定理　三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。
その交点は，それぞれの中線を $2:1$ に内分する。



証明　$\triangle ABC$ において，2 本の中線 BE と CF の交点を G とする。E，F はそれぞれ辺 AC，AB の中点であるから，中点連結定理により

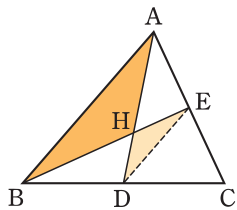
$$EF \parallel BC, \quad BC : EF = 2 : 1$$

よって　$BG : GE = CG : GF = 2 : 1$



一方，2 本の中線 BE と AD の交点を H とすると，同様に

$$DE \parallel AB, \quad AB : DE = 2 : 1$$

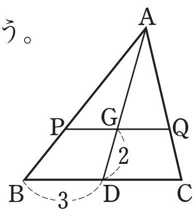


であるから　$BH : HE = AH : HD = 2 : 1$

よって，G と H は中線 BE を同じ比に内分するから，一致する。すなわち，3 本の中線は 1 点 G で交わり，G はそれぞれの中線を $2:1$ に内分する。

三角形の 3 本の中線の交点を，その三角形の **重心** という。

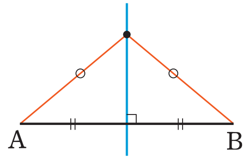
問 6　右の図で，点 G は $\triangle ABC$ の重心で，線分 PQ は G を通って辺 BC に平行である。$BD = 3$，$GD = 2$ のとき，AG，PQ の長さを求めよ。



p.121 Training 2

三角形の外心

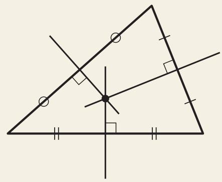
線分 AB の垂直二等分線上の点は，両端 A，B から等距離にある。また，両端 A，B から等距離にある点は AB の垂直二等分線上にある。



このことから，次の定理が成り立つ。

三角形の外心

定理　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。



証明　△ABC において，2 辺 BC，CA の垂直二等分線の交点を O とすると

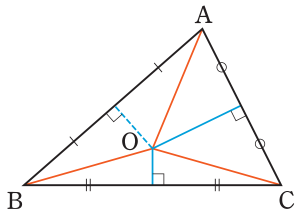
$$OB = OC \quad かつ \quad OC = OA$$

であるから

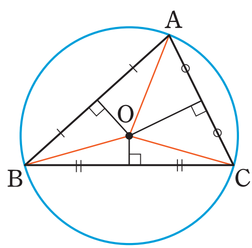
$$OB = OA$$

よって，O は辺 AB の垂直二等分線上にある。

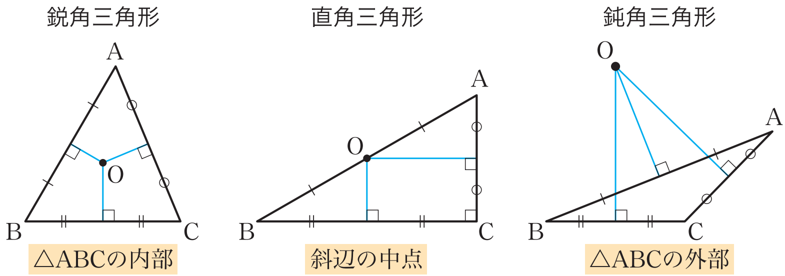
すなわち，3 辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。



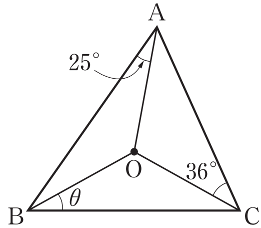
上の証明より，OA ＝ OB ＝ OC であるから，点 O は 3 つの頂点から等距離にある。よって，O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができる。この円を三角形の **外接円** といい，中心 O を三角形の **外心** という。



鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形の外心 O の位置は，それぞれ下の図のようになる。



例 5　右の図で，点 O が △ABC の外心であり，$\angle \mathrm{OAB}=25^\circ$，$\angle \mathrm{OCA}=36^\circ$ のとき，角 θ を求めてみよう。



