3 章　図形の性質

Readiness check レディネス チェック

教科書 P.106

問 1　$\angle \boldsymbol{x} = 180^\circ - 120^\circ = \mathbf{60^\circ}$

$\angle \boldsymbol{y} = 180^\circ - 75^\circ = \mathbf{105^\circ}$

問 2　$50^\circ + \angle x = 45^\circ + 28^\circ$　より

$\angle x = \mathbf{23^\circ}$

問 3　**△ABC ≡ △JLK**

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

△DEF ≡ △NOM

3 組の辺がそれぞれ等しい。

△GHI ≡ △PRQ

2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい。

教科書 P.107

問 4　**△ABC ≡ △KJL**

斜辺と 1 組の鋭角がそれぞれ等しい。

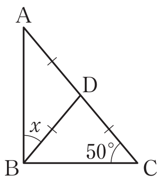
△DEF ≡ △IGH

斜辺と他の 1 組の辺がそれぞれ等しい。

問 5　(1)　三角形は二等辺三角形であるから

$\angle \boldsymbol{x} = (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = \mathbf{75^\circ}$

(2)　2 つの三角形は二等辺三角形である。



∠BDC は △ABD の外角であるから

$\angle BDC = 2\angle x$

また，∠BDC は二等辺三角形 DBC の頂角であるから

$\angle BDC = 180^\circ - 50^\circ \times 2 = 80^\circ$

したがって

$2\angle x = 80^\circ$

$\angle \boldsymbol{x} = \mathbf{40^\circ}$

問 6　**△ABC ∽ △JLK**

2 組の角がそれぞれ等しい。

△DEF ∽ △MNO

2 組の辺の比と，その間の角がそれぞれ等しい。

△GHI ∽ △QPR

3 組の辺の比がすべて等しい。

1 節　三角形と比

❶ 三角形と比

教科書 P.109

問 1　(1)　AD : DB = AE : EC　であるから

$6 : 9 = x : 6$

$9x = 36$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$

AD : AB = DE : BC　であるから

$6 : (6 + 9) = y : 10$

$15y = 60$

$\boldsymbol{y} = \mathbf{4}$

(2)　AB : AD = AC : AE　であるから

$8 : x = 12 : 6$

$12x = 48$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$

AC : AE = BC : DE　であるから

$12 : 6 = y : 5$

$6y = 60$

$\boldsymbol{y} = \mathbf{10}$

問 2　(1)　B と D を結ぶ。

△ABD において，P，S はそれぞれ AB，AD の中点であるから，中点連結定理により

$$PS \parallel BD,\ PS = \frac{1}{2}BD$$

同様に，△CBD において

$$QR \parallel BD,\ QR = \frac{1}{2}BD$$

よって，PS // QR，PS = QR となり，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，四角形 PQRS は **平行四辺形** になる。

(2)　(1) より　$PS = QR = \frac{1}{2}BD$

(1) と同様にして，A と C を結んで考えると

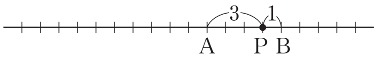
$$PQ = SR = \frac{1}{2}AC$$

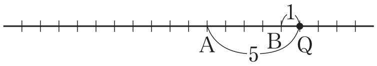
AC = BD　であるから

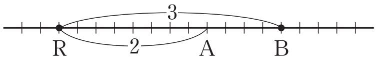
$PS = QR = PQ = SR$

よって，4 つの辺がすべて等しいから，四角形 PQRS は **ひし形** になる。

教科書 P.110

問3 (1) 

(2) 

(3) 

