1 節 三角形の性質

1 三角形と比

（教科書 p.100）

三角形における比の性質については，中学校で次のことを学んだ。

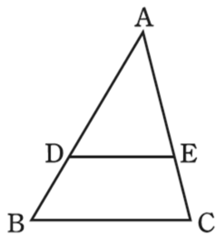
三角形と比

定理 △ABCの辺AB，AC上に，それぞれ点D，Eがあるとき

$\boxed{1}$ DE// BC ⟺ AD : AB = AE : AC

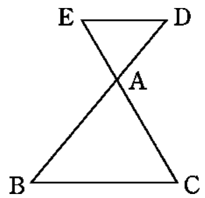
$\boxed{2}$ DE//BC ⟺ AD : DB = AE : EC

$\boxed{3}$ DE//BC ⟹ AD : AB = DE : BC



※$\boxed{3}$において，その逆は成り立たない。

上の定理は，点D，Eが辺AB，ACの延長上にあるときでも成り立つ。

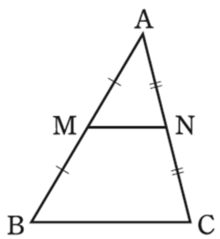


また，とくに，DとEがそれぞれAB，ACの中点であるときには，次の中点連結定理が成り立つ。

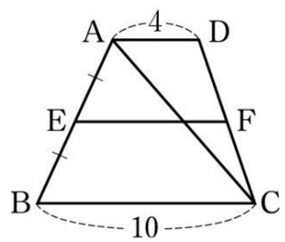
中点連結定理

定理 △ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれM，Nとするとき

MN//BC，　$MN = \frac{1}{2}BC$



問1 AD = 4，BC = 10，AD//BCの台形ABCDにおいて，辺ABの中点Eから辺BCに平行な直線を引き，辺CDとの交点をGとする。EGの長さを求めよ。



内分と外分

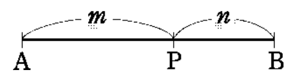
（教科書 p.101）

m，nは正の数とする。

線分AB上に点Pがあり

AP : PB = $m : n$

が成り立つとき，PはABを$m : n$に（1　　　　　）するという。



また，線分ABの延長上に点Qがあり

AQ : QB ＝ $m : n$

が成り立つとき，QはABを$m : n$に（2　　　　　）するという。

例 1 線分ABに対して，次のように内分する点，外分する点を図示してみよう。

(1) ABを2 : 3に内分する点C

A　　　　　　　　B

(2) ABを3 : 1に外分する点D

A　　　　　　　　B

(3) ABを1 : 4に外分する点E

A　　　　　　　　B

問2 線分ABを引き，その線分について次の点を図示せよ。

(1) ABを3 : 1に内分する点C

A　　　　　　　　B

(2) BAを3 : 1に内分する点D

A　　　　　　　　B

(3) ABを5 : 1に外分する点E

A　　　　　　　　B

(4) ABを2 : 3に外分する点F

A　　　　B

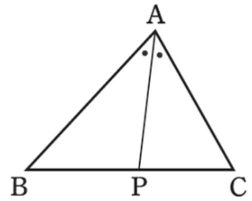
三角形の内角と外角の二等分線

（教科書 p.102）

内角の二等分線と比

定理　△ABC の ∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると，P は BC を AB : AC に内分する。