点 O は △ABC の外心であるから

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ より

△OAB，△OBC，△OCA は二等辺三角形である。

よって　$\angle \mathrm{OBA}=\angle \mathrm{OAB}=25^\circ$

$\angle \mathrm{OAC}=\angle \mathrm{OCA}=36^\circ$

$\angle \mathrm{OCB}=\angle \mathrm{OBC}=\theta$

△ABC において

$$2(\angle \mathrm{OAB}+\angle \mathrm{OCA}+\angle \mathrm{OBC})=180^\circ$$

三角形の内角の和は 180°

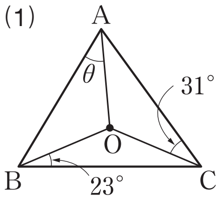
ゆえに

$$2(25^\circ+36^\circ+\theta)=180^\circ$$

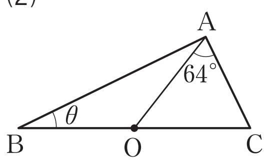
したがって　$\theta=29^\circ$

問 7　下の図で，点 O が △ABC の外心であるとき，角 θ を求めよ。

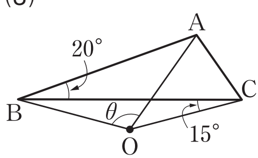
(1)



(2)



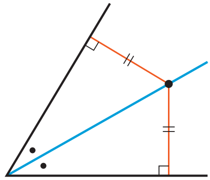
(3)



p.121 Training 3

三角形の内心

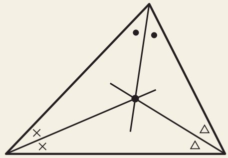
角の二等分線上の点は，角をつくる 2 辺から等距離にある。また，2 辺から等距離にある点は，角の二等分線上にある。



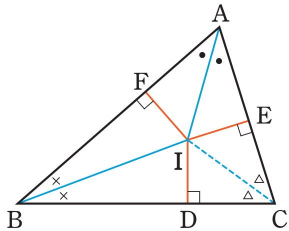
このことから，次の定理が成り立つ。

三角形の内心

定理　三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。



証明　△ABC において，∠A と ∠B の二等分線の交点を I とする。I から 3 辺 BC，CA，AB に垂線 ID，IE，IF を下ろすと



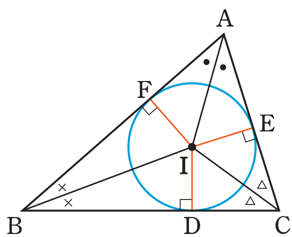
$$\mathrm{IE} = \mathrm{IF} \quad かつ \quad \mathrm{IF} = \mathrm{ID}$$

であるから　　$\mathrm{IE} = \mathrm{ID}$

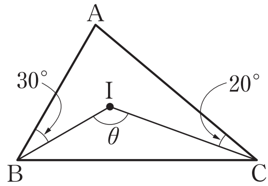
よって，I は ∠C の二等分線上にある。

すなわち，3 つの内角の二等分線は 1 点 I で交わる。

上の証明より，$\mathrm{ID} = \mathrm{IE} = \mathrm{IF}$ であるから，点 I は 3 点 D，E，F から等距離にある。よって，I を中心として D，E，F を通る円をかくことができる。この円は三角形の 3 辺に接している。この円を三角形の **内接円** といい，中心 I を三角形の **内心** という。



例 6 右の図で，点 I が △ABC の内心であり，∠IBA ＝ 30°，∠ICA ＝ 20° のとき，角 θ を求めてみよう。



点 I は △ABC の内心であるから

$$\angle \mathrm{IBC} = \angle \mathrm{IBA} = 30^\circ$$

$$\angle \mathrm{ICB} = \angle \mathrm{ICA} = 20^\circ$$

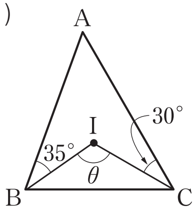
よって △IBC において

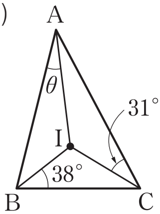
$$30^\circ + 20^\circ + \theta = 180^\circ$$ ―― 三角形の内角の和は 180°

