3 節 作図

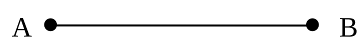
1 基本的な作図

（教科書 p.127）

与えられた線分 AB の中点 M を求める手順を考えてみよう。

$\boxed{1}$ 2 点 A，B を中心として等しい半径の円をかき，その交点を P，Q とする。

$\boxed{2}$ 2 点 P，Q を通る直線と線分 AB の交点が，求める中点 M である。

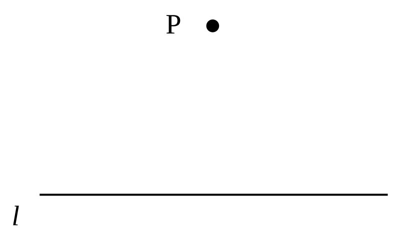


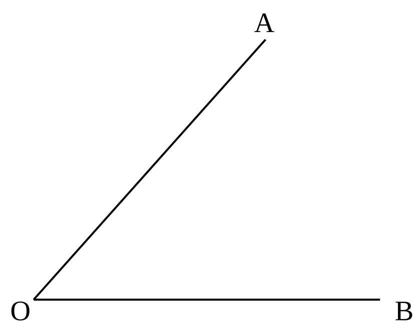
$\boxed{2}$で引いた直線 PQ は，線分 AB の垂直二等分線になっている。

このように，与えられた 2 点を通る直線を引く「定規」と，与えられた点を中心として与えられた半径の円をかく「コンパス」だけを用いて，条件を満たす図形をかくことを（[1]　　　　　　）という。

次の作図の方法は中学校で学んだ。

(1) 直線 l 上にない点 P を通り，l に垂直な直線を引く。　(2) ∠AOB の二等分線 OX を引く。





いろいろな作図

（教科書 p.128）

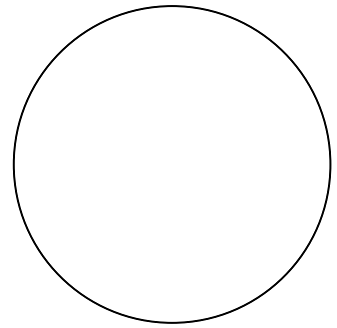
例 1 中心がわからない円が与えられたとき，円の中心を求める作図の手順を考えてみよう。

$\boxed{1}$ 与えられた円周上に 3 点 A，B，C をとる。

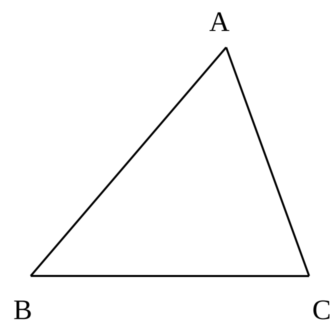
$\boxed{2}$ 弦 AB，AC の垂直二等分線を引く。

$\boxed{3}$ この 2 本の垂直二等分線の交点を O とする。

このとき，O は △ABC の外心であるから，求める円の中心である。



問1 与えられた △ABC の外接円を作図せよ。



円 O の外部の点 A から円 O に引いた接線を作図する手順を考えてみよう。

$\boxed{1}$ 線分 AO の中点 O′ を求め，点 O′ を中心とし，A，O を通る円をかく。

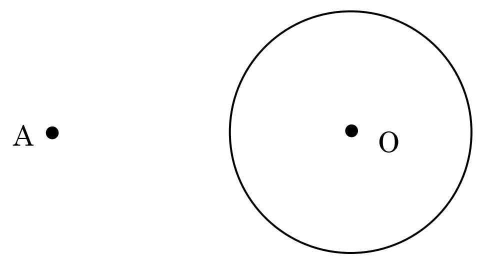
この円と円 O の交点を P，P′ とする。

$\boxed{2}$ 直線 AP，AP′ を引く。

このとき, 点 P, P′ は円 O′ 上の点であり, AO は円 O′ の直径であるから，円周角の定理により

$$OP \perp AP, \quad OP' \perp AP'$$

よって，直線 AP，AP′ は円 O の接線である。



（教科書 p.129）

直線 l 上にない点 P を通り，l に平行な直線は，次のような手順によって作図することができる。

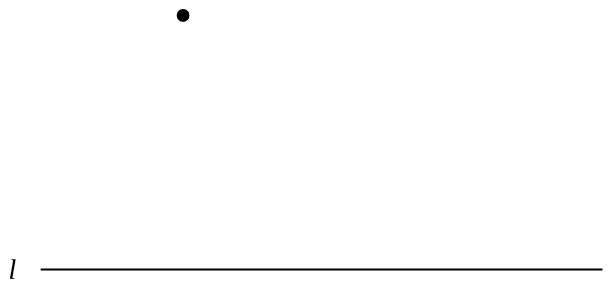
$\boxed{1}$ 直線 l 上に 2 点 A，B をとる。

$\boxed{2}$ 点 P を中心とする半径 AB の円と，点 B を中心とする半径 AP の円をかき，この 2 円の交点を Q とする。

$\boxed{3}$ 直線 PQ を引く。

このとき，四角形 ABQP は，PQ = AB，AP = BQ より，2 組の対辺がそれぞれ等しいから平行四辺形である。

すなわち，直線 PQ は直線 AB に平行である。



例 2 線分 AB が与えられたとき，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P を作図する手順を考えてみよう。

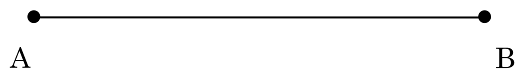
$\boxed{1}$ 半直線 AX を引き，AX 上に 2 点 Q，R を AQ : QR = 2 : 1 となるようにとる。

$\boxed{2}$ 点 Q を通り，直線 RB に平行な直線を引き，線分 AB との交点を P とする。

このとき，RB//QP であるから

AP : PB = AQ : QR = 2 : 1

よって，点 P は線分 AB を 2 : 1 に内分する点である。



問2 与えられた線分 AB について，次の点を作図することによって求めよ。

(1) 線分 AB を 1 : 3 に内分する点

(2) 線分 AB を 2 : 3 に内分する点

2 長さの作図

積の長さの作図

（教科書 p.130）

長さ 1，a，b の線分が与えられたものとする。このとき，積 ab を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