教科書 P.111

問4 △ABC において，内角の二等分線と比の定理により

$BP : PC = AB : AC$

$= 6 : 4$

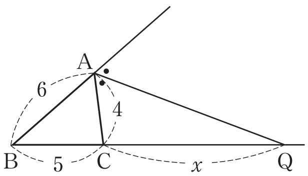
$= 3 : 2$

よって　$\mathbf{BP} = \dfrac{3}{3+2}BC = \dfrac{3}{5} \cdot 5 = \mathbf{3}$

$\mathbf{PC} = BC - BP = 5 - 3 = \mathbf{2}$

教科書 P.112

問5 △ABC において，外角の二等分線と比の定理により



$BQ : QC$

$= AB : AC$

$CQ = x$ とおくと

$(5 + x) : x = 6 : 4$

$6x = 4(x + 5)$

$x = 10$

よって　$\mathbf{CQ = 10}$

❷ 三角形の重心・外心・内心

教科書 P.113

問6 点 G は △ABC の重心であるから

$AG : GD = 2 : 1$

$\mathbf{AG} = 2GD = 2 \cdot 2 = \mathbf{4}$

点 D は辺 BC の中点であるから　$DC = 3$

よって　$BC = 3 + 3 = 6$

$PQ \parallel BC$ であるから，三角形と比の定理により

$PQ : BC = AP : AB$

$= AG : AD$

よって　$PQ : 6 = 2 : 3$

$3PQ = 12$

したがって　$\mathbf{PQ = 4}$

教科書 P.115

問7 (1) 点 O は △ABC の外心であるから

$OA = OB = OC$ より

△OAB，△OBC，△OCA は二等辺三角形である。

よって　$\angle OBA = \angle OAB = \theta$

$\angle OCB = \angle OBC = 23°$

$\angle OAC = \angle OCA = 31°$

△ABC において

$2(\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA) = 180°$

ゆえに

$2(\theta + 23° + 31°) = 180°$

したがって　$\boldsymbol{\theta = 36°}$

(2) 点 O は △ABC の外心であるから

$OA = OB = OC$ より

△OAB，△OCA は二等辺三角形である。

よって　$\angle OAB = \angle OBA = \theta$

$\angle OCA = \angle OAC = 64°$

△ABC において

$2(\angle OBA + \angle OAC) = 180°$

ゆえに

$2(\theta + 64°) = 180°$

したがって　$\boldsymbol{\theta = 26°}$

(3) 点 O は △ABC の外心であるから

$OA = OB = OC$ より

△OAB，△OBC は二等辺三角形である。

よって　$\angle OBC = \angle OCB = 15°$

$\angle OAB = \angle OBA$

$= \angle OBC + \angle CBA$

$= 15° + 20° = 35°$

△OAB において

$\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180°$

ゆえに

$35° + 35° + \theta = 180°$

したがって　$\boldsymbol{\theta = 110°}$

教科書 P.117

問8 (1) 点 I は △ABC の内心であるから

$\angle IBC = \angle IBA = 35°$

$\angle ICB = \angle ICA = 30°$

よって，△IBC において

$35° + 30° + \theta = 180°$

したがって　　$\theta = 115°$

(2)　点 I は △ABC の内心であるから

$\angle IBA = \angle IBC = 38°$

$\angle ICB = \angle ICA = 31°$

$\angle IAC = \angle IAB = \theta$

よって，△ABC において

$2(\angle IBC + \angle ICA + \angle IAB) = 180°$

ゆえに

$2(38° + 31° + \theta) = 180°$

したがって　　$\theta = 21°$

(3)　点 I は △ABC の内心であるから

$\angle IBC = \angle IBA = 25°$

$\angle ICB = \angle ICA = \theta$

よって，△ABC において

$2(\angle IBA + \angle ICA) + \angle BAC = 180°$

ゆえに

$2(25° + \theta) + 64° = 180°$

したがって　　$\theta = 33°$

参考　三角形の垂心

問 1　**頂点 C の位置**

❸ 三角形の比の定理

教科書 P.119

問 9　(1)　チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

ここで　$\frac{CQ}{QA} = \frac{3}{2}$，$\frac{AR}{RB} = \frac{2}{1}$

であるから

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

よって　$\frac{BP}{PC} = \frac{1}{3}$

すなわち　　$BP : PC = 1 : 3$

(2)　チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

ここで　$\frac{CQ}{QA} = \frac{1}{3}$，$\frac{AR}{RB} = \frac{3}{1}$

であるから

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1} = 1$$

よって　$\frac{BP}{PC} = 1$

すなわち　　$BP : PC = 1 : 1$

教科書 P.120

問10　(1)　メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

であるから　$\frac{9}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{4} = 1$

よって，$x = 2$ である。

(2)　メネラウスの定理により

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

であるから　$\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{8}{3} = 1$

よって，$x = \frac{8}{3}$ である。

Training トレーニング

教科書 P.121

1　(1)　AP が △ABC の頂点 A における内角の二等分線であるから

$BP : PC = AB : AC$

$= 15 : 9$

$= 5 : 3$

よって　　$BP = BC \times \frac{5}{8}$

$= 16 \times \frac{5}{8}$

したがって　　$BP = 10$

(2)　AQ が △ABC の頂点 A における外角の二等分線であるから

$BQ : QC = AB : AC$

$= 15 : 9$

$= 5 : 3$　　……①

また　　$BQ = BC + CQ$

$= 16 + CQ$　　……②

② を ① に代入して

$(16 + CQ) : CQ = 5 : 3$

よって　　$CQ = 24$

したがって　　$BQ = 16 + 24$

$= 40$

2　(1)　点 G は △ABC の重心であるから

$DC = BD = 3$

$AG : GD = 2 : 1$，$AG = 2$ より

$GD = 1$

$\triangle ADC$ は $\angle ADC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$AC = 3\sqrt{2}$

E は AC の中点であるから

$\mathbf{AE} = \frac{1}{2}AC = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

(2) $\triangle BDG$ は $\angle BDG = 90^\circ$ の直角三角形であるから，三平方の定理により

$BG^2 = BD^2 + DG^2$

$= 3^2 + 1^2$

$= 10$

$BG > 0$ より　　$BG = \sqrt{10}$

点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$BG : GE = 2 : 1$

よって　　$\sqrt{10} : GE = 2 : 1$

したがって　　$\mathbf{GE} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{2}}$

3 (1) 点 O は $\triangle ABC$ の外心であるから，

$OA = OB = OC$ より，$\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ は二等辺三角形である。

$\angle OAB = \angle OBA$

$\angle OAC = \angle OCA$

$\angle OAB + \angle OAC = 65^\circ$ であるから, $\triangle ABC$ において

$\angle OBC + \angle OCB$

$+ 2(\angle OAB + \angle OAC) = 180^\circ$

ゆえに

$\angle OBC + \angle OCB = 50^\circ$

$\triangle OBC$ において

$\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ$

よって

$50^\circ + \theta = 180^\circ$

したがって

$\boldsymbol{\theta = 130^\circ}$

(2) O と A を結ぶ。点 O は $\triangle ABC$ の外心であるから

$OA = OB = OC$ より

$\triangle OAB$, $\triangle OCA$ は二等辺三角形である。

よって　　$\angle OAB = \angle OBA$

$\angle OAC = \angle OCA$

$\angle OAB + \angle OAC = \theta$ であるから

$\angle OBA + \angle OCA = \theta$

四角形 OCAB において

$\angle OBA + \angle OCA + \angle BAC + \angle BOC$

$= 360^\circ$

ゆえに

$2\theta + 130^\circ = 360^\circ$

したがって　　$\boldsymbol{\theta = 115^\circ}$

4 (1) 点 I が $\triangle ABC$ の内心であるから

$\angle IBA = \angle IBC = 20^\circ$

$\angle ICA = \angle ICB = 40^\circ$

$\angle IAC = \angle IAB = \theta$

よって，$\triangle ABC$ において

$2(\angle IBC + \angle ICB + \angle IAB) = 180^\circ$

ゆえに

$\theta + 60^\circ = 90^\circ$

したがって　　$\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$

(2) 点 I が $\triangle ABC$ の内心であるから

$\angle IBC = \angle IBA$

$\angle ICB = \angle ICA$

よって，$\triangle ABC$ において

$2(\angle IBC + \angle ICB) + \angle BAC = 180^\circ$

ゆえに

$\angle IBC + \angle ICB = 55^\circ$

$\triangle IBC$ において

$\angle IBC + \angle ICB + \angle BIC = 180^\circ$

ゆえに

$55^\circ + \theta = 180^\circ$

したがって　　$\boldsymbol{\theta = 125^\circ}$

5 (1) チェバの定理により

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

ここで　　$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$, $\frac{AF}{FB} = \frac{3}{2}$