すなわち　BP : PC = AB : AC



証明　頂点 C を通り AP に平行な直線を引き，BA の延長との交点を D とすると

∠ACD = ∠CAP　◀錯角

∠ADC = ∠BAP　◀同位角

ここで，∠BAP = ∠CAP であるから

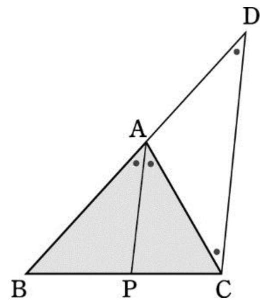
∠ACD = ∠ADC

よって，△ACD は二等辺三角形であるから

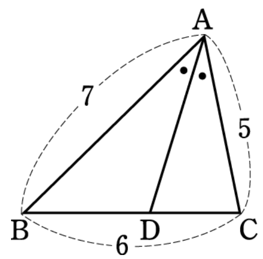
AC = AD　…… ①

また，PA//CD より　BP: PC = BA : AD　…… ②

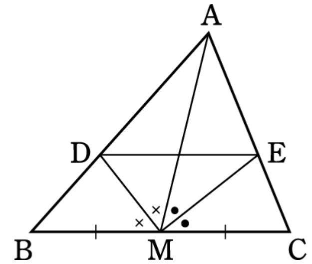
①，②より　BP : PC = AB : AC



問3　△ABC において，∠A の二等分線と対辺 BC との交点を D とする。AB = 7，AC = 5，BC = 6 のとき，BD の長さを求めよ。



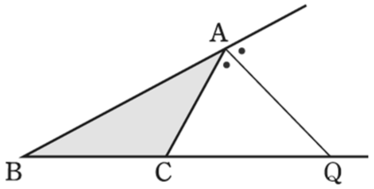
問4　△ABC の辺 BC の中点を M とし，∠AMB，∠AMC の二等分線と辺 AB，AC との交点をそれぞれ D，E とする。このとき，DE//BC であることを証明せよ。



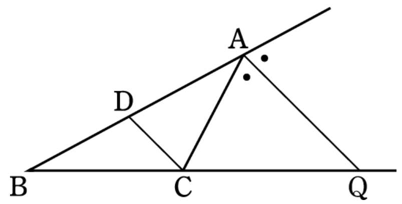
外角の二等分線と比

定理　△ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすると，Q は BC を AB : AC に外分する。

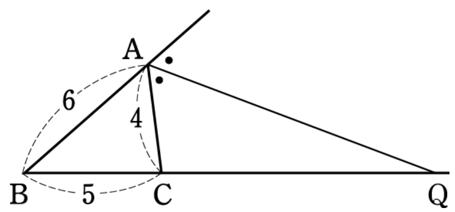
すなわち　　BQ : QC = AB : AC



問5　上の図において，頂点 C を通って AQ に平行な直線を引き，AB との交点を D とする。これを利用して，上の定理を証明せよ。



問6　△ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。頂点 A における外角の二等分線と BC の延長との交点を Q とするとき，CQ の長さを求めよ。



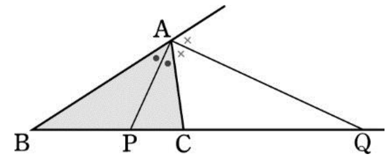
内角の二等分線と比の定理と上の定理は，その逆も成り立つことが知られている。

角の二等分線と比の定理の逆

定理　△ABC において，辺 BC を AB : AC に内分，外分する点をそれぞれ P，Q とすると

1　AP は頂点 A における内角を 2 等分する。

2　AQ は頂点 A における外角を 2 等分する。



2 三角形の重心･外心･垂心･内心

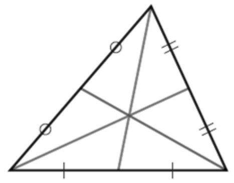
三角形の重心

（教科書 p.104）

三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を（[1]　　　　　　）という。

三角形の重心

定理　三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。その交点は，それぞれの中線を 2 : 1 に内分する。



証明　△ABC において，2 本の中線 BE と CF の交点を G とする。E，F はそれぞれ辺 AC，AB の中点であるから

　　EF//BC　かつ　BC = 2EF

よって　　BG : GE = CG : GF = 2 : 1

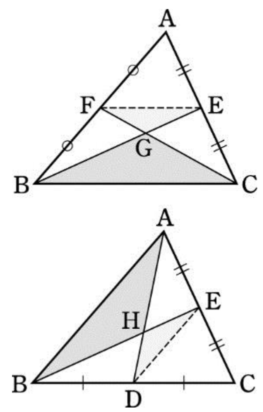
一方，2 本の中線 BE と AD の交点を H とすると，同様に

　　DE//AB　かつ　AB = 2DE

であるから　　BH : HE = AH : HD = 2 : 1

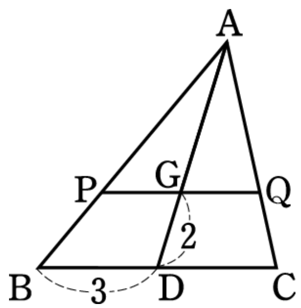
よって，G と H はともに中線 BE を 2 : 1 に内分するから一致する。