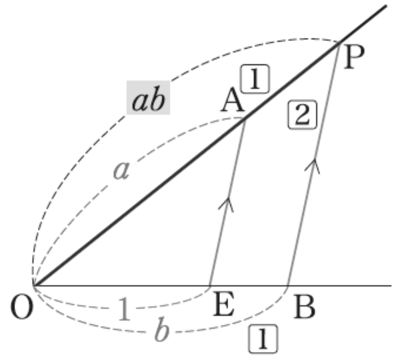
$\boxed{1}$ 右の図のように $\mathrm{OE}=1, \mathrm{OA}=a, \mathrm{OB}=b$ となる点 O, E, A, B をとる。

$\boxed{2}$ 点 B を通り，直線 EA に平行な直線を引き，直線 OA との交点を P とする。

このとき，$\mathrm{OE}:\mathrm{OB} = \mathrm{OA}:\mathrm{OP}$ より

$1:b = a:\mathrm{OP}$

すなわち，$\mathrm{OP} = ab$ である。



商の長さの作図

長さ 1，a，b の線分が与えられたとき，上の作図の方法にならって，商 $\frac{a}{b}$ を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

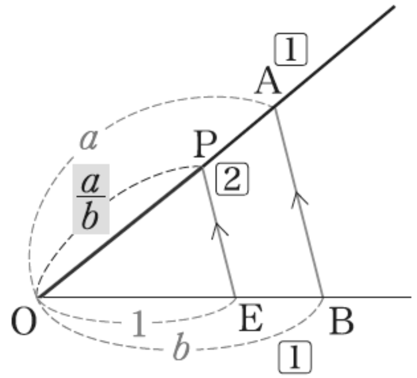
$\boxed{1}$ 右の図のように $\mathrm{OE}=1, \mathrm{OA}=a, \mathrm{OB}=b$ となる点 O, E, A, B をとる。

$\boxed{2}$ 点 E を通り，直線 BA に平行な直線を引き，直線 OA との交点を P とする。

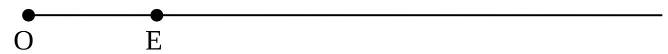
このとき，$\mathrm{OE}:\mathrm{OB} = \mathrm{OP}:\mathrm{OA}$ より

$1:b = \mathrm{OP}:a$

すなわち，$\mathrm{OP} = \frac{a}{b}$ である。



問3 次の図において，OE の長さを 1 とするとき，上の方法によって，長さ $\frac{4}{3}$ の線分を作図せよ。

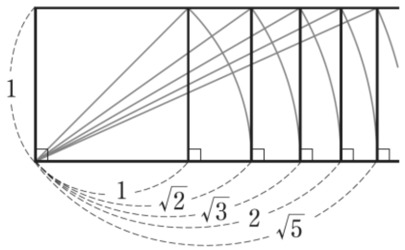


平方根の長さの作図

（教科書 p.131）

長さ 1 と a の線分が与えられたものとする。このとき，$\sqrt{a}$ を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

a が簡単な自然数のときには，三平方の定理を利用して，右の図のように，$\sqrt{a}$ を長さとする線分を作図することができる。



一般に，$\sqrt{a}$ を長さとする線分は次のような手順によって作図することができる。

$\boxed{1}$ 右の図のように，同一直線上に，
$\mathrm{AC}=a$，$\mathrm{CB}=1$ となる 3 点 A，C，B をとる。

$\boxed{2}$ AB を直径とする円をかき，点 C を通り直線 AB に垂直な直線との交点を P とする。

このとき，$\triangle\mathrm{ACP}$ と $\triangle\mathrm{PCB}$ において

$$\angle\mathrm{ACP}=\angle\mathrm{PCB}=90^\circ$$

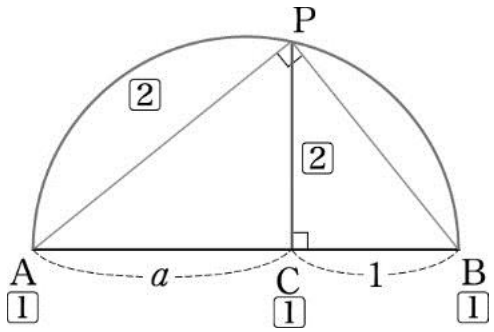
$$\angle\mathrm{APC}=90^\circ-\angle\mathrm{CPB}=\angle\mathrm{PBC}$$

したがって，$\triangle\mathrm{ACP}\backsim\triangle\mathrm{PCB}$ である。

ゆえに　$\mathrm{AC}:\mathrm{CP}=\mathrm{CP}:\mathrm{CB}$

すなわち　$\mathrm{CP}^2=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CB}=a\cdot 1=a$

よって　$\mathrm{CP}=\sqrt{a}$



問4 長さ 1 の線分を定めて，前述の方法により，$\sqrt{5}$ の長さの線分を作図せよ。

問5 長さ 1 の線分を定めて，$3-\sqrt{2}$ の長さの線分を作図せよ。

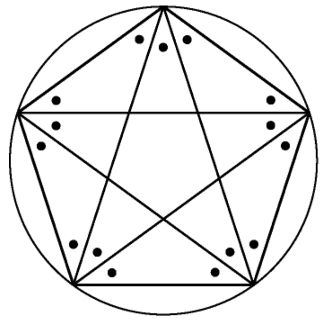
参考　正五角形の作図

（教科書 p.132）

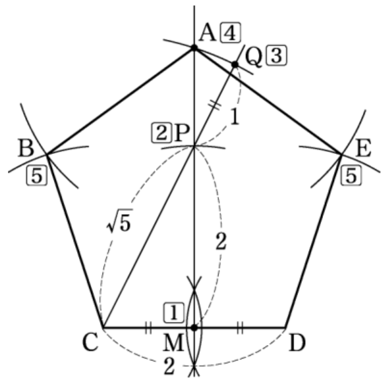
これまでに学んだことを利用して，正五角形を作図してみよう。

1 辺の長さを 1 とする正五角形の対角線の長さは $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であることが知られている。

よって，長さの比が $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるような 2 つの線分が作図できれば，正五角形は作図できる。



例 1 1 辺が 2，対角線の長さが $1+\sqrt{5}$ である正五角形を作図する手順を考えてみよう。



1　長さ 2 の辺 CD を定め，CD の垂直二等分線と CD の交点を M とする。

2　CD の垂直二等分線上に，PM = CD となるように点 P をとる。

3　CP の延長上に PQ = CM となるように点 Q をとる。

4　点 C を中心とする半径 CQ の円と CD の垂直二等分線の交点を A とする。

このとき，$\mathrm{CP}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\mathrm{CA}=\mathrm{CQ}=1+\sqrt{5}$ である。
したがって，点 A は正五角形の頂点の 1 つである。