であるから

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

よって　　$\frac{BD}{DC} = \frac{4}{9}$

したがって　　$\mathbf{BD : DC = 4 : 9}$

(2) メネラウスの定理により

$$\frac{BC}{CD} \cdot \frac{DG}{GA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，(1) より　　$BD : DC = 4 : 9$

であるから

$$\frac{BC}{CD} = \frac{4+9}{9} = \frac{13}{9} \quad \cdots\cdots ②$$

また　$\frac{AF}{FB} = \frac{3}{2}$　……③

②, ③を①に代入して

$$\frac{13}{9} \cdot \frac{DG}{GA} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

よって

$$\frac{DG}{GA} = \frac{6}{13}$$

したがって　**AG : GD = 13 : 6**

参考　辺と角の大小関係

教科書 P.123

問1　$2+3<6$ より $BC+CA<AB$
よって, △ABC は**存在しない**。

2節　円の性質

1　円周角の定理

教科書 P.124

問1　(1)　$\theta = 80^\circ \times \frac{1}{2} = \mathbf{40^\circ}$

(2)　$\theta = 20^\circ \times 2 = \mathbf{40^\circ}$

(3)　$\theta = 110^\circ \times 2 = \mathbf{220^\circ}$

教科書 P.125

問2　(1)　AB は直径であるから　$\angle APB = 90^\circ$
よって　$\theta = 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ) = \mathbf{35^\circ}$

(2)　BC は直径であるから　$\angle BAC = 90^\circ$
よって　$\angle BAP = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$
円周角の定理により, $\angle BAP = \angle BCP$ であるから
$\theta = \mathbf{20^\circ}$

(3)　円周角の定理により
$\angle ABC = \angle ADC = 25^\circ$
BC は直径であるから　$\angle BAC = 90^\circ$
よって　$\theta = 180^\circ - (90^\circ + 25^\circ) = \mathbf{65^\circ}$

問3　①　$\angle ABD = \angle ACD$
②　$\angle BAC \neq \angle BDC$
③　$\angle BAC = 180^\circ - (82^\circ + 44^\circ) = 54^\circ$ より
$\angle BAC = \angle BDC$
①〜③より, 4点が同一円周上にあるものは
①と③

2　円に内接する四角形

教科書 P.126

問4　(1)　円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから
$\theta = 180^\circ - 74^\circ = \mathbf{106^\circ}$

(2)　円に内接する四角形の外角は, それと隣り合う内角の対角に等しいから
$\theta = \mathbf{80^\circ}$

(3)　$\theta + \{180^\circ - (45^\circ + 55^\circ)\} = 180^\circ$ より
$\theta = \mathbf{100^\circ}$

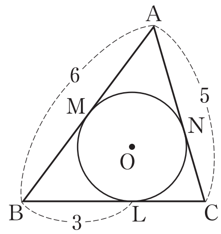
教科書 P.127

問5　①　$\angle A + \angle C = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$
②　$\angle B = 180^\circ - (46^\circ + 24^\circ) = 110^\circ$
$\angle B + \angle D = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$
③　$\angle BAD = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$
よって, $\angle BAD$ と $\angle BCD$ の外角は等しくない。
①〜③より, 四角形 ABCD が円に内接するものは
①, ②

3　円と接線

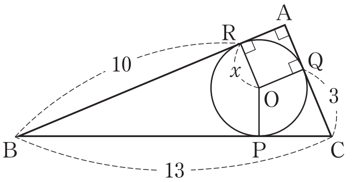
教科書 P.128

問6　右の図のように, AB, AC と円 O との接点をそれぞれ M, N とする。
接線の長さの定理により



$BM = BL = 3$
$AM = BA - BM$
$= 6 - 3 = 3$
$AN = AM = 3$
$CN = AC - AN$
$= 5 - 3 = 2$
$CL = CN = 2$
よって　$\mathbf{BC} = BL + CL = 3 + 2 = \mathbf{5}$

問7 四角形 AROQ は正方形であるから，円 O の半径を x とおくと



$AR = AQ = x$

一方

$BR = BP = 10$

$CQ = CP = 3$

であるから，△ABC に三平方の定理を用いて

$(x+10)^2+(x+3)^2=13^2$

整理して　$x^2+13x-30=0$

$(x+15)(x-2)=0$

よって　$x=-15,\ 2$

x は半径であるから，$x>0$ より　$x=2$

したがって，**円 O の半径は 2 である。**

また　$\mathbf{AB}=AR+RB=2+10=\mathbf{12}$

$\mathbf{AC}=AQ+QC=2+3=\mathbf{5}$

❹ 接線と弦のつくる角

教科書 P.131

問8 (1) $\angle BAT=\angle ACB=76^\circ$

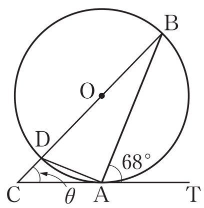
よって　$\boldsymbol{\theta}=180^\circ-76^\circ=\mathbf{104^\circ}$