したがって，3 本の中線は 1 点 G で交わり，G はそれぞれの中線を 2 : 1 に内分する。



三角形の 3 本の中線の交点を，その三角形の（[2]　　　　　　）という。

問7　右の図において，点 G は △ABC の重心で，線分 PQ は G を通り辺 BC に平行である。BD = 3，GD = 2　のとき，AG，GQ の長さをそれぞれ求めよ。

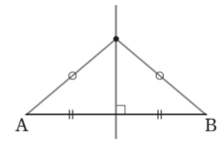


三角形の外心

（教科書 p.105）

線分 AB の垂直二等分線上の点は，両端 A，B から等距離にある。逆に，両端 A，B から等距離にある点は AB の垂直二等分線上にある。

このことを用いて，次の定理を導いてみよう。



三角形の外心

定理　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

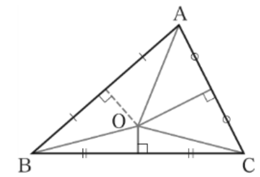
証明　△ABC において，2 辺 BC，CA の垂直二等分線の交点を O とすると

　　OB = OC　かつ　OC = OA

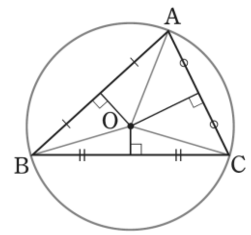
であるから　　OA = OB

よって，O は辺 AB の垂直二等分線上にある。

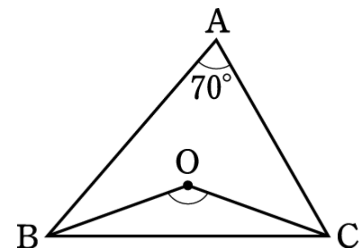
したがって，3 辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。



上の図で，OA = OB = OC であるから，点 O は 3 つの頂点から等距離にある。よって，O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができる。この円を三角形の（[3]　　　　　　）といい，中心 O を三角形の（[4]　　　　　）という。



問8　右の図において，点 O は △ABC の外心である。∠BOC の大きさを求めよ。



問9 ∠A が直角の直角三角形 ABC の外心の位置はどこか。

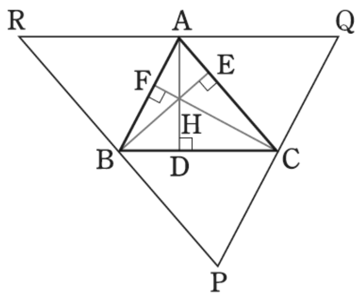
三角形の垂心

（教科書 p.106）

三角形の垂心

定理　三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わる。

証明　△ABC の頂点 A，B，C から対辺，またはその延長にそれぞれ垂線 AD，BE，CF を下ろす。
また，頂点 A，B，C を通り，それぞれの対辺に平行な直線の各交点を，右の図のように P，Q，R とする。



BC//RA，AC//RB より，
四角形 ARBC は平行四辺形であるから　　BC = RA
同様に，四角形 ABCQ は平行四辺形であるから　　BC = AQ
よって　　RA = AQ　　…… ①
また，BC//RQ，AD ⊥ BC より
AD ⊥ RQ　　…… ②
①，② より，AD は △PQR の辺 QR の垂直二等分線である。
同様に，BE，CF は，それぞれ辺 RP，PQ の垂直二等分線である。
三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わるから，3本の垂線 AD，BE，CF は1点 H で交わる。