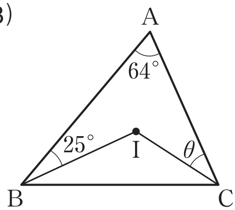
したがって

$$\theta = 130^\circ$$

問 8 下の図で，点 I が △ABC の内心であるとき，角 θ を求めよ。

(1)


(2)


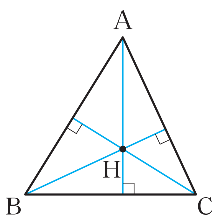
(3)


p.121 Training 4　p.152 Level Up 1

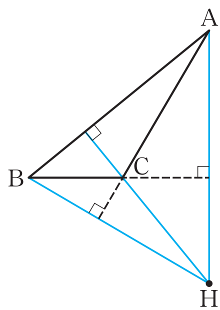
参考　三角形の垂心

△ABC の 3 つの頂点から対辺，またはその延長上に下ろした 3 本の垂線は，1 点 H で交わる。この点 H を三角形の **垂心** という。

鋭角三角形



鈍角三角形



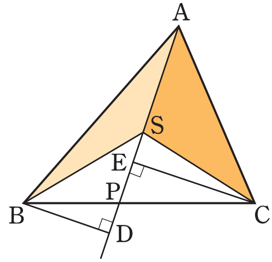
問 1 辺 AB を斜辺とする直角三角形 ABC の垂心の位置はどこか。

p.152 Level Up 2

③ 三角形の比の定理

チェバの定理

△ABC の辺 BC 上の点を P とし，AP 上に点 S をとる。B，C から直線 AP にそれぞれ垂線 BD，CE を下ろす。△ABS と △ACS において，AS を底辺と考えれば，BD，CE がそれぞれ高さとなるから，面積は



$$\triangle \mathrm{ABS} = \frac{1}{2}\mathrm{AS} \cdot \mathrm{BD}$$

△ABS は，その三角形の面積を表す

$$\triangle \mathrm{ACS} = \frac{1}{2}\mathrm{AS} \cdot \mathrm{CE}$$

である。よって，面積の比は

$$\frac{\triangle \mathrm{ABS}}{\triangle \mathrm{ACS}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CE}} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{\frac{1}{2}\mathrm{AS} \cdot \mathrm{BD}}{\frac{1}{2}\mathrm{AS} \cdot \mathrm{CE}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CE}}$$

となる。

一方，BD // CE より $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CE}} = \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CP}}$ ……②

したがって，①，② より $\dfrac{\triangle \mathrm{ABS}}{\triangle \mathrm{ACS}} = \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CP}}$

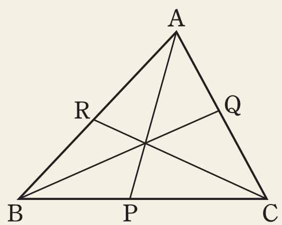
が成り立つ。

このことを用いると，次の **チェバの定理** が示される。

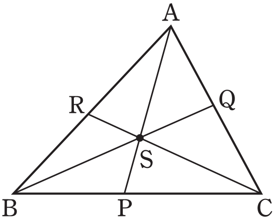
チェバの定理

定理　△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交われば

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$



証明　3 直線 AP，BQ，CR が交わる点を S とすると



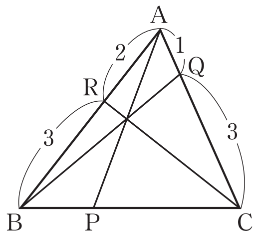
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\triangle\mathrm{ABS}}{\triangle\mathrm{CAS}},\quad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\triangle\mathrm{BCS}}{\triangle\mathrm{ABS}},$$

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{CAS}}{\triangle\mathrm{BCS}}$$

よって

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{ABS}}{\triangle\mathrm{CAS}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{BCS}}{\triangle\mathrm{ABS}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{CAS}}{\triangle\mathrm{BCS}}=1$$