(2) $\angle ACB=\angle BAT=73^\circ$

よって，円周角の定理により

$\boldsymbol{\theta}=2\times73^\circ=\mathbf{146^\circ}$

(3) 右の図のように，BC と円 O との交点を D とし，A と D を結ぶ。



$\angle ADB=\angle BAT$

$=68^\circ$

$\angle BAD=90^\circ$

より

$\angle ABD=180^\circ-(68^\circ+90^\circ)=22^\circ$

△ABC において，内角と外角の関係から

$\theta+\angle ABD=\angle BAT$

よって　$\boldsymbol{\theta}=68^\circ-22^\circ=\mathbf{46^\circ}$

問9 $AC=AD$ であるから，△ACD は二等辺三角形であり

$\angle ACB=\angle ADB$　……①

また，接線と弦のつくる角の定理により

$\angle ACB=\angle DAB$　……②

①，② より

$\angle ADB=\angle DAB$

よって，△ABD は二等辺三角形であり，

$BA=BD$ である。

❺ 方べきの定理

教科書 P.133

問10 (1) 方べきの定理により

$3\cdot6=2\cdot x$

よって　$\boldsymbol{x=9}$

(2) 方べきの定理により

$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

よって　$9(9+x)=7(7+11)$

$81+9x=126$

$9x=45$

$\boldsymbol{x=5}$

問11 (1) 方べきの定理により

$5(5+4)=x^2$

$x^2=45$

$x>0$ より　$\boldsymbol{x=3\sqrt{5}}$

(2) 方べきの定理により

$2(2+x)=3^2$

$4+2x=9$

$2x=5$

$x>0$ より　$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{2}}$

❻ 2つの円

教科書 P.134

問12 (1) 互いに外部にある　……**4 本**

(2) 外接する　……**3 本**

(3) 2 点で交わる　……**2 本**

(4) 内接する　……**1 本**

(5) 一方が他方を含む　……**なし**

教科書 P.135

問13 (1) 点 O′ から線分 AO に垂線 O′C を下ろす。

四角形 ACO′B は長方形となるから

$CA=O'B=2$

よって　　$OC = 7 - 2 = 5$

$\triangle COO'$ において，三平方の定理により

$$OC^2 + CO'^2 = OO'^2$$

$$CO'^2 = 10^2 - 5^2 = 75$$

$CO' > 0$ より　　$CO' = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

すなわち　　$\boldsymbol{AB = CO' = 5\sqrt{3}}$

(2)　点 O′ から線分 AO に垂線 O′C を下ろす。

四角形 ACO′B は長方形となるから

$$CA = O'B = 4$$

よって　　$OC = 9 - 4 = 5$

また，中心間の距離 OO′ は，2 円の半径の和であるから

$$OO' = 9 + 4 = 13$$

$\triangle COO'$ において，三平方の定理により

$$OC^2 + CO'^2 = OO'^2$$

$$CO'^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

$CO' > 0$ より　　$CO' = \sqrt{144} = 12$

すなわち　　$\boldsymbol{AB = CO' = 12}$

Training トレーニング

教科書 P.136

6　(1)　円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

$$(18° + \theta) + 115° = 180°$$

よって　　$\boldsymbol{\theta = 47°}$

(2)　直径に対する円周角は 90° であり，また，円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

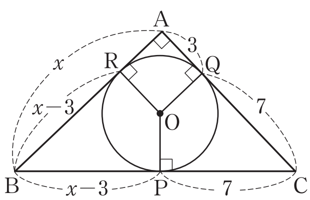
$$(90° - \theta) + 130° = 180°$$

よって　　$\boldsymbol{\theta = 40°}$

(3)　円に内接する四角形の外角は，それと隣り合う内角の対角に等しいから

$$\theta = 180° - (72° + 25°) = \boldsymbol{83°}$$

7　(1)



$AR = AQ = 10 - 7$ より

$$AR = AQ = 3$$

したがって

$$BR = BP = x - 3$$

よって　　$BC = (x - 3) + 7 = x + 4$

$\triangle ABC$ に三平方の定理を用いて

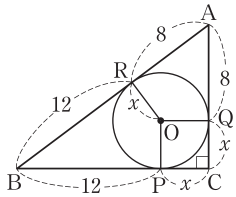
$$x^2 + 10^2 = (x + 4)^2$$

$$x^2 + 100 = x^2 + 8x + 16$$

$$8x = 84$$

$$\boldsymbol{x = \frac{21}{2}}$$

(2)　四角形 CQOP は正方形で，1 辺の長さは円 O の半径に等しいから



$$CP = CQ = OR$$
$$= x$$

$$BP = BR = 12$$

$$AQ = AR = 8$$

$\triangle ABC$ に三平方の定理を用いて

$$(8 + x)^2 + (12 + x)^2 = (12 + 8)^2$$

整理して　　$x^2 + 20x - 96 = 0$

$$(x + 24)(x - 4) = 0$$

よって　　$x = -24,\ 4$

x は半径であるから，$x > 0$ より

$$\boldsymbol{x = 4}$$

8　(1)　S と T を結ぶ。接線と弦のつくる角の定理により

$$\angle AST = 76°,\ \angle ATS = 76°$$

よって，$\triangle AST$ において

$$\boldsymbol{\theta} = 180° - (76° + 76°) = \boldsymbol{28°}$$

別解　円の中心を O とする。

$$\angle OSA = \angle OTA = 90°$$

円周角の定理により

$$\angle SOT = 2 \times 76° = 152°$$

よって，四角形 OSAT において

$$\theta = 360° - (90° + 90° + 152°) = 28°$$

(2)　四角形 ABCD は円に内接しているから

$$\angle ABT = \angle ADC = 120°$$

また，接線と弦のつくる角の定理により

$$\angle BAT = \angle ACB = 40°$$

よって，$\triangle ABT$ において

$$\boldsymbol{\theta} = 180° - (\angle ABT + \angle BAT)$$
$$= 180° - (120° + 40°) = \boldsymbol{20°}$$

別解

接線と弦のつくる角の定理により

3 章

$$\angle \mathrm{CAT} = \angle \mathrm{ADC} = 120°$$

よって，△CAT において

$$\theta = 180° - (\angle \mathrm{CAT} + \angle \mathrm{TCA})$$
$$= 180° - (120° + 40°) = 20°$$

9 (1) 方べきの定理により

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$$

よって　$4(4+2x) = 6^2$

$$16 + 8x = 36$$
$$8x = 20$$
$$\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$$

