2 節 円の性質

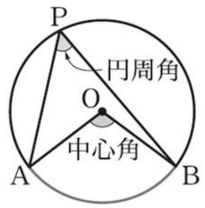
1 円周角の定理

（教科書 p.115）

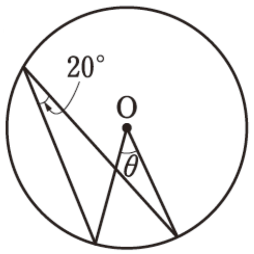
中学校では，次の（[1]　　　　　　　　　　）とその逆について学んだ。

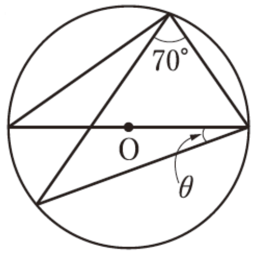
円周角の定理

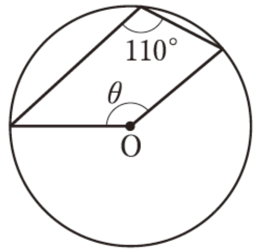
定理　１つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。



問1　下の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

(1)


(2)


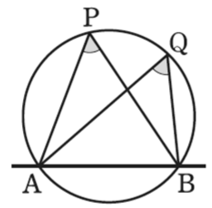
(3)


円周角の定理の逆

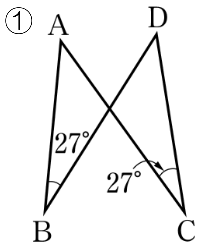
定理　4 点 A，B，P，Q について，P，Q が直線 AB に関して同じ側にあって

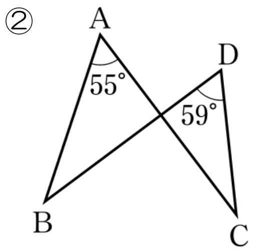
$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$

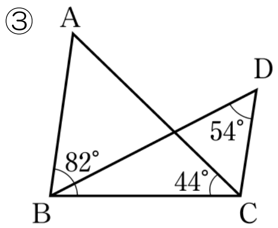
ならば，この 4 点は同一円周上にある。



問2　次のうち，4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるものはどれか。

①


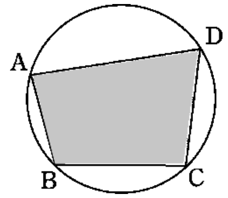
②


③


2 円に内接する四角形

（教科書 p.116）

四角形の 4 頂点が 1 つの円周上にあるとき，その四角形は円に（1　　　　　　　）という。三角形は必ず円に内接するが，四角形は円に内接するとは限らない。



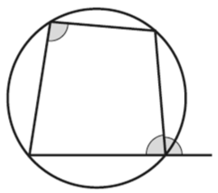
円に内接する四角形について，次の定理が成り立つ。

円に内接する四角形

定理　円に内接する四角形では

$\boxed{1}$　対角の和は 180° である。

$\boxed{2}$　外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。



証明 $\boxed{1}$　円に内接する四角形を ABCD，

$\angle A = \alpha$，$\angle C = \beta$ とする。

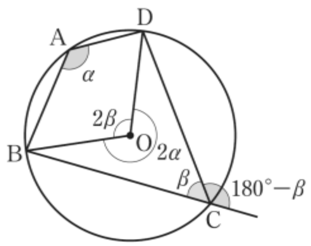
円周角の定理により，

弧 BCD に対する中心角は 2α，

弧 BAD に対する中心角は 2β となる。

$2\alpha + 2\beta = 360°$　より　$\alpha + \beta = 180°$

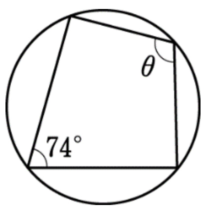
したがって，$\boxed{1}$が成り立つ。



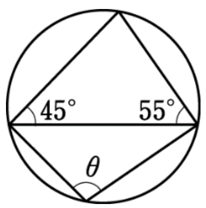
$\boxed{2}$　$\boxed{1}$より，$\alpha = 180° - \beta$ であるから，∠C の外角は ∠A に等しい。

問3 下の図において，角 θ を求めよ。

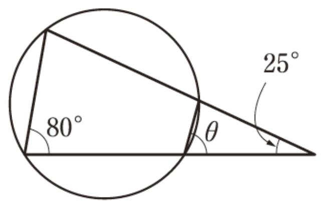
(1)



(2)



(3)



円に内接する四角形の定理は，その逆も成り立つ。

四角形が円に内接する条件

定理　次の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$のいずれかが成り立つ四角形は円に内接する。

$\boxed{1}$　1 組の対角の和が 180° である。

$\boxed{2}$　1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しい。

証明 $\boxed{1}$　四角形 ABCD において，$\angle A + \angle C = 180°$ とする。

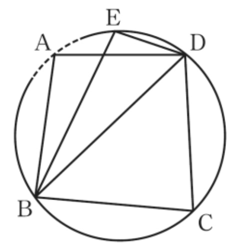
△BCD の外接円をかき， BD に関して C と反対側の円周上に点 E をとる。

四角形 BCDE は円に内接するから

$\angle C + \angle BED = 180°$

一方，仮定より

$\angle C + \angle BAD = 180°$



よって，$\angle BED = \angle BAD$ となり，円周角の定理の逆により，

4 点 B，D，A，E は同一円周上にある。

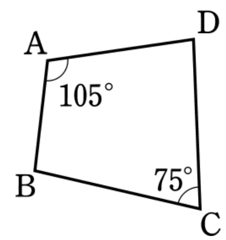
ここで，△BDE の外接円は △BCD の外接円でもあるから，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあることになり，四角形 ABCD は円に内接する。

$\boxed{2}$　四角形 ABCD において，∠C の外角が，∠C の対角 ∠A に等しいとすると，$\angle A = 180° - \angle C$ が成り立つ。

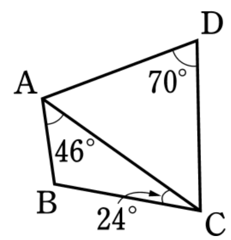
このとき，$\angle A + \angle C = 180°$ となり，$\boxed{1}$の場合に一致する。

問4 次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか。

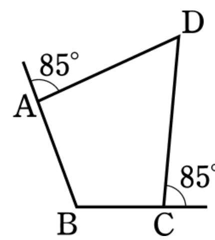
①



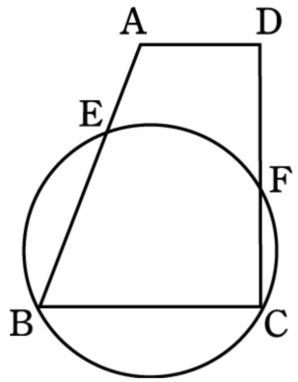
②



③



例題 1 AD//BC である台形 ABCD がある。この台形の頂点 B，C を通る円が，点 E，F で辺 AB，CD とそれぞれ交わるとする。
このとき，4 点 A，D，E，F は同一円周上にあることを証明せよ。