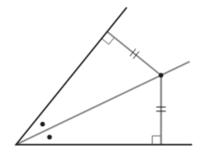
三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線の交点を，その三角形の（[5]　　　　　）という。

問 10　辺 AB を斜辺とする直角三角形 ABC の垂心の位置はどこか。

三角形の内心

（教科書 p.107）

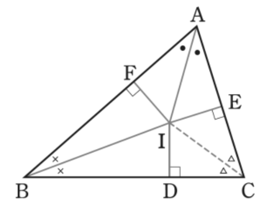
角の二等分線上の点は，角をつくる2辺から等距離にある。逆に，2辺から等距離にある点は，角の二等分線上にある。
このことを用いて，次の定理を導いてみよう。



三角形の内心

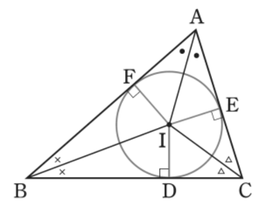
定理　三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。

証明　△ABC において，∠A と ∠B の二等分線の交点を I とする。I から辺 BC，CA，AB にそれぞれ垂線 ID，IE，IF を下ろすと

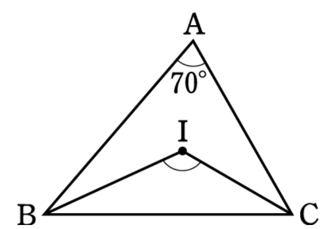


IE = IF　かつ　IF = ID
であるから　　ID = IE
よって，I は ∠C の二等分線上にある。
したがって，3つの内角の二等分線は1点 I で交わる。

上の図で，ID = IE = IF であるから，点 I は3点 D，E，F から等距離にある。よって，I を中心として D，E，F を通る円をかくことができる。この円は三角形の3辺に接しているから，三角形の（[6]　　　　　）といい，中心 I を三角形の（[7]　　　　　）という。
内心は3辺からの距離が等しい点である。



問 11　右の図において，点 I は △ABC の内心である。このとき，∠BIC の大きさを求めよ。



参考　三角形の傍心

（教科書 p.108）

三角形の 1 つの内角の二等分線と，他の 2 つの頂点における外角の二等分線は 1 点で交わる。

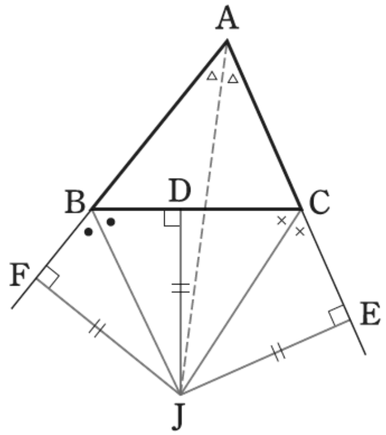
証明 右の図のように，頂点 B，C における外角の二等分線の交点を J とするとき，AJ が ∠A の二等分線であることを示す。
J から辺 BC，さらに辺 AC，AB の延長にそれぞれ垂線 JD，JE，JF を下ろす。
このとき

$JF = JD$　かつ　$JE = JD$

であるから

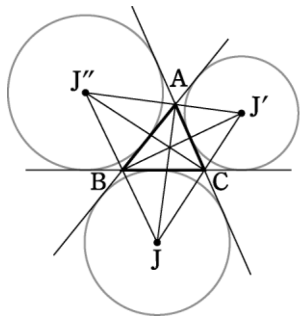
$JF = JE$

よって，J は ∠A の二等分線上にある。
∠B，∠C についても同様に証明できる。



右の図における交点 J を △ABC の ∠A に対する（[8]　　　　　　）という。この傍心 J は，頂点 B，C における外角の二等分線上にあるから，J を中心にして BC および AB，AC の延長線に接する円をかくことができる。この円を，△ABC の ∠A に対する（[9]　　　　　　）という。