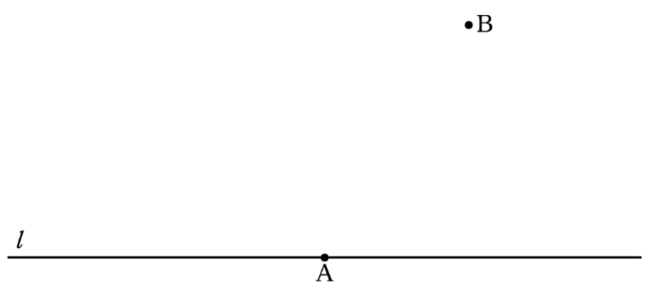
5　BA = BC = CD となる点 B と，EA = ED = CD となる点 E を AM の反対側にとって結ぶと，正五角形 ABCDE ができる。

問1 実際に正五角形を作図せよ。

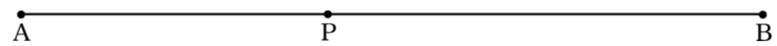
問 題

（教科書 p.133）

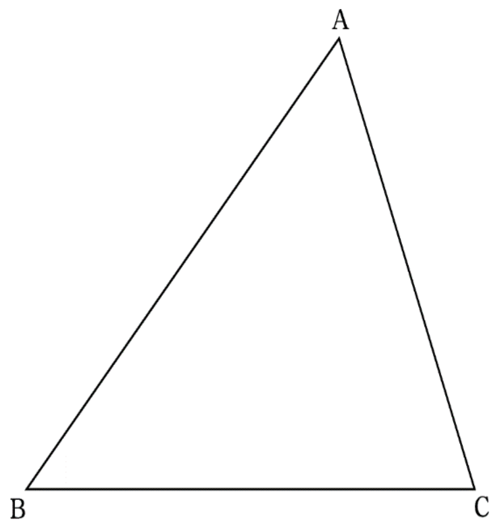
10 直線 l 上の点 A において l に接し，l 上にない点 B を通る円を作図する手順を書け。



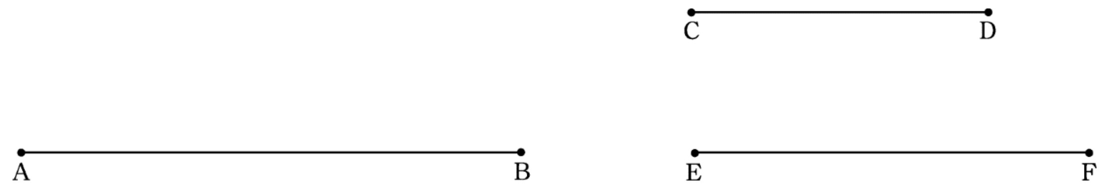
11 次の図の線分 AB を斜辺とし，辺 AC が線分 AP と長さが等しくなるような直角三角形 ABC を作図せよ。



12 与えられた△ABCの内接円を作図せよ。



13 次の図の線分ABを，与えられた線分の長さの比CD : EFに内分する点Pを作図することによって求めよ。



14 与えられた線分 AB について，次の点を作図することによって求めよ。

(1) 線分 AB を 4：1 に外分する点 P

(2) 線分 AB を 1：4 に外分する点 Q

15 次の大きさの角を作図せよ。

(1) $60°$

(2) $150°$

(3) $15°$

16 長さ a，b の線分が与えられたとする。このとき，縦の長さ，横の長さがそれぞれ a，b の長方形と等しい面積を持つ正方形を作図せよ。

3節 作図

1 基本的な作図

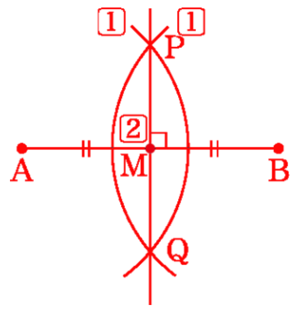
（教科書 p.127）

与えられた線分 AB の中点 M を求める手順を考えてみよう。

1 2 点 A，B を中心として等しい半径の円をかき，その交点を P，Q とする。

2 2 点 P，Q を通る直線と線分 AB の交点が，求める中点 M である。

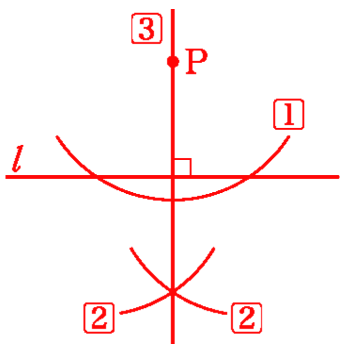
2で引いた直線 PQ は，線分 AB の垂直二等分線になっている。

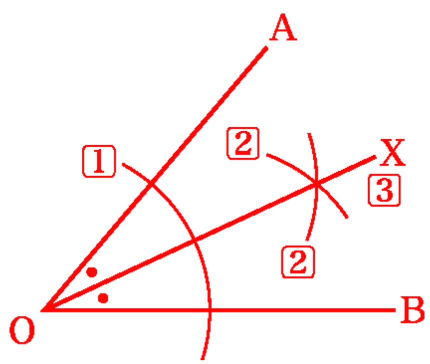


このように，与えられた 2 点を通る直線を引く「定規」と，与えられた点を中心として与えられた半径の円をかく「コンパス」だけを用いて，条件を満たす図形をかくことを（1 作図 ）という。

次の作図の方法は中学校で学んだ。

（1）直線 l 上にない点 P を通り，l に垂直な直線を引く。　(2)∠AOB の二等分線 OX を引く。





いろいろな作図

（教科書 p.128）

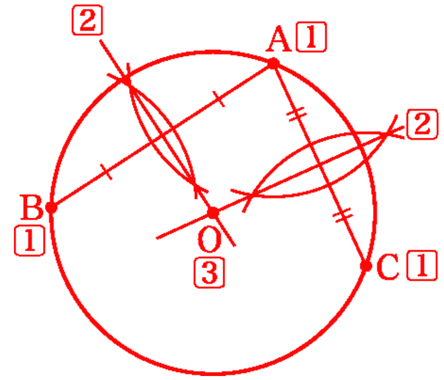
例 1 中心がわからない円が与えられたとき，円の中心を求める作図の手順を考えてみよう。