解 四角形 BCFE は円に内接するから

∠B = ……①

また，AD//BC より

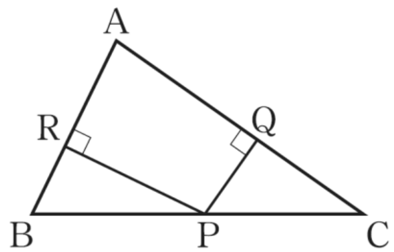
∠B + ……②

①，② より

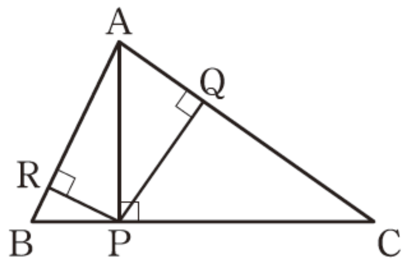
∠EFD + ∠A =

問5 △ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R をとり，PQ ⊥ CA，PR ⊥ AB とする。
このとき，次の問に答えよ。

(1) 4 点 A，R，P，Q は同一円周上にあることを証明せよ。



(2) 点 P が AP ⊥ BC を満たすとき，4 点 B，C，Q，R は同一円周上にあることを証明せよ。



3 接線と弦のつくる角

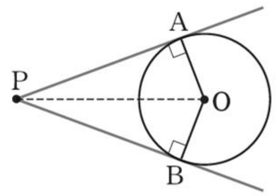
円の接線

（教科書 p.119）

ある円に対して，円の外部の点からは 2 本の接線が引ける。このとき，次の定理が成り立つ。

接線の長さ

定理　円の外部の 1 点 P からその円に引いた 2 本の接線において，点 P から 2 つの接点 A，B までの距離は等しい。
すなわち　　PA = PB

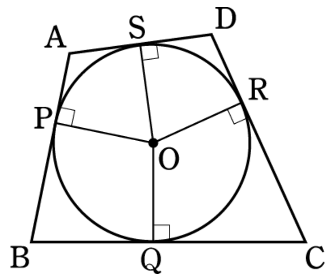


円外の点から接点までの距離を（1　　　　　　　　　　）という。

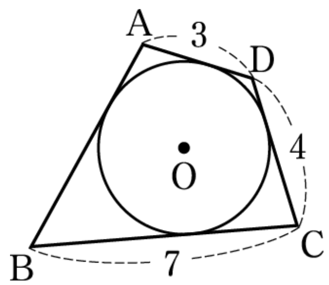
例 1　次の図のように，四角形 ABCD の 4 辺が，P，Q，R，S で円 O に接しているとき，2 組の対辺の長さの和が等しいことを示してみよう。

AP = AS，BP = BQ，
CQ = CR，DR = DS

であるから



問6　右の図のように，四角形 ABCD の 4 辺が円 O に接しているとき，辺 AB の長さを求めよ。



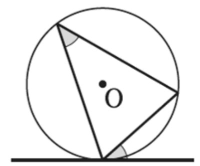
接線と弦のつくる角

（教科書 p.120）

円の接線と接点を通る弦のつくる角について，次の定理が成り立つ。

接線と弦のつくる角

定理　円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



証明　右の図のように，円 O 上の点 A における接線を AT，A を通る弦を AB として，∠BAT が鋭角のとき ∠BAT = ∠ACB を証明する。

直径 AD を引くと，∠DAT は直角であるから

∠BAT = 90° − ∠DAB

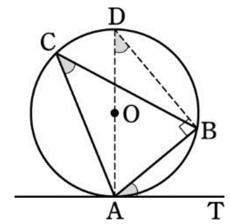
一方，AD は直径であるから，∠ABD も直角であり　　∠ADB = 90° − ∠DAB

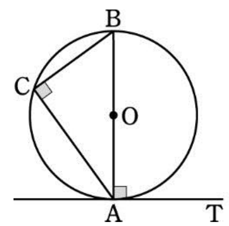
よって　　∠BAT = ∠ADB

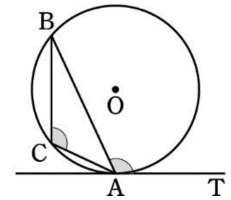
∠ACB と ∠ADB はいずれも弧 AB に対する円周角であるから

∠ACB = ∠ADB　　よって　　∠BAT = ∠ACB

∠BAT が直角，鈍角の場合も同様に定理は成り立つ。

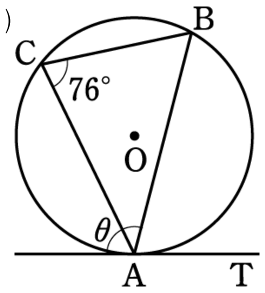




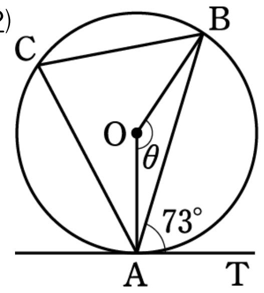


問7 下の図において，AT は円 O の接線，A は接点である。角 θ を求めよ。

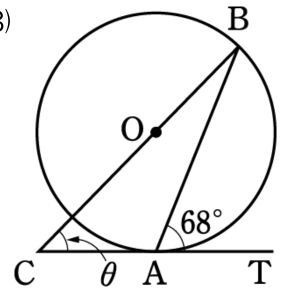
(1)



(2)



(3)



4 方べきの定理 （教科書 p.121）

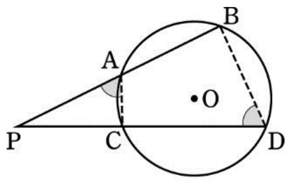
点 P と円 O が与えられたとき，P を通る 2 直線と円 O との 4 つの交点について考えてみよう。点 P とこれらの点の間の距離には，次の（[1] ）が成り立つ。

方べきの定理(1)

定理　点 P を通る 2 直線が，円 O とそれぞれ 2 点 A，B と 2 点 C，D で交わるとき

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

証明 (i)　点 P が円 O の外部にあるとき

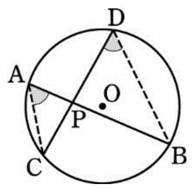


△PAC と △PDB において，
円に内接する四角形の定理により

$\angle PAC = \angle PDB$

また，$\angle P$ は共通である。
したがって　　$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$
よって　　$PA : PD = PC : PB$
すなわち　　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

(ii)　点 P が円 O の内部にあるとき



△PAC と △PDB において，
円周角の定理により

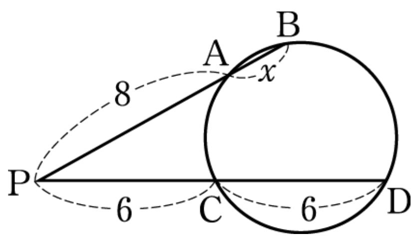
$\angle PAC = \angle PDB$

また，対頂角は等しいから

$\angle APC = \angle DPB$

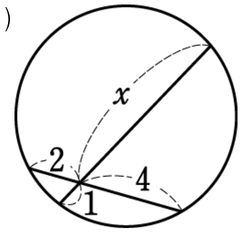
したがって　　$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$
よって　　$PA : PD = PC : PB$
すなわち　　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