右の図のように，△ABC の ∠B, ∠C に対する傍心と傍接円もそれぞれ 1 つずつある。



問1 △ABC の 3 つの傍心をそれぞれ J，J′，J″ とするとき，△JJ′J″ の垂心は，△ABC の内心と一致することを示せ。

3 三角形の比の定理

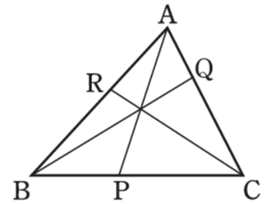
（教科書 p.109）

三角形の頂点から対辺に引いた 3 直線について，次の（1　　　　　　　　　　　　　）が成り立つ。

チェバの定理

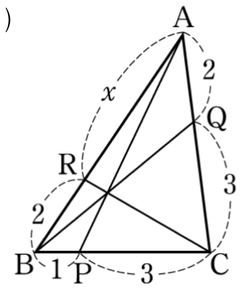
定理　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

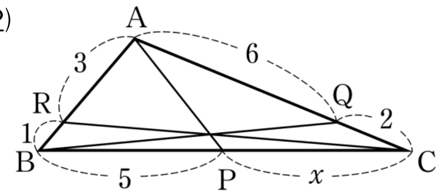


問 12 下の図において，x を求めよ。

(1)

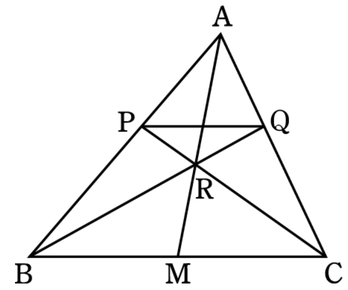


(2)



例題 1　△ABC において，PQ//BC となるように点 P，Q をそれぞれ辺 AB，AC 上にとり，線分 PC と QB の交点を R とする。線分 AR の延長と辺 BC との交点を M とするとき，M が BC の中点であることを証明せよ。

解　△ABC の辺上の点 M，Q，P について，チェバの定理を用いると



$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AP}{PB}=1 \quad \cdots\cdots①$$

また，PQ//BC より

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \quad \cdots\cdots②$$

②を①に代入して

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AQ}{QC}=1$$

よって

$$\frac{BM}{MC}=1$$

したがって，BM = MC となり，M は BC の中点である。

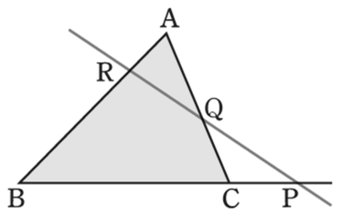
問 13 △ABC の辺 BC の中点を M とする。線分 AM 上に点 R をとり，CR の延長と辺 AB との交点を P，BR の延長と辺 AC との交点を Q とする。このとき，PQ//BC であることを証明せよ。

チェバの定理は，その逆も成り立つことが知られている。

チェバの定理の逆
定理　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり $\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$ が成り立てば，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。

一直線上の 3 点について，次の（[2]　　　　　　　　　　　　　）が成り立つ。

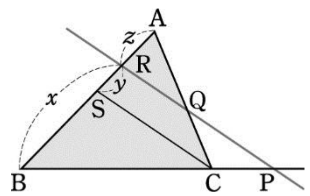
メネラウスの定理
定理　ある直線が △ABC の辺 BC，CA，AB，またはその延長と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき $\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$



証明　点 C を通って PQ に平行な直線を引き，AB との交点を S とする。
RB = x，RS = y，AR = z と表すと

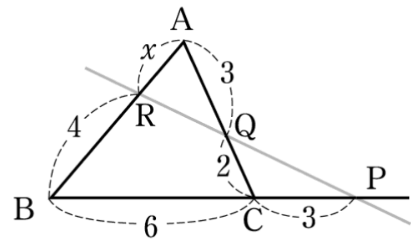
$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{x}{y}$，$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{y}{z}$，$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{z}{x}$

よって　$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1$

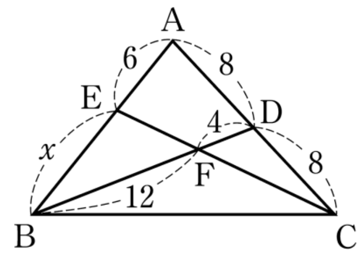


問 14 下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)