(2) 方べきの定理により

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$$

よって　$4(4+6) = x(x+3)$

整理して　$x^2 + 3x - 40 = 0$

$$(x+8)(x-5) = 0$$

したがって　$x = -8,\ 5$

$x > 0$ より　$\boldsymbol{x = 5}$

10 点 O′ から線分 OA の延長に垂線 O′C を下ろす。

四角形 ABO′C は長方形となるから

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BO'} = 3$$

よって　$\mathrm{CO} = 3 + 6 = 9$

△COO′ において，三平方の定理により

$$\mathrm{OC}^2 + \mathrm{CO'}^2 = \mathrm{OO'}^2$$
$$\mathrm{CO'}^2 = 13^2 - 9^2 = 88$$

$\mathrm{CO'} > 0$ より　$\mathrm{CO'} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$

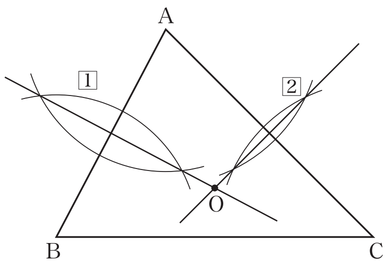
すなわち　$\mathrm{AB} = \mathrm{CO'} = \boldsymbol{2\sqrt{22}}$

3節 作図

1 基本的な作図

教科書 P.137

問 1

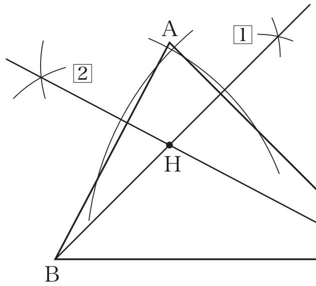


$\boxed{1}$ 辺 AB の垂直二等分線を引く。

$\boxed{2}$ 辺 AC の垂直二等分線を引く。

2 本の垂直二等分線の交点が，外心 O である。

問 2



$\boxed{1}$ 頂点 B を通る直線 CA への垂線を引く。

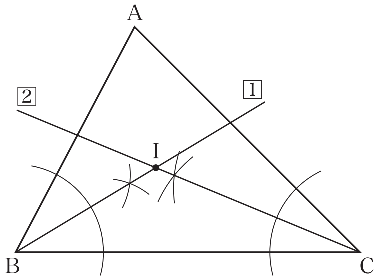
$\boxed{2}$ 頂点 C を通る直線 AB への垂線を引く。

2 本の垂線の交点を H とする。

注意 頂点 A を通る直線 BC の垂線も，点 H を通る。この交点 H を，垂心という。

教科書 P.138

問 3



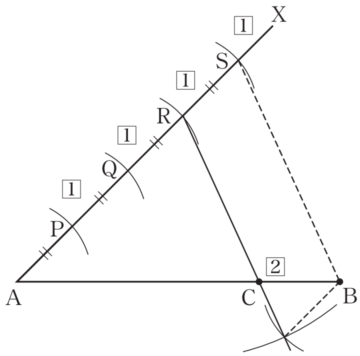
$\boxed{1}$ ∠B の二等分線を引く。

$\boxed{2}$ ∠C の二等分線を引く。

2 本の角の二等分線の交点が，内心 I である。

教科書 P.139

問 4



$\boxed{1}$ 半直線 AX を引き，AX 上に点 P をとり，さらに AP = PQ = QR = RS となる点 Q，R，S をこの順にとる。

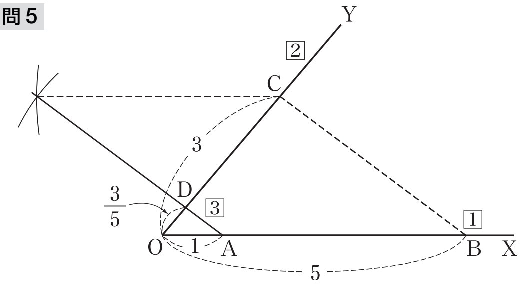
$\boxed{2}$ 点 R を通り，直線 SB に平行な直線を引き，線分 AB との交点を C とする。

このとき，点 C は線分 AB を 3 : 1 に内分する点である。

❷ 長さの作図

教科書 P.140

問 5



$\boxed{1}$　半直線 OX を引き，OA＝1 となる点 A と，OB＝5 となる点 B をとる。

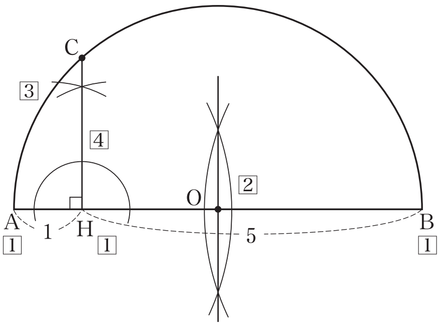
$\boxed{2}$　半直線 OY を引き，OC＝3 となる点 C をとる。

$\boxed{3}$　点 A を通り直線 BC に平行な直線を引き，OY との交点を D とする。

このとき，OD＝$\dfrac{3}{5}$ である。

教科書 P.141

問 6



$\boxed{1}$　1 つの直線上に AH＝1，HB＝5 となる 3 点 A，H，B をこの順にとる。

$\boxed{2}$　線分 AB の中点 O をとる。

$\boxed{3}$　O を中心とする半径 OA の半円をかく。

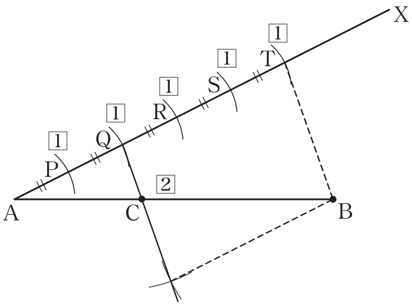
$\boxed{4}$　点 H を通り線分 AB に垂直な直線を引き，半円との交点を C とする。