1 与えられた円周上に 3 点 A，B，C をとる。

2 弦 AB，AC の垂直二等分線を引く。

3 この 2 本の垂直二等分線の交点を O とする。

このとき，O は △ABC の外心であるから，求める円の中心である。

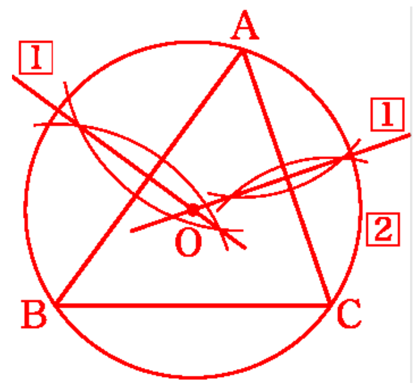


問1 与えられた △ABC の外接円を作図せよ。

1 辺 AB，AC の垂直二等分線を引く。

2 これらの垂直二等分線の交点 O を中心として，点 A を通る円 O をかく。

このとき，O は △ABC の外心であるから，円 O は点 B，C を通り，△ABC の外接円になる。



円 O の外部の点 A から円 O に引いた接線を作図する手順を考えてみよう。

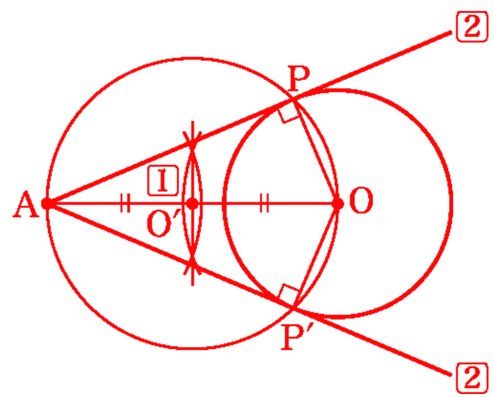
1 線分 AO の中点 O′ を求め，点 O′ を中心とし，A，O を通る円をかく。この円と円 O の交点を P，P′ とする。

2 直線 AP，AP′ を引く。

このとき，点 P, P′ は円 O′ 上の点であり，AO は円 O′ の直径であるから，円周角の定理により

OP ⊥ AP，　OP′ ⊥ AP′

よって，直線 AP，AP′ は円 O の接線である。



（教科書 p.129）

直線 l 上にない点 P を通り，l に平行な直線は，次のような手順によって作図することができる。

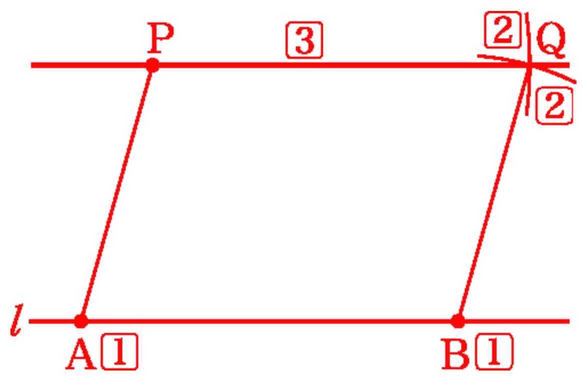
1 直線 l 上に 2 点 A，B をとる。

2 点 P を中心とする半径 AB の円と，点 B を中心とする半径 AP の円をかき，この 2 円の交点を Q とする。

3 直線 PQ を引く。

このとき，四角形 ABQP は，PQ = AB，AP = BQ より，2 組の対辺がそれぞれ等しいから平行四辺形である。

すなわち，直線 PQ は直線 AB に平行である。



例 2 線分 AB が与えられたとき，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P を作図する手順を考えてみよう。

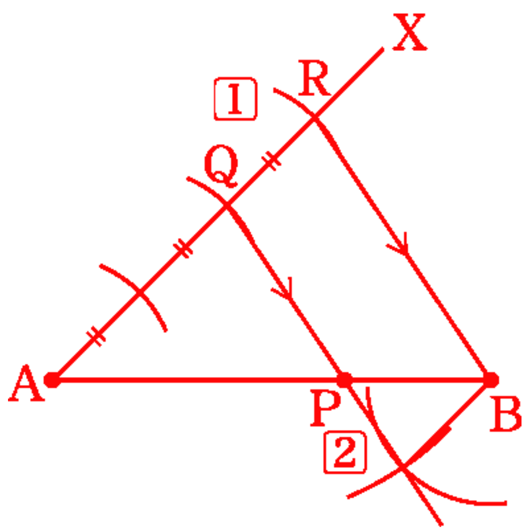
1 半直線 AX を引き，AX 上に 2 点 Q，R を AQ : QR = 2 : 1 となるようにとる。

2 点 Q を通り，直線 RB に平行な直線を引き，線分 AB との交点を P とする。

このとき，RB//QP であるから

AP : PB = AQ : QR = 2 : 1

よって，点 P は線分 AB を 2 : 1 に内分する点である。



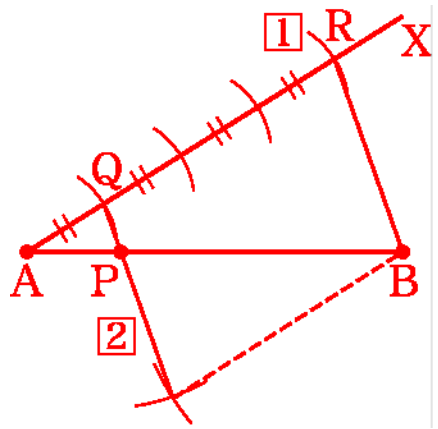
問2 与えられた線分 AB について，次の点を作図することによって求めよ。

（1） 線分 AB を 1 : 3 に内分する点

1 半直線 AX を引き，AX 上に 2 点 Q，R を AQ : QR = 1 : 3 となるようにとる。

2 点 Q を通り，直線 RB に平行な直線を引き，線分 AB との交点を P とする。

P が求める内分点である。

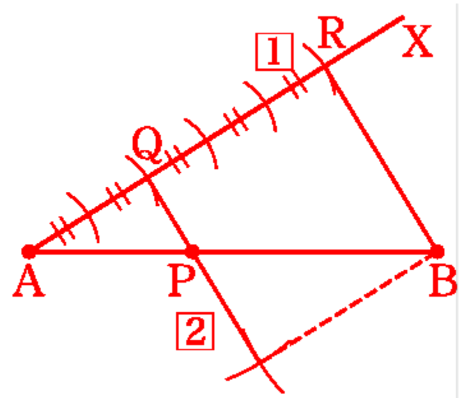


(2) 線分 AB を 2 : 3 に内分する点

1 半直線 AX を引き，AX 上に 2 点 Q，R を AQ : QR = 2 : 3 となるようにとる。

2 点 Q を通り，直線 RB に平行な直線を引き，線分 AB との交点を P とする。

P が求める内分点である。



2 長さの作図

積の長さの作図

（教科書 p.130）

長さ 1，a，b の線分が与えられたものとする。このとき，積 ab を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