例 2 右の図において，AB の長さ x を求めてみよう。

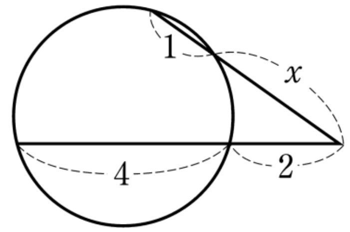


問8 下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)



方べきの定理(2)

定理　点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A，B で交わり，もう一方が点 T で接するとき

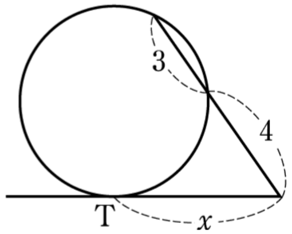
$$PA \cdot PB = PT^2$$

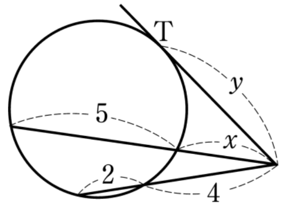
証明 T と A，T と B を結ぶ。△PTA と △PBT において，
接線と弦のつくる角の定理により

$\angle PTA = PBT$

また，$\angle P$ は共通である。
したがって　　$\triangle PTA \backsim \triangle PB$
よって　　$PA : PT = PT : PB$
すなわち　　$PA \cdot PB = PT^2$

問9 下の図において，x，y を求めよ。ただし，T は接点とする。

(1) 

(2) 

方べきの定理(1)は，その逆も成り立つ。

方べきの定理(1)の逆
定理　2 つの線分 AB，CD，またはそれぞれの延長が 1 点 P で交わっているとき，$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ならば，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。

証明 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ より

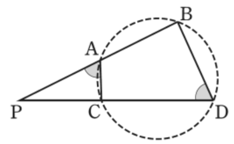
$PA : PD = PC : PB$

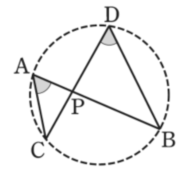
また，$\angle APC = \angle DPB$ であるから

$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$

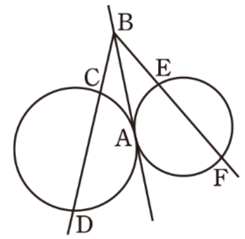
よって　$\angle CAP = \angle BDP$

したがって，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。



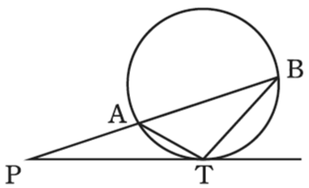


問 10 2 つの円が点 A で同じ直線に接している。この直線上の A と異なる点 B を通る 2 本の直線と，2 円との 2 つの交点をそれぞれ C，D および E，F とする。このとき，4 点 C，D，E，F は同一円周上にあることを証明せよ。



方べきの定理(2)についても，その逆は成り立つ。

方べきの定理(2)の逆
定理　一直線上にない 3 点 A，B，T と線分 BA の延長上の 1点を P とするとき $PA \cdot PB = PT^2$ が成り立つならば，PT は 3 点 A，B，T を通る円に接する。



5 2つの円

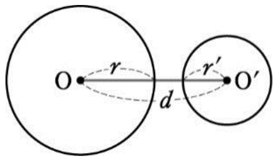
（教科書 p.124）

半径の異なる2つの円の位置関係については，下の図のように5通りの場合が考えられる。

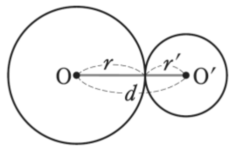
$\boxed{2}$のような場合には2円は(1　　　　　　)といい，$\boxed{4}$のような場合には(2　　　　　　)

という。いずれの場合も2円は1点を共有しており，その点を（3　　　　　）という。

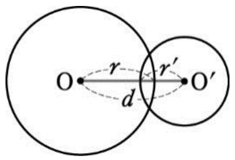
$\boxed{1}$ 互いに外部にある



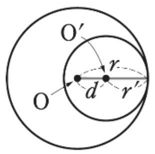
$\boxed{2}$ (4　　　　　　)



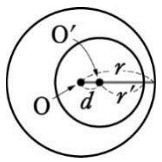
$\boxed{3}$ 2点で交わる



$\boxed{4}$ (5　　　　　　)



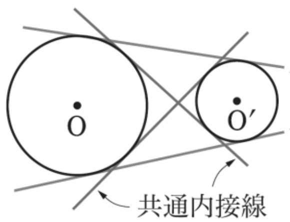
$\boxed{5}$ 一方が他方を含む



2つの円の位置関係は，それらの円の半径 r，r' と中心間の距離 d との関係で定まる。ただし，$r > r'$ とする。

1	$d > r + r'$	共有点はなし
2	$d = r + r'$	共有点は1個
3	$r - r' < d < r + r'$	共有点は2個
4	$r - r' = d$	共有点は1個
5	$r - r' > d$	共有点はなし

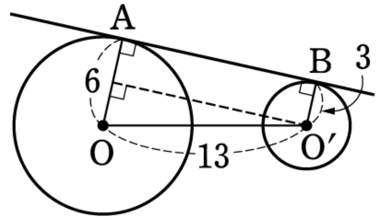
また,右の図のように1本の直線が2つの円の両方の接線となることがある。このような接線を2円の（6　　　　　　）という。共通接線には，その接線に対して同じ側に2円がある（7　　　　　　）と反対側に2円がある（8　　　　　　）の2種類がある。



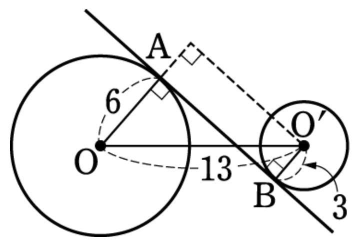
問11 共通接線の本数は，5つの位置関係でどのように変わるか。

問 12 下の図において，直線 AB は 2 つの円の共通接線で，A，B は接点である。
このとき，線分 AB の長さを求めよ。

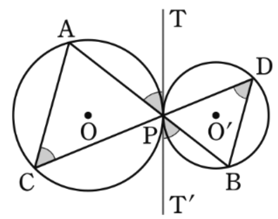
(1)

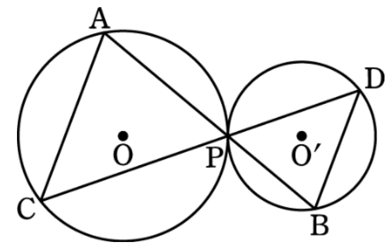


(2)



応用 例題 2 点 P で 2 つの円が外接している。点 P を通る 2 本の直線がそれぞれの円と点 A, B および C, D で交わるとき，AC//BD となることを証明せよ。