例 7　右の図で



$\mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = 1 : 3$

$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = 2 : 3$

であるとき，BP：PC を求めてみよう。

チェバの定理により

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{3}{1} \qquad \cdots\cdots ②$$

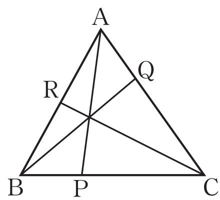
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ③$$

であるから，②，③ を ① に代入して

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{3}=1 \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{1}{2}$$

したがって　　$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = 1 : 2$

問 9　右の図で，点 Q，R がそれぞれ辺 AC，AB を次の比に内分するとき，BP：PC を求めよ。



(1)　$\mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = 2 : 3$，　$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = 2 : 1$

(2)　$\mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = 3 : 1$，　$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = 3 : 1$

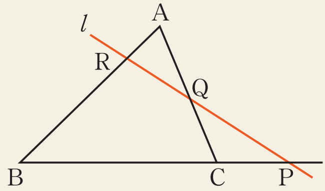
メネラウスの定理

三角形と直線に関して，次の **メネラウスの定理** が成り立つ。

メネラウスの定理

定理　直線 l が $\triangle$ABC の辺 BC, CA, AB，またはその延長と，それぞれ点 P，Q，R で交われば

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

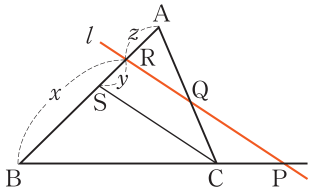


証明　点 C を通って直線 l に平行な直線を引き，辺 AB との交点を S とする。

RB $= x$, RS $= y$, AR $= z$ と表すと

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{x}{y},\quad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{y}{z},\quad \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{z}{x}$$

よって　$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1$$



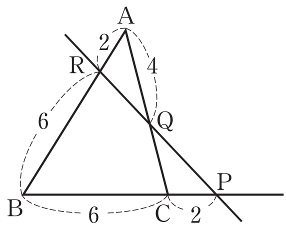
例 8　右の図で，CQ の長さを求めてみよう。

メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

であるから　$$\frac{8}{2}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{4}\cdot\frac{2}{6}=1$$

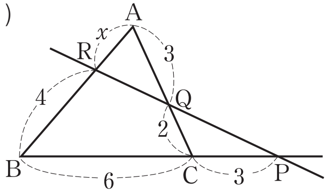
よって，CQ $=3$ である。



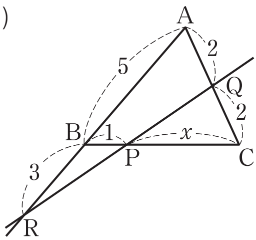
問 10　下の図で，x を求めよ。

p.121 Training 5　p.152 Level Up 3

(1)

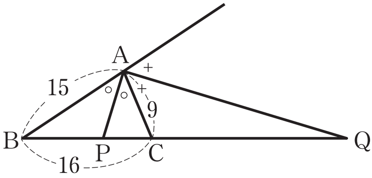


(2)



Training トレーニング

1 △ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 15，16，9 とする。頂点 A における内角の二等分線と辺 BC との交点を P，外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を Q とするとき，次の長さを求めよ。

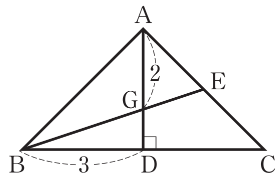


(1) BP　　(2) BQ

p.112

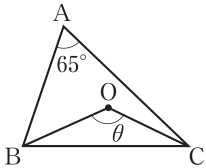
2 右の図で，点 G は △ABC の重心で，AG = 2，BD = 3，∠ADC = 90° である。次の長さを求めよ。

(1) AE　　(2) GE　p.113

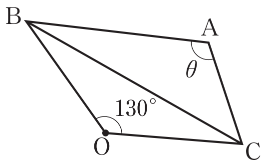


3 下の図で，点 O が △ABC の外心であるとき，角 θ を求めよ。p.115

(1)