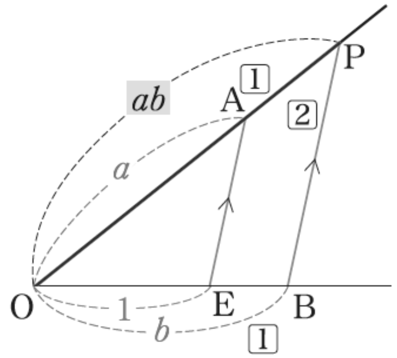
$\boxed{1}$ 右の図のように OE = 1, OA = a, OB = b となる点 O, E, A, B をとる。

$\boxed{2}$ 点 B を通り，直線 EA に平行な直線を引き，直線 OA との交点を P とする。

このとき，OE : OB ＝ OA : OP より

$1 : b = a : \mathrm{OP}$

すなわち，OP ＝ ab である。



商の長さの作図

長さ 1，a，b の線分が与えられたとき，上の作図の方法にならって，商 $\frac{a}{b}$ を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

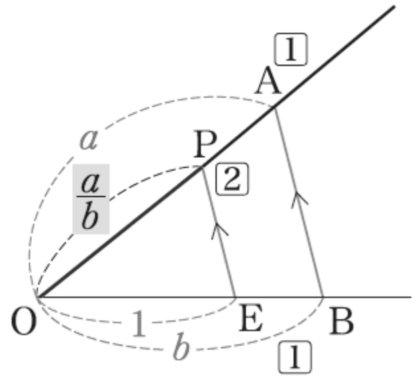
$\boxed{1}$ 右の図のように OE = 1, OA = a, OB = b となる点 O, E，A，B をとる。

$\boxed{2}$ 点 E を通り，直線 BA に平行な直線を引き，直線 OA との交点を P とする。

このとき，OE : OB ＝ OP : OA より

$1 : b = \mathrm{OP} : a$

すなわち，OP = $\frac{a}{b}$ である。



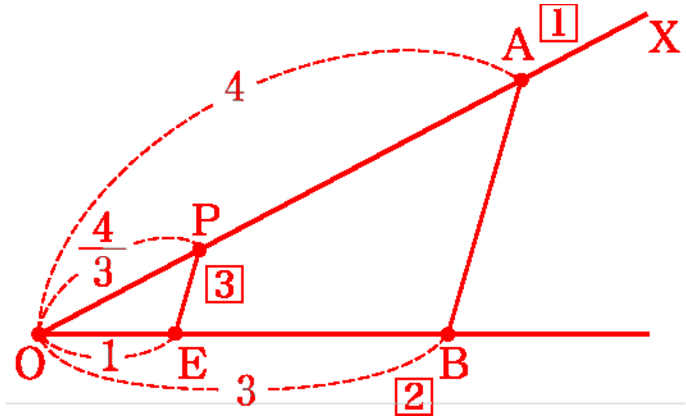
問3 次の図において，OE の長さを 1 とするとき，上の方法によって，長さ $\frac{4}{3}$ の線分を作図せよ。

$\boxed{1}$ 半直線 OX を引き，OX 上に点 A を OA = 4 となるようにとる。

$\boxed{2}$ OE の延長上に点 B を OB = 3 となるようにとる。

$\boxed{3}$ 点 E を通り，直線 BA に平行な直線を引き，OX との交点を P とする。

このとき，OP = $\frac{4}{3}$ である。

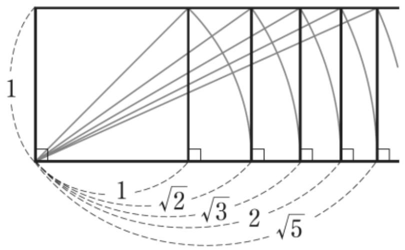


平方根の長さの作図

（教科書 p.131）

長さ 1 と a の線分が与えられたものとする。このとき，$\sqrt{a}$ を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

a が簡単な自然数のときには，三平方の定理を利用して，右の図のように，$\sqrt{a}$ を長さとする線分を作図することができる。



一般に，$\sqrt{a}$ を長さとする線分は次のような手順によって作図することができる。

$\boxed{1}$ 右の図のように，同一直線上に，
$\mathrm{AC}=a$，$\mathrm{CB}=1$ となる 3 点 A，C，B をとる。

$\boxed{2}$ AB を直径とする円をかき，点 C を通り直線 AB に垂直な直線との交点を P とする。

このとき，△ACP と △PCB において

$\angle\mathrm{ACP}=\angle\mathrm{PCB}=90^\circ$

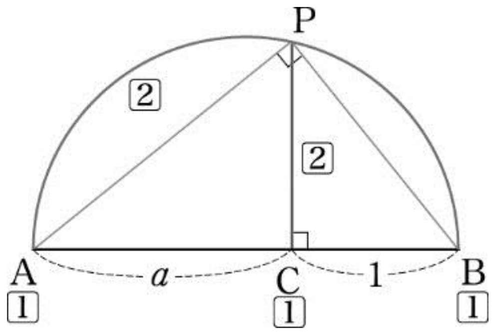
$\angle\mathrm{APC}=90^\circ-\angle\mathrm{CPB}=\angle\mathrm{PBC}$

したがって，△ACP ∽ △PCB である。

ゆえに　$\mathrm{AC}:\mathrm{CP}=\mathrm{CP}:\mathrm{CB}$

すなわち　$\mathrm{CP}^2=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CB}=a\cdot 1=a$