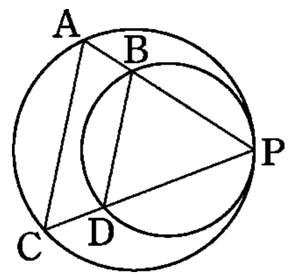


解 図のように，点 P を通る共通接線 TPT′ を引くと，接線と弦のつくる角の定理により

$\angle ACP =$

$\angle BDP =$

問 13 例題２において，2 つの円が点 P で内接しているときにも，AC//BD となることを証明せよ。

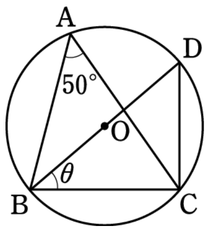


問 題

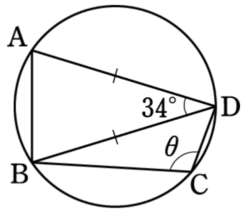
（教科書 p.126）

6 下の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。また，(2)では AD = BD とする。

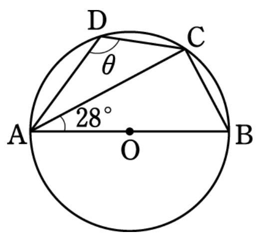
(1)



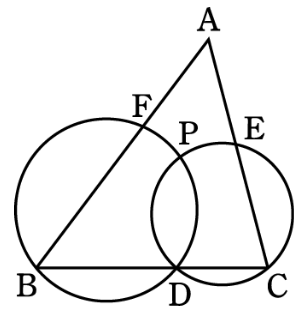
(2)



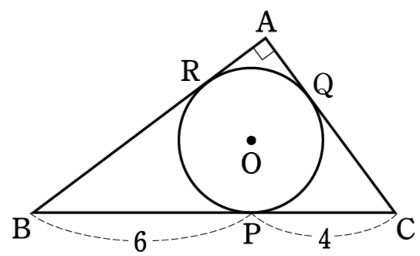
(3)



7 $\triangle$ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F がある。3 点 B，D，F および C，D，E を通る 2 つの円が，右の図のように，$\triangle$ABC の内部の点 P で交わっているとき，4 点 A，E，F，P は同一円周上にあることを証明せよ。

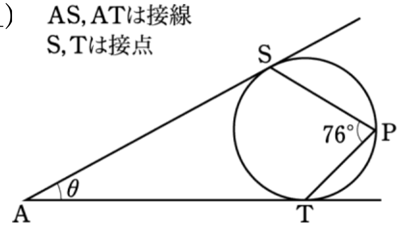


8 右の図において，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。
BP = 6，CP = 4 のとき，円 O の半径を求めよ。

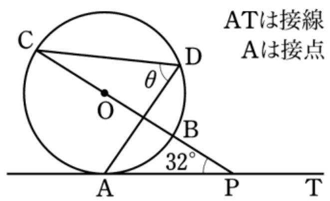


9 下の図において，角 θ を求めよ。

(1)



(2)



2節 円の性質

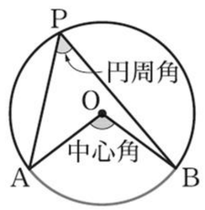
1 円周角の定理

（教科書 p.115）

中学校では，次の（1 円周角の定理 ）とその逆について学んだ。

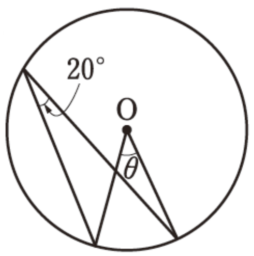
円周角の定理

定理 1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。

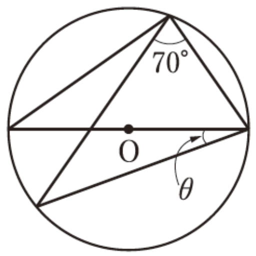


問1 下の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

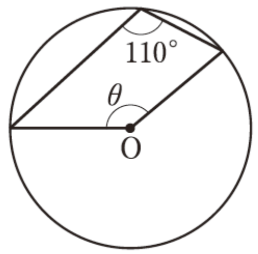
(1)



(2)



(3)



(1) 中心角 θ は円周角 $20°$ の 2 倍であるから

$\theta = 40°$

(2) 半円の弧に対する円周角は $90°$ であるから

$\theta + 70° = 90°$

よって $\theta = 90° - 70° = 20°$

(3) 中心角 $360° - \theta$ は円周角 $110°$ の 2 倍であるから

$360° - \theta = 2 \cdot 110°$

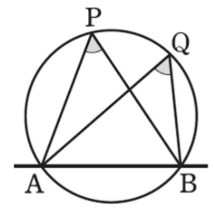
よって $\theta = 140°$

円周角の定理の逆

定理 4点 A，B，P，Q について，P，Q が直線 AB に関して同じ側にあって

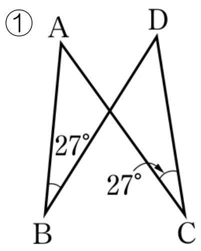
$\angle APB = \angle AQB$

ならば，この4点は同一円周上にある。

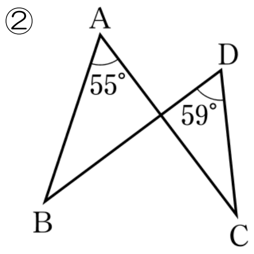


問2 次のうち，4点 A，B，C，D が同一円周上にあるものはどれか。

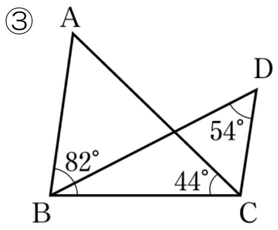
①



②



③



①は，$\angle ABD = \angle ACD$

②は，$\angle BAC \neq \angle BDC$

③は，$\angle BAC = 180° - (82° + 44°) = 54°$

よって $\angle BAC = \angle BDC$

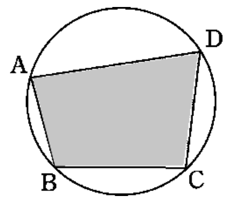
したがって，4点 A，B，C，D が同一円周上にあるのは

①，③

2 円に内接する四角形

（教科書 p.116）

四角形の 4 頂点が 1 つの円周上にあるとき，その四角形は円に（[1] 内接する ）という。三角形は必ず円に内接するが，四角形は円に内接するとは限らない。



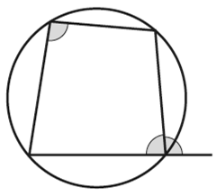
円に内接する四角形について，次の定理が成り立つ。

円に内接する四角形

定理 円に内接する四角形では

$\boxed{1}$ 対角の和は 180° である。

$\boxed{2}$ 外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。



証明 $\boxed{1}$ 円に内接する四角形を ABCD，$\angle A = \alpha$，$\angle C = \beta$ とする。

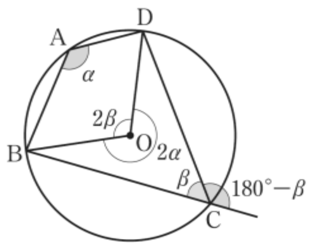
円周角の定理により，

弧 BCD に対する中心角は 2α，

弧 BAD に対する中心角は 2β となる。

$2\alpha + 2\beta = 360°$ より $\alpha + \beta = 180°$

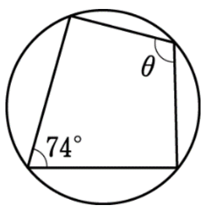
したがって，$\boxed{1}$が成り立つ。



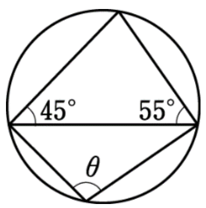
$\boxed{2}$ $\boxed{1}$より，$\alpha = 180° - \beta$ であるから，∠C の外角は ∠A に等しい。