このとき，CH＝$\sqrt{5}$ である。

Training トレーニング

教科書 P.142

11

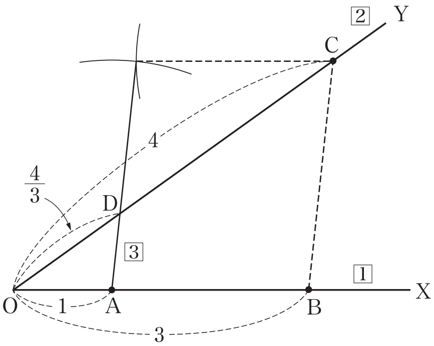


$\boxed{1}$　半直線 AX を引き，AX 上に点 P をとり，さらに AP＝PQ＝QR＝RS＝ST となる点 Q，R，S，T をこの順にとる。

$\boxed{2}$　点 Q を通り，直線 TB に平行な直線を引き，線分 AB との交点を C とする。

このとき，点 C は線分 AB を 2：3 に内分する点である。

12



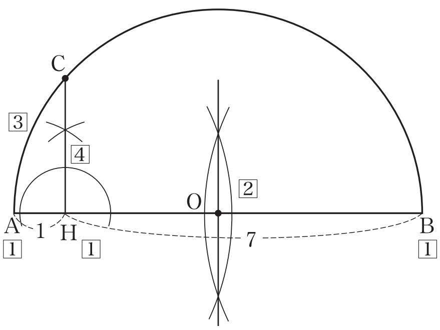
$\boxed{1}$　半直線 OX を引き，OA＝1 となる点 A と，OB＝3 となる点 B をとる。

$\boxed{2}$　半直線 OY を引き，OC＝4 となる点 C をとる。

$\boxed{3}$　点 A を通り直線 BC に平行な直線を引き，OY との交点を D とする。

このとき，OD＝$\dfrac{4}{3}$ である。

13



$\boxed{1}$　1 つの直線上に AH＝1，HB＝7 となる

3 点 A，H，B をこの順にとる。

2 線分 AB の中点 O をとる。

3 O を中心とする半径 OA の半円をかく。

4 点 H を通り線分 AB に垂直な直線を引き，半円との交点を C とする。

このとき，CH $= \sqrt{7}$ である。

4 節 空間図形

1 空間における直線と平面

教科書 P.143

問 1 (1) GH // CD であるから，BC と GH のなす角は，BC と CD のなす角に等しい。ここで，BC と CD のなす角は 90° であるから，求める角は **90°** である。

(2) EF // AB であるから，AC と EF のなす角は，AC と AB のなす角に等しい。ここで，AC は正方形 ABCD の対角線であるから，AC と AB のなす角は 45° である。したがって，求める角は **45°** である。

(3) FH // BD であるから，DG と FH のなす角は，DG と BD のなす角に等しい。ここで，△BGD は正三角形であるから，DG と BD のなす角は 60° である。したがって，求める角は **60°** である。

教科書 P.145

問 2 (1) 平面 AEGC 上の直線 AC と平面 AEHD 上の直線 AD は，ともに 2 平面の交線 AE に垂直である。ここで，AC と AD のなす角は 45° であるから，求める角は **45°** である。

(2) AC と BD の交点を P，EG と FH の交点を Q とすると，平面 ABCD 上の直線 AC と平面 BFHD 上の直線 PQ は，ともに 2 平面の交線 BD に垂直である。ここで，AC と PQ のなす角は 90° であるから，求める角は **90°** である。

2 直線と平面の垂直

教科書 P.146

問 3 底面 ABCD は正方形であるから，点 P は AC，BD それぞれの中点である。

また，△OAC は OA = OC の二等辺三角形であるから

　OP ⊥ AC

△OBD は OB = OD の二等辺三角形であるから

　OP ⊥ BD

よって，直線 OP は平面 ABCD 上の 2 直線 AC，BD に垂直であるから

　平面 ABCD ⊥ OP

教科書 P.147

問 4 [1] の証明

PO ⊥ α で，l は α 上にあるから

　PO ⊥ l

また，仮定より　OA ⊥ l

したがって，直線 l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PO，OA に垂直であるから

　l ⊥ 平面 AOP

PA は平面 AOP 上にあるから

　PA ⊥ l

[2] の証明

PO ⊥ α で，l は α 上にあるから

　PO ⊥ l

また，仮定より　PA ⊥ l

したがって，直線 l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PO，PA に垂直であるから

　l ⊥ 平面 AOP

OA は平面 AOP 上にあるから

　OA ⊥ l

3 多面体の性質

教科書 P.148

問 5

正多面体	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
面の形	正三角形	正方形	正三角形	正五角形	正三角形
頂点に集まる面の数	3	3	4	3	5
頂点の数	4	**8**	**6**	20	**12**
辺の数	**6**	**12**	**12**	30	**30**

注意　正二十面体の場合は次のように考えられる。正二十面体の 1 つの頂点には，正三角形が 5 つ集まっている。1 つの面には頂点が 3 個あり，1 つの頂点を 5 つの面で共

有しているから，頂点の個数は

$3\times 20\div 5=12$（個）

また，1 つの面には辺が 3 本あり，1 つの辺を 2 つの面で共有しているから，辺の本数は

$3\times 20\div 2=30$（本）

参考 オイラーの多面体定理

教科書 P.149

問 1 頂点の数 v は 1 減って 4 増えるから 3 だけ増える。

辺の数 e は 4 だけ増える。

面の数 f は 1 だけ増える。

$3-4+1=0$ であるから，$v-e+f$ の値は変化しない。

Training トレーニング

教科書 P.151

14 △ABC において

$BP:PA=BQ:QC=1:2$

であるから

$PQ\parallel AC$ ……①

① より

$PQ:AC=BP:BA=1:3$

よって

$PQ=\dfrac{1}{3}AC$ ……②

また，△ADC において

$DS:SA=DR:RC=1:2$

であるから

$SR\parallel AC$ ……③

③ より

$SR:AC=DS:DA=1:3$

よって

$SR=\dfrac{1}{3}AC$ ……④

①，③ より　$PQ\parallel SR$ ……⑤

②，④ より　$PQ=SR$ ……⑥

⑤，⑥ より，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，四角形 PQRS は平行四辺形である。

15 (1) $AC\parallel EF$ であるから，AC と BF のなす角は，BF と EF のなす角に等しい。ここで，△BFE は正三角形であるから，BF と EF のなす角は $60°$ である。