よって　$\mathrm{CP}=\sqrt{a}$

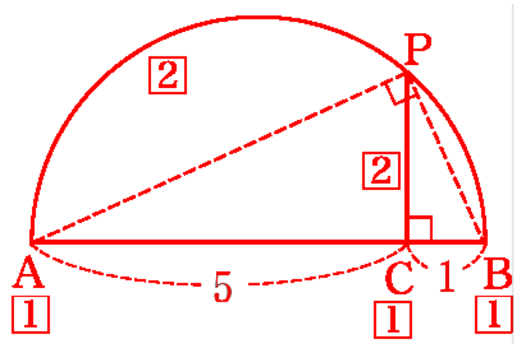


問4 長さ 1 の線分を定めて，前述の方法により，$\sqrt{5}$ の長さの線分を作図せよ。

$\boxed{1}$ 同一直線上に $\mathrm{AC}=5$，$\mathrm{CB}=1$ となるように 3 点 A，C，B をこの順にとる。

$\boxed{2}$ AB を直径とする円をかき，点 C を通り直線 AB に垂直な直線と円の交点を P とする。

このとき，$\mathrm{CP}=\sqrt{5}$ である。

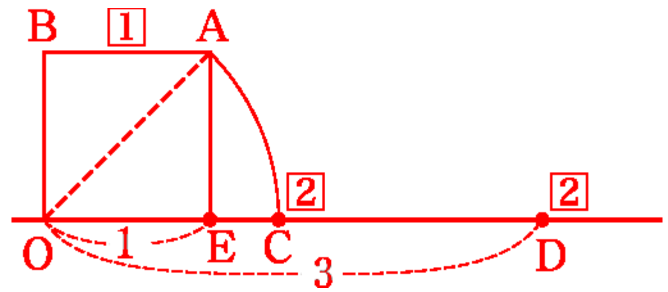


問5 長さ 1 の線分を定めて，$3-\sqrt{2}$ の長さの線分を作図せよ。

$\boxed{1}$ 1 辺の長さが 1 の正方形 OEAB をかく。

$\boxed{2}$ OE の延長上に OA = OC となる点 C と，OD = 3 となる点 D をとる。

このとき，$\mathrm{CD}=3-\sqrt{2}$ である。



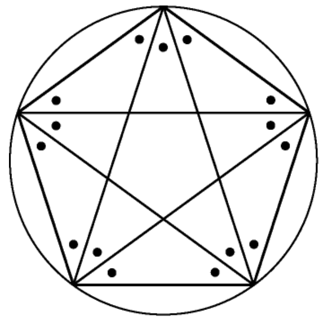
参考　**正五角形の作図**

（教科書 p.132）

これまでに学んだことを利用して，正五角形を作図してみよう。

1 辺の長さを 1 とする正五角形の対角線の長さは $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であることが知られている。

よって，長さの比が $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるような 2 つの線分が作図できれば，正五角形は作図できる。



例 1 1 辺が 2，対角線の長さが $1+\sqrt{5}$ である正五角形を作図する手順を考えてみよう。

$\boxed{1}$　長さ 2 の辺 CD を定め，CD の垂直二等分線と CD の交点を M とする。

$\boxed{2}$　CD の垂直二等分線上に，PM = CD となるように点 P をとる。

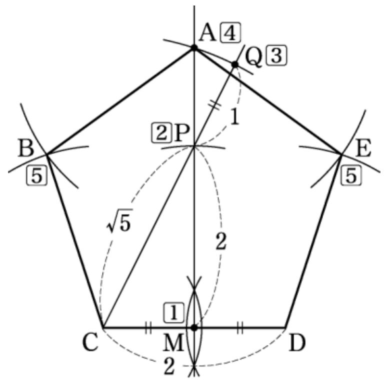
$\boxed{3}$　CP の延長上に PQ = CM となるように点 Q をとる。

$\boxed{4}$　点 C を中心とする半径 CQ の円と CD の垂直二等分線の交点を A とする。

このとき，$\mathrm{CP}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\mathrm{CA}=\mathrm{CQ}=1+\sqrt{5}$ である。

したがって，点 A は正五角形の頂点の 1 つである。

$\boxed{5}$　BA = BC = CD となる点 B と，EA = ED = CD となる点 E を AM の反対側にとって結ぶと，正五角形 ABCDE ができる。