問3 下の図において，角 θ を求めよ。

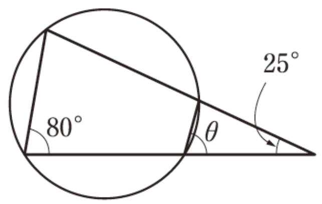
(1)



(2)



(3)



(1) 円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

$\theta + 74° = 180°$

よって $\theta = 106°$

(2) 円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

$\theta + (180° - 55° - 45°) = 180°$

よって $\theta = 100°$

(3) 円に内接する四角形の外角は，それと隣り合う内角の対角に等しいから

$\theta + 80° + 25° = 180°$

よって $\theta = 75°$

円に内接する四角形の定理は，その逆も成り立つ。

四角形が円に内接する条件

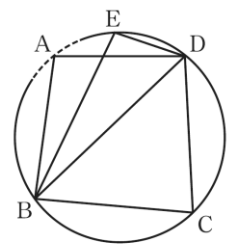
定理 次の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$のいずれかが成り立つ四角形は円に内接する。

$\boxed{1}$ 1 組の対角の和が 180° である。

$\boxed{2}$ 1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しい。

証明 $\boxed{1}$ 四角形 ABCD において，∠A + ∠C = 180° とする。

△BCD の外接円をかき， BD に関して C と反対側の円周上に点 E をとる。



四角形 BCDE は円に内接するから

∠C + ∠BED = 180°

一方，仮定より

∠C + ∠BAD = 180°

よって，∠BED = ∠BAD となり，円周角の定理の逆により，4 点 B，D，A，E は同一円周上にある。

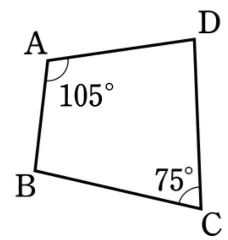
ここで，△BDE の外接円は △BCD の外接円でもあるから，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあることになり，四角形 ABCD は円に内接する。

$\boxed{2}$ 四角形 ABCD において，∠C の外角が，∠C の対角 ∠A に等しいとすると，∠A = 180° − ∠C が成り立つ。

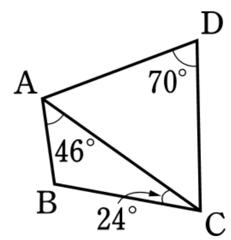
このとき，∠A + ∠C = 180° となり，$\boxed{1}$の場合に一致する。

問4 次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか。

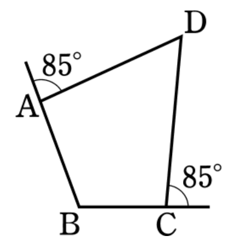
①



②



③



①と②

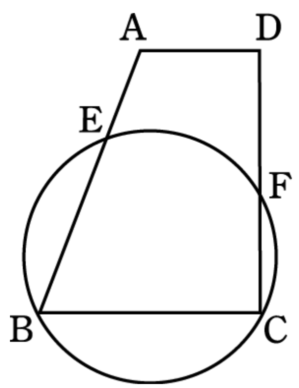
理由：①は，∠A + ∠C = 180° である。

②は，∠B = 180° − (46° + 24°) = 110°

より ∠B + ∠D = 180° である。

③は対角の和が 180° ではない。

例題 1 AD//BC である台形 ABCD がある。この台形の頂点 B，C を通る円が，点 E，F で辺 AB，CD とそれぞれ交わるとする。
このとき，4 点 A，D，E，F は同一円周上にあることを証明せよ。



解 四角形 BCFE は円に内接するから

$\angle B = \angle EFD$ ……①

また，AD//BC より

$\angle B + \angle A = 180°$ ……②

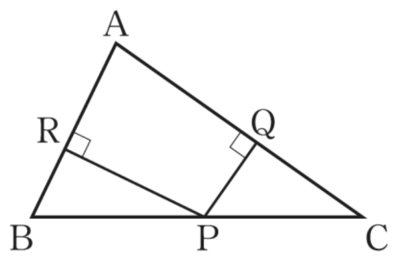
①，② より

$\angle EFD + \angle A = 180°$

よって，四角形 AEFD の 1 組の対角の和が 180° であるから，
四角形 AEFD は円に内接する。
したがって，4 点 A，D，E，F は同一円周上にある。

問5 △ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R をとり，PQ ⊥ CA，PR ⊥ AB とする。
このとき，次の問に答えよ。

(1) 4 点 A，R，P，Q は同一円周上にあることを証明せよ。

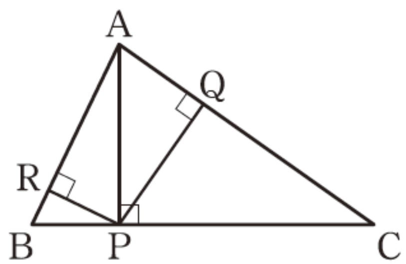


四角形 ARPQ において

$\angle AQP + \angle ARP = 90° + 90° = 180°$

1 組の対角の和が 180° であるから，四角形 ARPQ は円に内接する。したがって，4 点 A，R，P，Q は同一円周上にある。

(2) 点 P が AP ⊥ BC を満たすとき，4 点 B，C，Q，R は同一円周上にあることを証明せよ。



△ABP と △APR において

$\angle APB = \angle ARP = 90°$

$\angle BAP = \angle PAR$（共通）

よって，残りの対応する角は等しいから

$\angle ABP = \angle APR$ ……①

また，(1)より四角形 ARPQ は円に内接するから

$\angle APR = \angle AQR$ ……②

$\angle RBP = \angle ABP$ であるから，①，②より

$\angle RBP = \angle AQR$

よって，四角形 BCQR の 1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しいから，四角形 BCQR は円に内接する。
したがって，4 点 B，C，Q，R は同一円周上にある。

3 接線と弦のつくる角

円の接線

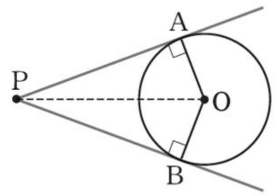
（教科書 p.119）

ある円に対して，円の外部の点からは 2 本の接線が引ける。このとき，次の定理が成り立つ。

接線の長さ

定理　円の外部の 1 点 P からその円に引いた 2 本の接線において，点 P から 2 つの接点 A，B までの距離は等しい。

すなわち　　$PA = PB$



円外の点から接点までの距離を（[1]　接線の長さ　）という。

例 1　次の図のように，四角形 ABCD の 4 辺が，P，Q，R，S で円 O に接しているとき，2 組の対辺の長さの和が等しいことを示してみよう。

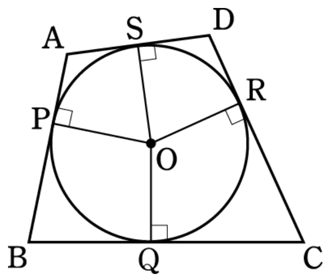
$AP = AS$，$BP = BQ$，

$CQ = CR$，$DR = DS$

であるから

$AB + DC = (AP + BP) + (DR + CR) = (AS + BQ) + (DS + CQ)$

$= (AS + DS) + (BQ + CQ) = AD + BC$



問6　右の図のように，四角形 ABCD の 4 辺が円 O に接しているとき，辺 AB の長さを求めよ。

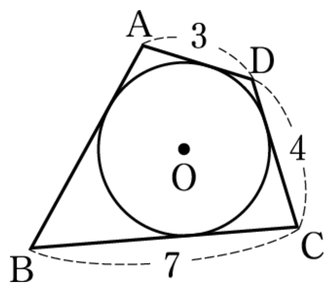
例 1 より，四角形 ABCD の 4 辺が円 O に接しているから，2 組の対辺の長さの和は等しい。