したがって，AC と BF のなす角は **60°** である。

(2) 面 BCDE は正方形であるから，四角形 BCDE の対角線の長さと正八面体の辺の比は $\sqrt{2}:1$ となる。

また，$AB=AD$ であるから，△ABD は二等辺三角形となる。

よって，△ABD は 3 つの角が $45°$，$45°$，$90°$ の直角二等辺三角形となる。

したがって，AD と BD のなす角は，**45°** である。

(3) BD と CE の交点を O とすると，直線 AF と平面 BCDE の交点が O となる。点 O を通り CD に平行な直線と BC，DE の交点をそれぞれ M，N とすると

$CD\parallel MN$

よって，AF と CD のなす角は，AF と MN のなす角に等しい。

ここで，$\angle AOM=\angle AON=90°$ であるから，AF と MN のなす角は $90°$ である。

したがって，AF と CD のなす角は **90°** である。

16 (1) 平面 DEFC 上の直線 DE と平面 HEFG 上の直線 HE は，ともに 2 平面の交線 EF に垂直である。ここで，DE と HE のなす角は $45°$ であるから，平面 DEFC と平面 HEFG のなす角は **45°** である。

(2) 平面 BDHF 上の直線 BD と平面 CDHG 上の直線 CD は，ともに 2 平面の交線 DH に垂直である。ここで，△DBC において，$\angle BCD=90°$ で，直角をはさむ 2 辺の辺の比が $1:\sqrt{3}$ であるから，△DBC は 3 つの角が $30°$，$60°$，$90°$ の直角三角形となる。

したがって，BD と CD のなす角は $30°$ であるから，平面 BDHF と平面 CDHG のなす角は **30°** である。

(3) 正方形 AEHD の対角線であるから

$AH\perp DE$

3章

よって，平面 DEFC 上の直線 EF と平面 AEHD 上の直線 AH は，ともに 2 平面の交線 DE に垂直である。
ここで，EF と AH のなす角は 90° であるから，平面 DEFC と平面 AEHD のなす角は **90°** である。

17 (1) 正方形 ABCD の対角線は垂直に交わるから

$$AC \perp BD$$

$AE \parallel BF$，$BF \perp BD$ であるから

$$AE \perp BD$$

したがって，直線 BD は平面 AEGC 上の交わる 2 直線 AC，AE に垂直であるから

$$BD \perp \text{平面 } AEGC$$

(2) CE は平面 AEGC 上にあるから，(1) の結果により

$$CE \perp BD$$

18 △ACD は正三角形であるから

$$AM \perp CD \quad \cdots\cdots ①$$

△BCD は正三角形であるから

$$BM \perp CD \quad \cdots\cdots ②$$

仮定より　$AH \perp HM$　……③

①，②，③ と三垂線の定理により

$$AH \perp \text{平面 } BCD$$

[Level Up]
レベルアップ

教科書 P.152

1 (1) 点 I は △ABC の内心であるから，AD は ∠A の二等分線である。よって，内角の二等分線と比の定理により

$$BD : DC = AB : AC$$
$$= 7 : 5$$

よって　$BD = \dfrac{7}{7+5}BC = \dfrac{7}{12}\cdot 6 = \mathbf{\dfrac{7}{2}}$

(2) 点 I は △ABC の内心であるから，BI は ∠B の二等分線である。よって，内角の二等分線と比の定理により

$$AI : ID = BA : BD$$
$$= 7 : \frac{7}{2}$$
$$= \mathbf{2 : 1}$$

2 (1) 点 J から辺 BC に垂線を引き，垂線と BC の交点を R とする。
△BPJ と △BRJ において

$$\angle JBP = \angle JBR$$

JB は共通

$$\angle BPJ = \angle BRJ = 90°$$

直角三角形において，斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BPJ \equiv \triangle BRJ$$

よって　$JP = JR$　……①

同様にして　$\triangle CQJ \equiv \triangle CRJ$

よって　$JQ = JR$　……②

①，② より　$JP = JQ$

(2) △APJ と △AQJ において

(1) より　$JP = JQ$

AJ は共通

$$\angle APJ = \angle AQJ = 90°$$

直角三角形において，斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから

$$\triangle APJ \equiv \triangle AQJ$$

よって　$\angle PAJ = \angle QAJ$

したがって，J は ∠A の二等分線上にある。

別解 「角の二等分線上の点は，角をつくる 2 辺から等距離にある」(教科書 p.116) ことから，次のように証明することもできる。

(1) 点 J から辺 BC に垂線を引き，BC との交点を R とする。
J は △ABC の頂点 B，C における外角の二等分線の交点であるから

$$JP = JR \quad かつ \quad JR = JQ$$

よって　$JP = JQ$

(2) (1) より，$JP = JQ$ であるから，J は ∠A の二等分線上にある。

3 メネラウスの定理により

$$\frac{AP}{PL}\cdot\frac{LB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA} = 1$$

であるから　$\dfrac{AP}{PL}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{1} = 1$

よって　$\dfrac{AP}{PL} = \dfrac{5}{3}$

すなわち　$AP : PL = 5 : 3$

したがって

$$\triangle PAB : \triangle LAB = AP : AL$$
$$= 5 : 8$$

ゆえに　　$\triangle\mathrm{PAB} = \dfrac{5}{8}\triangle\mathrm{LAB}$　　……①

また

$$\triangle\mathrm{LAB} : \triangle\mathrm{ABC} = \mathrm{BL} : \mathrm{BC}$$
$$= 3 : 5$$

であるから

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{5}{3}\triangle\mathrm{LAB} \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から

$$\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{ABC}$$
$$= \frac{5}{8}\triangle\mathrm{LAB} : \frac{5}{3}\triangle\mathrm{LAB}$$
$$= 3 : 8$$

4　四角形 BCFE は円に内接するから

$$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{EFD} \quad \cdots\cdots ①$$

また，AD // BC より

$$\angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{A} = 180° \quad \cdots\cdots ②$$