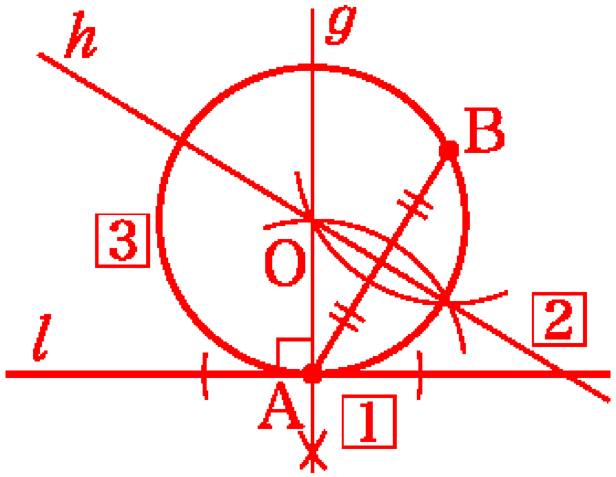
問1 実際に正五角形を作図せよ。

例 1 の手順を参考にして，作図する。

問 題

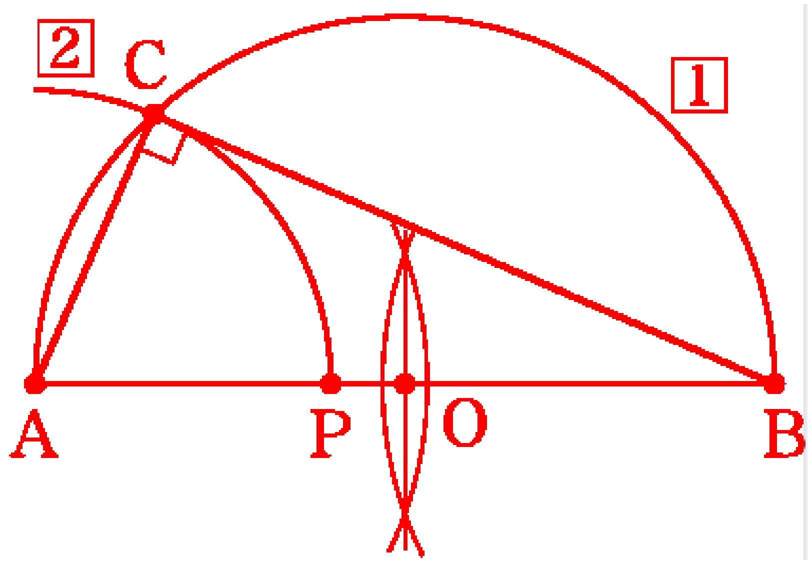
（教科書 p.133）

10 直線 l 上の点 A において l に接し，l 上にない点 B を通る円を作図する手順を書け。



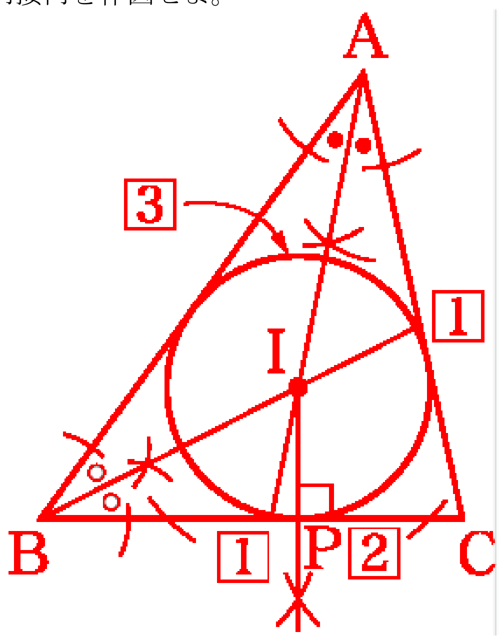
1 点 A を通り直線 l に垂直な直線 g を下ろす。
2 線分 AB の垂直二等分線 h を引く。
3 2 直線 g，h の交点 O を中心として，点 B を通る円をかく。
この円が求めるものである。

11 次の図の線分 AB を斜辺とし，辺 AC が線分 AP と長さが等しくなるような直角三角形 ABC を作図せよ。



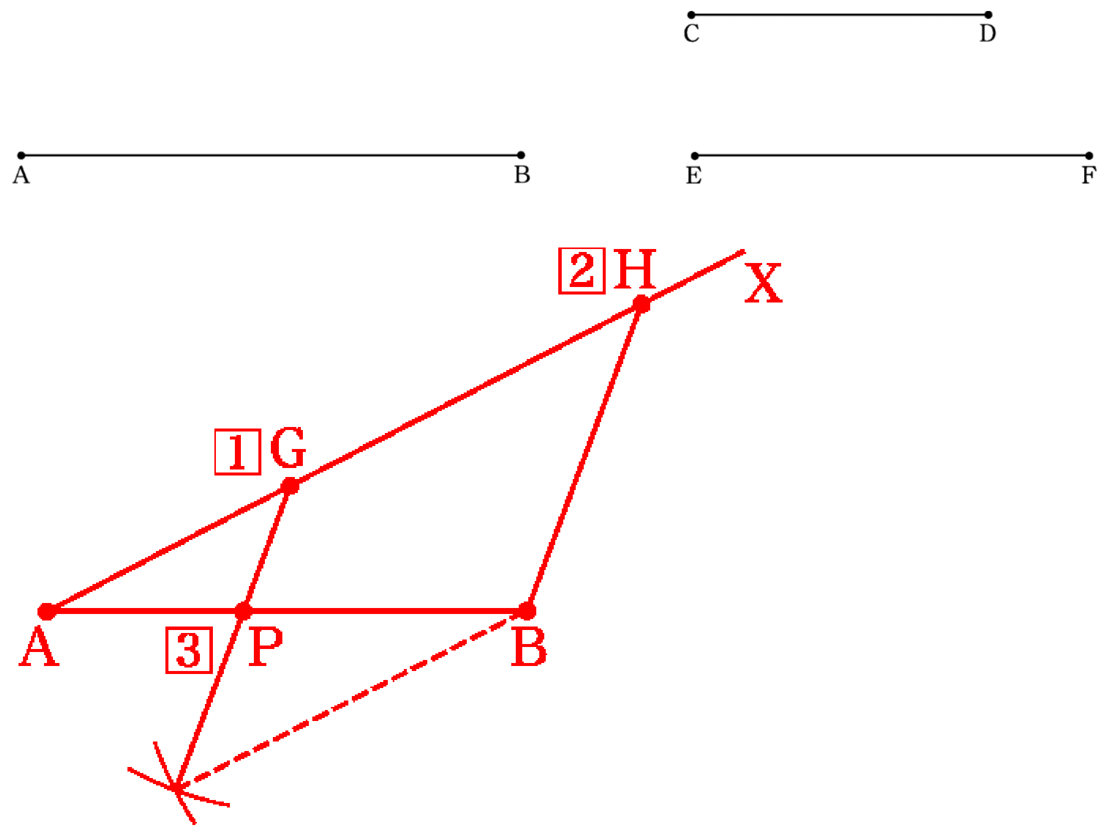
1 線分 AB の中点 O を中心として，点 A を通る円をかく。
2 点 A を中心とし点 P を通る円と円 O の交点 C を求める。
このとき，点 C は AB を直径とする円の円周上にあるから，∠ACB は直角になる。したがって，△ABC が求めるものである。

12　与えられた△ABC の内接円を作図せよ。



$\boxed{1}$ ∠A の二等分線と ∠B の二等分線を引き，その交点を I とする。
$\boxed{2}$ 点 I から辺 BC に垂線を下ろし，BC との交点を P とする。
$\boxed{3}$ 点 I を中心に半径 IP の円をかく。
I は内接円の中心となり，この円が△ABC の内接円である。

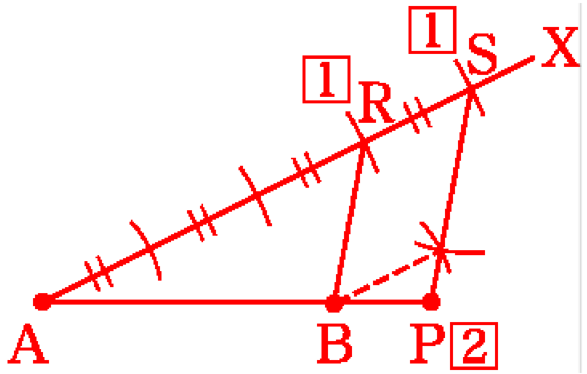
13　次の図の線分 AB を，与えられた線分の長さの比 CD : EF に内分する点 P を作図することによって求めよ。