よって

$AB + CD = AD + BC$

$AB + 4 = 3 + 7$

したがって　$AB = 6$



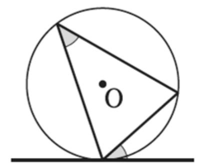
接線と弦のつくる角

（教科書 p.120）

円の接線と接点を通る弦のつくる角について，次の定理が成り立つ。

接線と弦のつくる角

定理　円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



証明　右の図のように，円 O 上の点 A における接線を AT，A を通る弦を AB として，$\angle BAT$ が鋭角のとき $\angle BAT = \angle ACB$ を証明する。

直径 AD を引くと，$\angle DAT$ は直角であるから

$\angle BAT = 90° - \angle DAB$

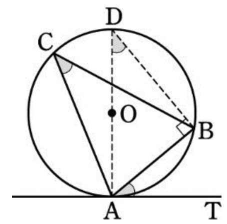
一方，AD は直径であるから，$\angle ABD$ も直角で

あり　　$\angle ADB = 90° - \angle DAB$

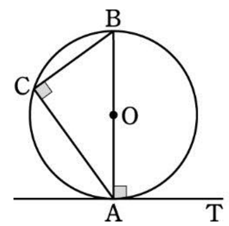
よって　　$\angle BAT = \angle ADB$

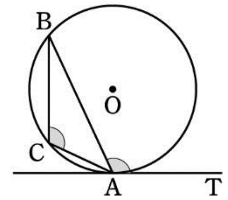
$\angle ACB$ と $\angle ADB$ はいずれも弧 AB に対する円周角であるから

$\angle ACB = \angle ADB$　　よって　　$\angle BAT = \angle ACB$



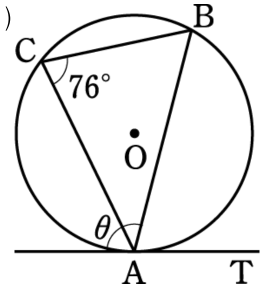
$\angle BAT$ が直角，鈍角の場合も同様に定理は成り立つ。



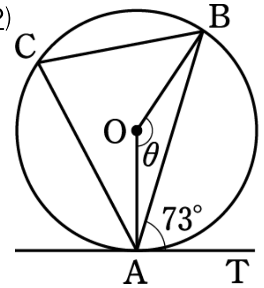


問7 下の図において，AT は円 O の接線，A は接点である。角 θ を求めよ。

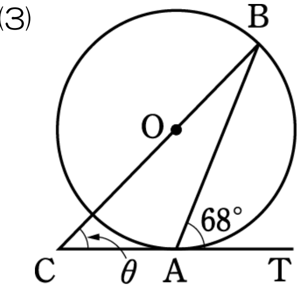
(1)



(2)



(3)



(1) $\angle\mathrm{BAT} = \angle\mathrm{ACB} = 76°$

よって

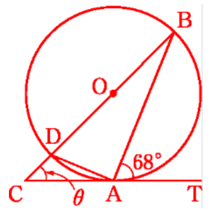
$\theta = 180° - \angle\mathrm{BAT} = 104°$

(2) $\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{BAT} = 73°$

よって

$\theta = 2 \times \angle\mathrm{ACB} = 146°$

(3) BC と円 O との交点を D とし，A と D を結ぶ。



$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{BAT}$

$= 68°$

$\angle\mathrm{BAD} = 90°$ より

$\angle\mathrm{ABD} = 180° - (\angle\mathrm{ADB} + \angle\mathrm{BAD})$

$= 180° - 158° = 22°$

$\triangle\mathrm{ABC}$ において

$\theta + \angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{BAT}$

よって　$\theta = 68° - 22° = 46°$

4 方べきの定理 （教科書 p.121）

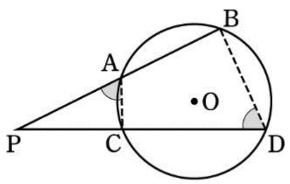
点 P と円 O が与えられたとき，P を通る 2 直線と円 O との 4 つの交点について考えてみよう。
点 P とこれらの点の間の距離には，次の（[1] 方べきの定理 ）が成り立つ。

方べきの定理(1)

定理　点 P を通る 2 直線が，円 O とそれぞれ 2 点 A，B と 2 点 C，D で交わるとき

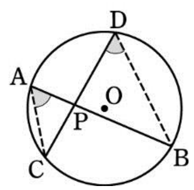
$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$

証明 (i)　点 P が円 O の外部にあるとき



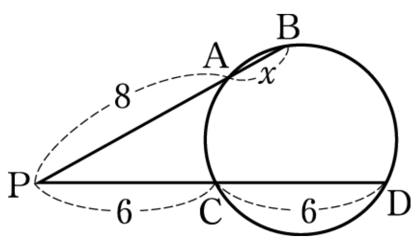
△PAC と △PDB において，
円に内接する四角形の定理により
$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PDB}$
また，∠P は共通である。
したがって　△PAC ∽ △PDB
よって　PA : PD = PC : PB
すなわち　PA・PB = PC・PD

(ii)　点 P が円 O の内部にあるとき



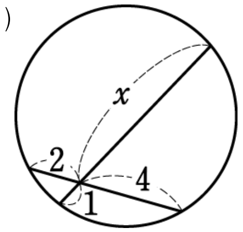
△PAC と △PDB において，
円周角の定理により
$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PDB}$
また，対頂角は等しいから
$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{DPB}$
したがって　△PAC ∽ △PDB
よって　PA : PD = PC: PB
すなわち　PA・PB = PC・PD

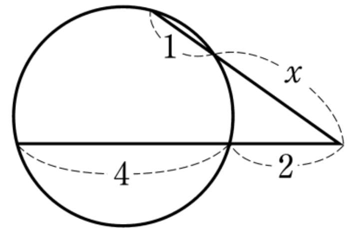
例 2 右の図において，AB の長さ x を求めてみよう。



方べきの定理により
$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$
よって
$8(x+8)=6(6+6)$
これより　$x=1$

問8 下の図において，x を求めよ。

(1)


(2)