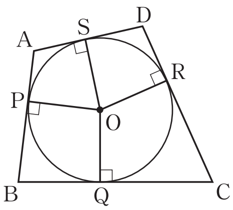
①，② より

$$\angle\mathrm{EFD} + \angle\mathrm{A} = 180°$$

よって，四角形 AEFD の 1 組の対角の和が 180° であるから，四角形 AEFD は円に内接する。

したがって，4 点 A，E，F，D は同一円周上にある。

5　四角形 ABCD と円 O の接点を，右の図のように P，Q，R，S とする。



このとき

$\mathrm{AP} = \mathrm{AS}$,

$\mathrm{BP} = \mathrm{BQ}$,

$\mathrm{CQ} = \mathrm{CR}$,

$\mathrm{DR} = \mathrm{DS}$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}+\mathrm{CD} &= (\mathrm{AP}+\mathrm{BP})+(\mathrm{CR}+\mathrm{DR})\\ &= (\mathrm{AS}+\mathrm{BQ})+(\mathrm{CQ}+\mathrm{DS})\\ &= (\mathrm{AS}+\mathrm{DS})+(\mathrm{BQ}+\mathrm{CQ})\\ &= \mathrm{AD}+\mathrm{BC}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{AB}+\mathrm{CD} = \mathrm{AD}+\mathrm{BC}$ が成り立つ。

教科書 P.153

6　円 O において，方べきの定理により

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$$

円 O′ において，方べきの定理により

$$\mathrm{PR}^2 = \mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$$

よって　　$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PR}^2$

したがって　　$\mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$

7　(1)　△ABC において，線分 AB は円 O の直径であるから

$$\angle\mathrm{ACB} = 90°$$

よって，$\angle\mathrm{ACH} + \angle\mathrm{BCH} = 90°$　……①

また，$\angle\mathrm{AHC} = 90°$ であるから

$$\angle\mathrm{ACH} + \angle\mathrm{CAH} = 90° \quad \cdots\cdots ②$$

△ACH と △CBH において

①，② より

$$\angle\mathrm{CAH} = \angle\mathrm{BCH}$$

また

$$\angle\mathrm{AHC} = \angle\mathrm{CHB} = 90°$$

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle\mathrm{ACH} \backsim \triangle\mathrm{CBH}$$

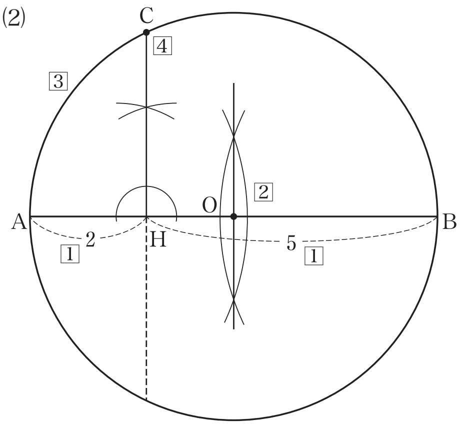
対応する辺の比は等しいから

$$\mathrm{CH} : \mathrm{BH} = \mathrm{AH} : \mathrm{CH}$$
$$\mathrm{CH} : b = a : \mathrm{CH}$$

よって　　$\mathrm{CH}^2 = ab$

$\mathrm{CH} > 0$ より　　$\mathrm{CH} = \sqrt{ab}$

(2)



1　1 つの線分上に $\mathrm{AH}=2$，$\mathrm{HB}=5$ となる 3 点 A，H，B をこの順にとる。

2　線分 AB の中点 O をとる。

3　O を中心とする半径 OA の円をかく。

4　点 H を通り線分 AB に垂直な直線を引き，円と交点の 1 つを C とする。

このとき $\mathrm{CH} = \sqrt{10}$ である。

8　底面の正方形 EFGH の対角線の交点を M とする。

このとき　　$\mathrm{GM} \perp \mathrm{HF}$

また，△CHF は CF＝CH の二等辺三角形であるから

$\mathrm{CM} \perp \mathrm{HF}$

よって，∠CMG が平面 CHF と平面 GHF のなす角となる。

ここで，△CMG を考える。

CG ⊥ 平面 EFGH であるから，CG ⊥ GM

すなわち，△CMG は ∠CGM＝90° の直角三角形である。

また，GE は正方形 EFGH の対角線であるから

$\mathrm{GE} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

よって　$\mathrm{GM} = \sqrt{2}$

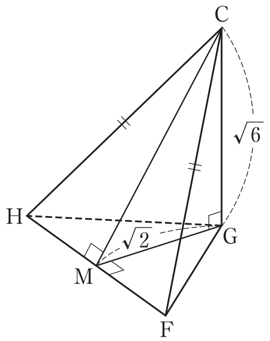
また　$\mathrm{CG} = \mathrm{AE} = \sqrt{6}$

したがって

$\mathrm{CM} = \sqrt{\mathrm{CG}^2+\mathrm{GM}^2} = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$

これより

△CMG の 3 辺の長さの比は $1:2:\sqrt{3}$ となり，△CMG は 3 つの角が 30°，60°，90° の直角三角形となる。

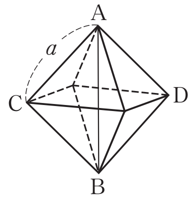


したがって

$\angle\mathrm{CMG} = 60°$

ゆえに，求める角は **60°** である。

9 (1) 右の図において四角形 ACBD は，1 辺の長さが a の正方形であるから



$\mathrm{AB} = \boldsymbol{\sqrt{2}\,a}$

(2) 図の正八面体の上半分の正四角錐の底面の面積は a^2，高さは正八面体の対角線の長さの半分の $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ であるから，正四角錐の体積は

$$\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

したがって，正八面体の体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{6}a^3 \times 2 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}a^3}$$

(3) 1 辺の長さが a である正三角形の底辺は a，高さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ であるから，面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ である。

よって，正八面体の表面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 8 = \boldsymbol{2\sqrt{3}\,a^2}$$