メネラウスの定理は，その逆も成り立つことが知られている。

メネラウスの定理の逆
定理　$\triangle \mathrm{ABC}$ の辺 BC，CA，AB，またはその延長上にそれぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうち 1 つまたは 3 つが辺の延長上にあるとき $\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$ が成り立てば，3 直線 P，Q，R は一直線上にある。

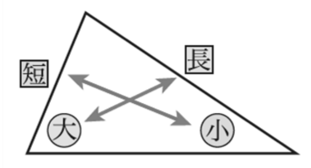
参考　辺と角の大小関係

（教科書 p.112）

次の定理が成り立つ。

辺と角の大小関係

定理　三角形において，長い辺に対する角は，短い辺に対する角より大きい。また，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より長い。

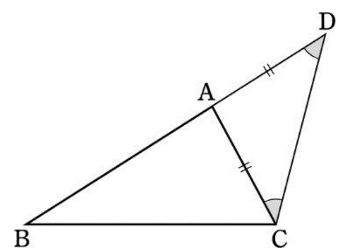


辺と角の大小関係を用いると，三角形の 3 辺の長さについて，次の関係を示すことができる。

三角形の 3 辺の長さの関係

定理　三角形において
$\boxed{1}$　2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きい。
$\boxed{2}$　2 辺の長さの差は，他の 1 辺の長さより小さい。

証明　$\boxed{1}$を証明する。$\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 AB と AC の長さの和が，辺 BC の長さより大きいことを示す。



辺 BA の延長上に，$\mathrm{AD}=\mathrm{AC}$ となるように点 D をとることができる。
このとき，辺 AB と AC の和は

$$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=\mathrm{AB}+\mathrm{AD}=\mathrm{BD}$$

となる。
$\triangle\mathrm{ACD}$ は二等辺三角形であるから　$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{D}$
よって

$$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BCA}+\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{BCA}+\angle\mathrm{D}>\angle\mathrm{D}$$

$\triangle\mathrm{BCD}$ において，$\angle\mathrm{BCD}>\angle\mathrm{D}$ であるから，辺と角の大小関係により $\mathrm{BD}>\mathrm{BC}$ となる。
したがって，$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}+\mathrm{AC}$ であるから

$$\mathrm{AB}+\mathrm{AC}>\mathrm{BC}$$

が成り立つ。
同様に，$\mathrm{AC}+\mathrm{BC}>\mathrm{AB}$，$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}>\mathrm{AC}$ も成り立つ。

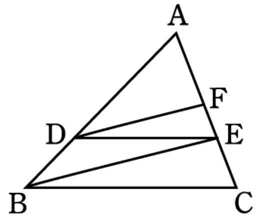
問1　上の定理の$\boxed{2}$を証明せよ。

問 題

（教科書 p.114）

1 右の図において，BC//DE，BE//DF のとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

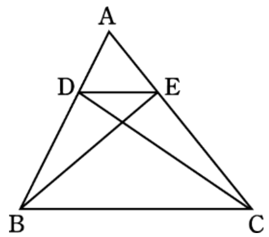
$AE^2 = AF \cdot AC$



2 右の図において，DE//BC，AD : DB ＝ 1 : 2 とする。

次の比を求めよ。

(1)　△ADE : △DBE



(2)　△DBE : △DBC

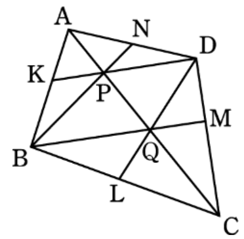
(3)　△ADE : △DBC

3 △ABC において，辺 BC 上に点 D をとって

$\triangle ABD : \triangle ACD = AB : AC$

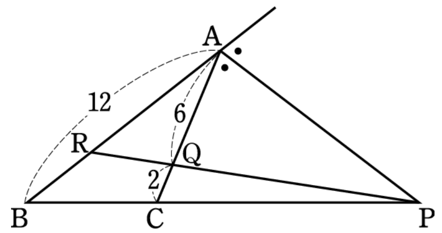
となるようにすると，AD は ∠A を 2 等分することを証明せよ。

4 右の図のように，四角形 ABCD の対角線 AC 上に点 P，Q をとり，DP の延長と辺 AB の交点を K, DQ の延長と辺 BC の交点を L, BQ の延長と辺 CD の交点を M，BP の延長と辺 AD の交点を N とする。このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。