(1)　方べきの定理により
$2\cdot 4=1\cdot x$
よって　$x=8$

(2)　方べきの定理により
$x\cdot(x+1)=2\cdot(2+4)$
よって　$x^2+x-12=0$
$(x-3)(x+4)=0$
$x>0$ より　$x=3$

方べきの定理(2)

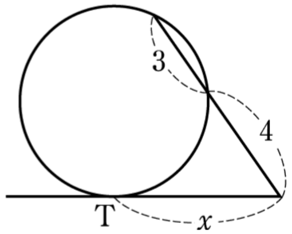
定理　点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A，B で交わり，もう一方が点 T で接するとき

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$$

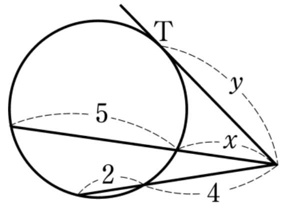
証明 T と A，T と B を結ぶ。△PTA と △PBT において，
接線と弦のつくる角の定理により
$\angle\mathrm{PTA}=\mathrm{PBT}$
また，∠P は共通である。
したがって　△PTA ∽ △PB
よって　PA : PT = PT : PB
すなわち　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

問9 下の図において，x，y を求めよ。ただし，T は接点とする。

(1)



(2)



(1)　方べきの定理により

$x^2 = 4 \cdot (4+3)$

$x > 0$ より

$x = 2\sqrt{7}$

(2)　方べきの定理により

$4 \cdot (4+2) = x \cdot (x+5)$

よって　$x^2 + 5x - 24 = 0$

$(x-3)(x+8) = 0$

$x > 0$ より　$x = 3$

また，方べきの定理により

$y^2 = 4 \cdot (4+2)$

$y > 0$ より

$y = 2\sqrt{6}$

方べきの定理(1)は，その逆も成り立つ。

方べきの定理(1)の逆
定理　2 つの線分 AB，CD，またはそれぞれの延長が 1 点 P で交わっているとき，$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ならば，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。

証明 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ より

$PA : PD = PC : PB$

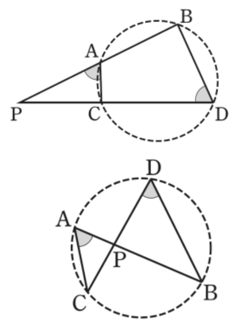
また，$\angle APC = \angle DPB$ であるから

$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$

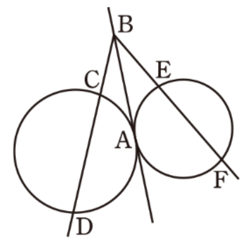
よって　$\angle CAP = \angle BDP$

したがって，4 点 A，B，C，D は

同一円周上にある。



問 10 2 つの円が点 A で同じ直線に接している。この直線上の A と異なる点 B を通る 2 本の直線と，2 円との 2 つの交点をそれぞれ C，D および E，F とする。このとき，4 点 C，D，E，F は同一円周上にあることを証明せよ。



方べきの定理により

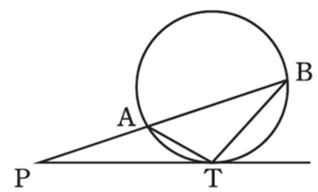
$BC \cdot BD = BA^2$,

$BE \cdot BF = BA^2$

よって　$BC \cdot BD = BE \cdot BF$

ゆえに，方べきの定理の逆により，4 点 C，D，E，F は同一円周上にある。

方べきの定理(2)についても，その逆は成り立つ。

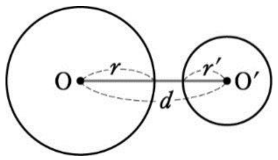
方べきの定理(2)の逆
定理　一直線上にない 3 点 A，B，T と線分 BA の延長上の 1点を P とするとき $PA \cdot PB = PT^2$ が成り立つならば，PT は 3 点 A，B，T を通る円に接する。 

5 2つの円

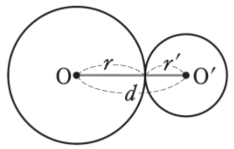
（教科書 p.124）

半径の異なる２つの円の位置関係については，下の図のように５通りの場合が考えられる。
$\boxed{2}$のような場合には２円は（[1] 外接する ）といい，$\boxed{4}$のような場合には（[2] 内接する ）という。いずれの場合も２円は１点を共有しており，その点を（[3] 接点 ）という。

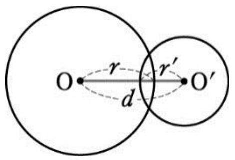
$\boxed{1}$ 互いに外部にある



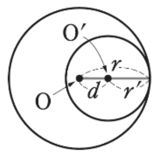
$\boxed{2}$ （[4] 外接する ）



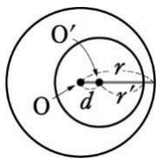
$\boxed{3}$ ２点で交わる



$\boxed{4}$ （[5] 内接する ）



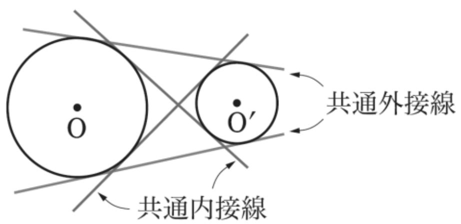
$\boxed{5}$ 一方が他方を含む



２つの円の位置関係は，それらの円の半径 r，r' と中心間の距離 d との関係で定まる。ただし，$r>r'$ とする。

1	$d>r+r'$	共有点はなし
2	$d=r+r'$	共有点は１個
3	$r-r'<d<r+r'$	共有点は２個
4	$r-r'=d$	共有点は１個
5	$r-r'>d$	共有点はなし

また，右の図のように１本の直線が２つの円の両方の接線となることがある。このような接線を２円の（[6] 共通接線 ）という。共通接線には，その接線に対して同じ側に２円がある（[7] 共通外接線 ）と反対側に２円がある（[8] 共通内接線 ）の２種類がある。

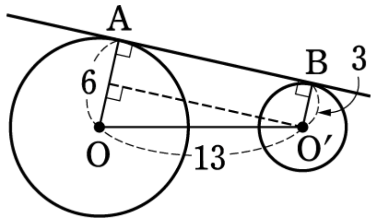


問 11 共通接線の本数は，５つの位置関係でどのように変わるか。

$\boxed{1}$ 互いに外部にある……4 本
$\boxed{2}$ 外接する ……3 本
$\boxed{3}$ 2 点で交わる ……2 本
$\boxed{4}$ 内接する ……1 本
$\boxed{5}$ 一方が他方を含む……なし

問 12 下の図において，直線 AB は 2 つの円の共通接線で，A，B は接点である。
このとき，線分 AB の長さを求めよ。

(1)



O′ から AO に垂線を下ろし，垂線と AO の交点を C とする。
四角形 ACO′B は長方形であるから

$CA = O'B = 3$，$CO' = AB$

よって　$OC = OA - CA = 6 - 3 = 3$

ここで，△COO′ において，三平方の定理により

$OC^2 + CO'^2 = OO'^2$

$CO'^2 = 13^2 - 3^2 = 160$

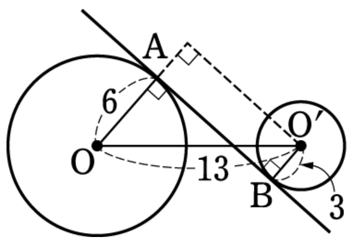
$CO' > 0$ より

$CO' = 4\sqrt{10}$

すなわち

$AB = CO' = 4\sqrt{10}$

(2)