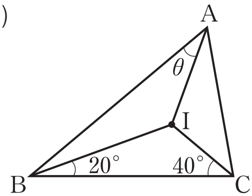


(2)

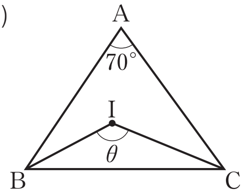


4 下の図で，点 I が △ABC の内心であるとき，角 θ を求めよ。p.117

(1)



(2)



5 右の図において

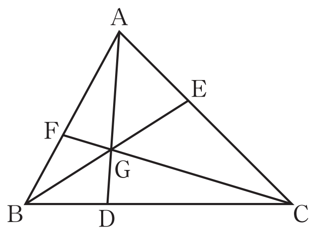
AF：FB = 3：2，AE：EC = 2：3

であるとき，次の比を求めよ。

(1) BD：DC

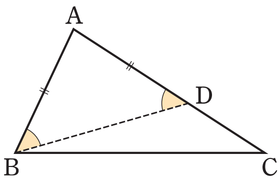
(2) AG：GD

p.120



参考　辺と角の大小関係

$\triangle$ABC において，辺 AB，AC が等しければ，この三角形は二等辺三角形であり，$\angle$B と $\angle$C は等しい。AB，AC が等しくないとき，それぞれの辺に対する角の大小関係がどうなるかを考えてみよう。



$\mathrm{AB} < \mathrm{AC}$ の場合は，辺 AC 上に，$\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ となるように点 D をとることができる。このとき，$\triangle$ABD は二等辺三角形となり，$\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{ADB}$ である。よって

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ABD} + \angle \mathrm{CBD}$$
$$= \angle \mathrm{ADB} + \angle \mathrm{CBD}$$

$\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{ADB}$

$\angle$ADB は $\triangle$BCD の頂点 D における外角であるから

$$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{C} + \angle \mathrm{CBD}$$

ゆえに　$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{C} + \angle \mathrm{CBD} + \angle \mathrm{CBD} > \angle \mathrm{C}$

となる。

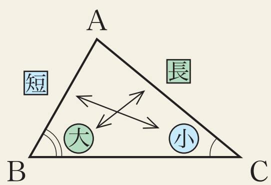
すなわち，$\mathrm{AB} < \mathrm{AC}$ ならば $\angle \mathrm{C} < \angle \mathrm{B}$ が成り立つ。

また，その逆，すなわち $\angle \mathrm{C} < \angle \mathrm{B}$ ならば $\mathrm{AB} < \mathrm{AC}$ も成り立つことが知られている。

以上より，次の定理が成り立つ。

辺と角の大小関係

定理　三角形において，長い辺に対する角は，短い辺に対する角より大きい。
また，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より長い。

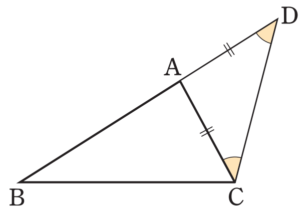


このことを用いると，三角形の 3 辺の長さについて，次のページの関係が成り立つことが示される。

三角形の３辺の長さの関係

定理　三角形において，２辺の長さの和は，他の１辺の長さより大きい。

証明　△ABC において，AB＋AC ＞ BC であることを示す。



辺 BA の延長上に，AC ＝ AD となるように点Dをとる。

このとき

$$AB+AC=AB+AD=BD \qquad \cdots\cdots ①$$

となる。

また，△ACD は二等辺三角形であるから

$$\angle ACD=\angle D \qquad \cdots\cdots ②$$

よって，② より

$$\angle BCD=\angle BCA+\angle ACD$$
$$=\angle BCA+\angle D>\angle D$$

したがって，辺と角の大小関係により

$$BD>BC \qquad \cdots\cdots ③$$

①，③ から　AB＋AC ＞ BC

が成り立つ。

同様にして AC＋BC ＞ AB，AB＋BC ＞ AC も成り立つ。

問 1　２辺の長さの和と他の１辺の長さを比較することにより，３辺の長さが次のような △ABC が存在するかどうか調べよ。

$$AB=6,\ BC=2,\ CA=3$$