$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1$$

5 右の図において，AP は △ABC の頂点 A における外角の二等分線である。このとき，AR の長さを求めよ。



1節 三角形の性質

1 三角形と比

（教科書 p.100）

三角形における比の性質については，中学校で次のことを学んだ。

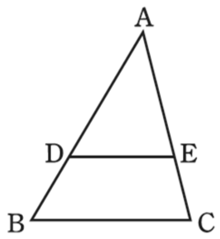
三角形と比

定理　△ABC の辺 AB，AC 上に，それぞれ点 D，E があるとき

$\boxed{1}$ DE// BC ⟺ AD : AB = AE : AC

$\boxed{2}$ DE//BC ⟺ AD : DB = AE : EC

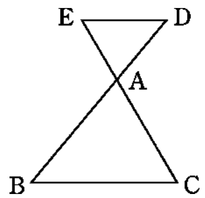
$\boxed{3}$ DE//BC ⟹ AD : AB = DE : BC



※$\boxed{3}$において，その逆は成り立たない。

上の定理は，点 D，E が辺 AB，AC の延長上にあるときでも成り立つ。

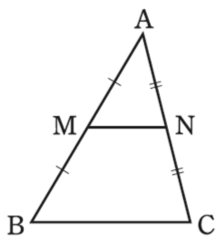
また，とくに，D と E がそれぞれ AB，AC の中点であるときには，次の中点連結定理が成り立つ。



中点連結定理

定理　△ABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき

MN//BC，　$\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$



問1　AD = 4，BC = 10，AD//BC の台形 ABCD において，辺 AB の中点 E から辺 BC に平行な直線を引き，辺 CD との交点を F とする。EF の長さを求めよ。

ACとEFの交点を G とする。

△ABC において，EG//BC であるから

AG : GC = AE : EB = 1 : 1

よって，中点連結定理により

$\mathrm{EG} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5$

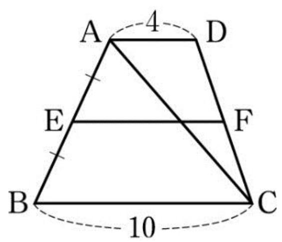
△ACD において，GF//AD であるから

DF : FC = AG : GC = 1 : 1

よって，中点連結定理により

$\mathrm{GF} = \frac{1}{2}\mathrm{AD} = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$