$\boxed{1}$ 図のように，半直線 AX を引き，AG = CD となる点 G を半直線 AX 上にとる。
$\boxed{2}$ 半直線 AX 上に，GH = EF となる点 H をとる。
$\boxed{3}$ 点 G を通り直線 HB に平行な直線を引き，AB との交点を P とする。
この交点 P が求める点である。

14 与えられた線分 AB について，次の点を作図することによって求めよ。

(1) 線分 AB を $4:1$ に外分する点 P

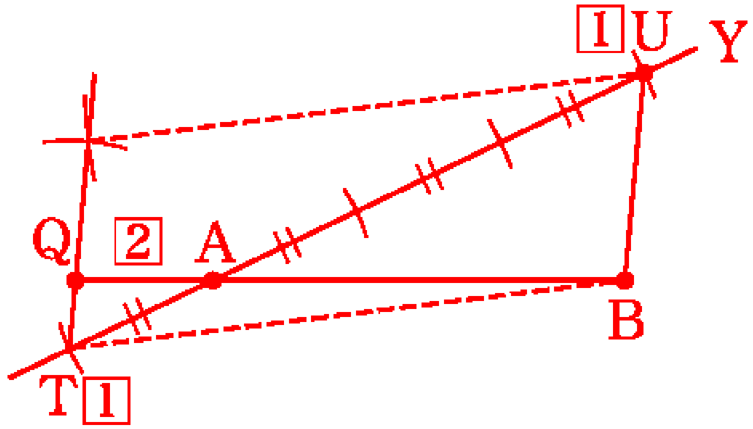


$\boxed{1}$ 図のように，半直線 AX を引き，AX 上に 2 点 R，S をこの順に AR : RS = 3 : 1 となるようにとる。

$\boxed{2}$ 点 S を通り直線 RB に平行な直線を引き，直線 AB との交点を P とする。

この交点 P が求める外分点である。

(2) 線分 AB を $1:4$ に外分する点 Q



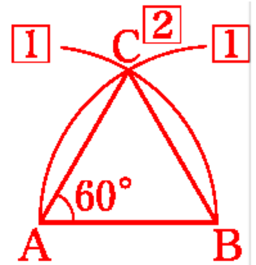
$\boxed{1}$ 図のように，直線 AY を引き，AY 上に 2 点 T，U を，T，A，U の順で TA : AU = 1 : 3となるようにとる。

$\boxed{2}$ 点 T を通り直線 UB に平行な直線を引き，直線 AB との交点を Q とする。

この交点 Q が求める外分点である。

15 次の大きさの角を作図せよ。

(1) 60°

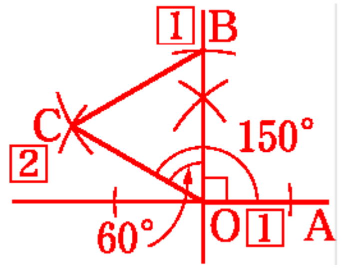


$\boxed{1}$ 線分 AB を定め，AB を半径とする円を，点 A と点 B を中心にしてかく。

$\boxed{2}$ 2 円の交点を C とする。

このとき △ABC は正三角形であるから，この三角形の内角の 1 つが 60° である。

(2) 150°



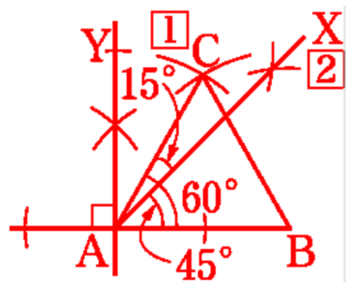
$\boxed{1}$ 垂直に交わる 2 直線 OA，OB をかく。

$\boxed{2}$ (1)と同様に，正三角形 OCB をかく。

このとき $\angle AOB + \angle BOC = 90° + 60° = 150°$

よって，$\angle AOC$ が求める角である。

(3) 15°



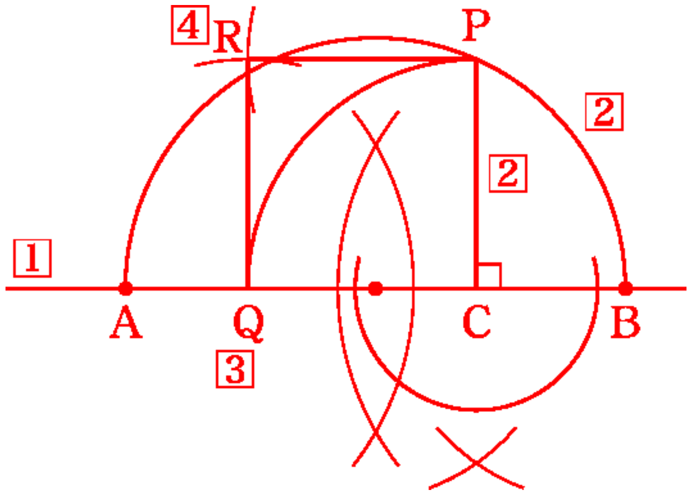
$\boxed{1}$ (1)と同様に，正三角形 ABC をかく。

$\boxed{2}$ 点 A を通り辺 AB に垂直な直線 AY を引き，$\angle BAY$ の二等分線 AX を引く。

このとき $\angle BAC - \angle BAX = 60° - 45° = 15°$

よって，$\angle XAC$ が求める角である。

16 長さ a，b の線分が与えられたとする。このとき，縦の長さ，横の長さがそれぞれ a，b の長方形と等しい面積を持つ正方形を作図せよ。



1 辺の長さ $\sqrt{ab}$ の正方形を作図する。

$\boxed{1}$ 図のように，同一直線上に AC = a，CB = b となる 3 点 A，C，B をこの順にとる。

$\boxed{2}$ AB を直径とする円をかき，点 C を通り直線 AB に垂直な直線と円との交点を P とする。

$\boxed{3}$ 直線 AB 上に CP = CQ となる点 Q をとる。

$\boxed{4}$ PR = CP，QR = CP を満たす点 R をとる。このとき，四角形 CPRQ は1辺の長さ $\sqrt{ab}$ の正方形となる。