O′ から OA の延長上に垂線を下ろし，垂線と OA の延長との交点を D とする。
四角形 ABO′D は長方形であるから

$AD = BO' = 3$，$AB = DO'$

ここで，△DOO′ において，三平方の定理により

$OD^2 + DO'^2 = OO'^2$

$DO'^2 = 13^2 - (6+3)^2 = 88$

$DO' > 0$ より

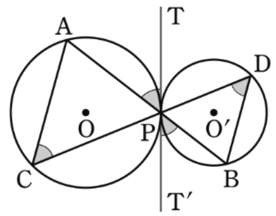
$DO' = 2\sqrt{22}$

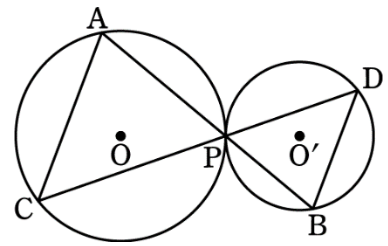
すなわち

$AB = DO' = 2\sqrt{22}$

応用 例題 2 解

点 P で 2 つの円が外接している。点 P を通る 2 本の直線がそれぞれの円と点 A, B および C, D で交わるとき，AC//BD となることを証明せよ。





図のように，点 P を通る共通接線 TPT′ を引くと，接線と弦のつくる角の定理により

$\angle ACP = \angle APT$

$\angle BDP = \angle BPT'$

ここで，$\angle APT = \angle BPT'$ であるから

$\angle ACP = \angle BDP$

よって，錯角が等しいから

AC//BD

問 13 例題２において，2 つの円が点 P で内接しているときにも，AC//BD となることを証明せよ。

図のように，点 P における共通接線 TP を引くと，接線と弦のつくる角の定理により

$\angle ACP = \angle APT$

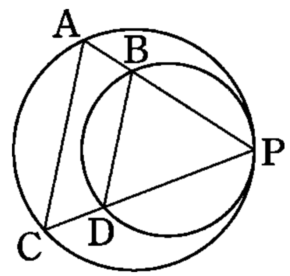
$\angle BDP = \angle BPT$

ここで，$\angle APT = \angle BPT$ より

$\angle ACP = \angle BDP$

よって，同位角が等しいから

AC//BD

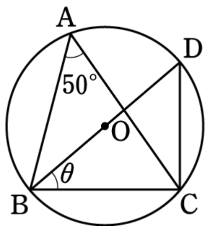


問 題

（教科書 p.126）

6 下の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。また，(2)では AD = BD とする。

(1)



円周角の定理により

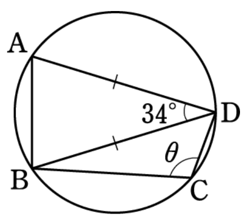
$\angle BDC = \angle BAC = 50°$

また，BD は直径であるから

$\angle BCD = 90°$

よって　$\theta = 180° - (50° + 90°) = 40°$

(2)



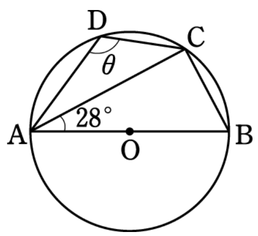
△ABD は二等辺三角形であるから

$\angle BAD = \frac{1}{2}(180° - 34°) = 73°$

四角形 ABCD は円に内接しているから，円に内接する四角形の定理により

$\theta = 180° - 73° = 107°$

(3)



AB は直径であるから

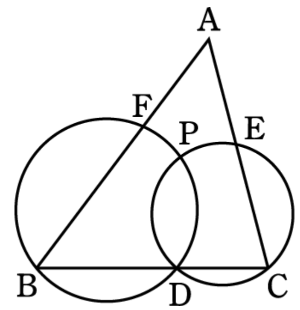
$\angle ACB = 90°$

よって　$\angle ABC = 180° - (90° + 28°) = 62°$

四角形 ABCD は円に内接しているから，円に内接する四角形の定理により

$\theta = 180° - 62° = 118°$

7 △ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F がある。3 点 B，D，F および C，D，E を通る 2 つの円が，右の図のように，△ABC の内部の点 P で交わっているとき，4 点 A，E，F，P は同一円周上にあることを証明せよ。



四角形 BDPF は円に内接するから

$\angle AFP = \angle BDP$　　……①

また，四角形 DCEP は円に内接するから

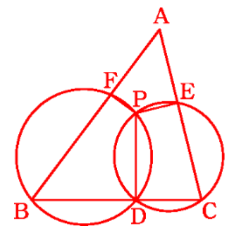
$\angle BDP = \angle PEC$　　……②

①，②より

$\angle AFP = \angle PEC$

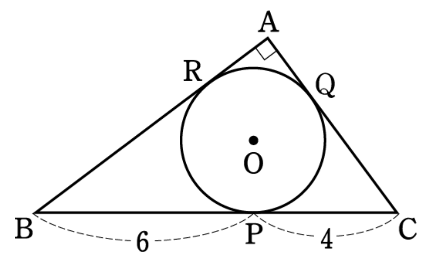
よって，四角形 AFPE の 1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しいから，四角形 AFPE は円に内接する。

したがって，4 点 A，E，F，P は同一円周上にある。



8 右の図において，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。

BP = 6，CP = 4 のとき，円 O の半径を求めよ。



円の半径を x とすると　　AR = AQ = x

一方，BR = BP = 6，CQ = CP = 4 であるから，

△ABC において，三平方の定理により

$(x+6)^2 + (x+4)^2 = 10^2$

よって　$x^2 + 10x - 24 = 0$

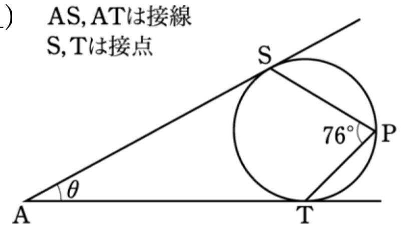
$(x+12)(x-2) = 0$

$x > 0$ より　$x = 2$

したがって，円の半径は 2

9 下の図において，角 θ を求めよ。

(1)



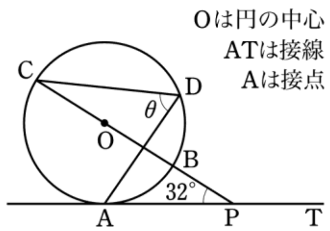
S，T を結ぶと，接線と弦のつくる角の定理により

$\angle STA = 76°$，$\angle TSA = 76°$

△ AST において

$\theta = 180° - 76° - 76° = 28°$

(2)



O と A を結ぶと　$\angle OAP = 90°$

△ OAP において

$\angle AOC = 90° + 32° = 122°$

円周角の定理により

$\theta = \frac{1}{2}\angle AOC = 122° \times \frac{1}{2} = 61°$