したがって　EF = EG + GF = 5 + 2 = 7



内分と外分

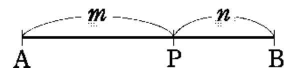
（教科書 p.101）

m，n は正の数とする。

線分 AB 上に点 P があり

AP : PB = $m : n$

が成り立つとき，P は AB を $m : n$ に（1　内分　）するという。



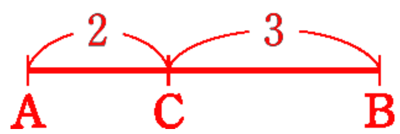
また，線分 AB の延長上に点 Q があり

AQ : QB ＝ $m : n$

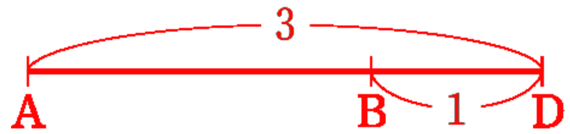
が成り立つとき，Q は AB を $m : n$ に（2　外分　）するという。

例1　線分 AB に対して，次のように内分する点，外分する点を図示してみよう。

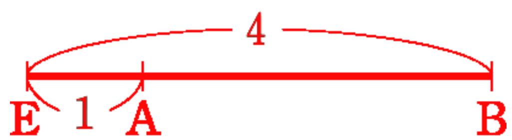
（1）　AB を 2 : 3 に内分する点 C



（2）　AB を 3 : 1 に外分する点 D



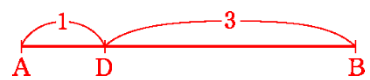
（3）　AB を 1 : 4 に外分する点 E



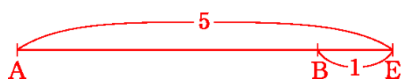
問2　線分 AB を引き，その線分について次の点を図示せよ。

（1）AB を 3 : 1 に内分する点 C

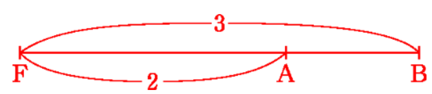
（2）　BA を 3 : 1 に内分する点 D



（3）AB を 5 : 1 に外分する点 E



（4）　AB を 2 : 3 に外分する点 F



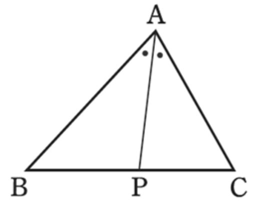
三角形の内角と外角の二等分線

（教科書 p.102）

内角の二等分線と比

定理 △ABC の ∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると，P は BC を AB : AC に内分する。

すなわち　BP : PC = AB : AC



証明 頂点 C を通り AP に平行な直線を引き，BA の延長との交点を D とすると

$\angle ACD = \angle CAP$　◀錯角

$\angle ADC = \angle BAP$　◀同位角

ここで，$\angle BAP = \angle CAP$ であるから

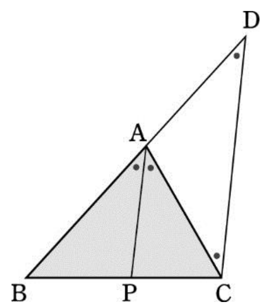
$\angle ACD = \angle ADC$

よって，△ACD は二等辺三角形であるから

AC = AD　…… ①

また，PA//CD より　BP: PC = BA : AD　…… ②

①，②より　BP : PC = AB : AC



問3 △ABC において，∠A の二等分線と対辺 BC との交点を D とする。AB = 7，AC = 5，BC = 6 のとき，BD の長さを求めよ。

△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

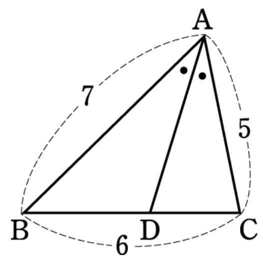
BD : DC = AB : AC = 7 : 5

すなわち　BD : (6 − BD) = 7 : 5

よって　5BD = 7(6 − BD)

これを解くと

$BD = \frac{7}{2}$



問4 △ABC の辺 BC の中点を M とし，∠AMB, ∠AMC の二等分線と辺 AB, AC との交点をそれぞれ D, E とする。このとき，DE//BC であることを証明せよ。

△ABM において，MD は ∠AMB の二等分線であるから

AD : DB = AM : MB　……①

△AMC において，ME は ∠AMC の二等分線であるから

AE : EC = AM : MC　……②

また，MB = MC であるから，①，②より

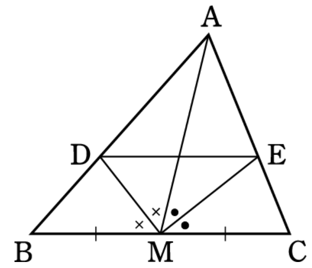
AD : DB = AM : MB

= AM : MC

= AE : EC

したがって，△ABC において，AD : DB = AE : EC

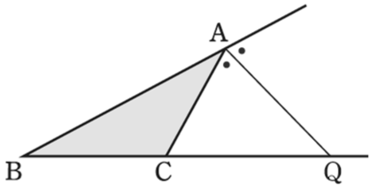
であるから，三角形と比の定理により，DE//BC である。



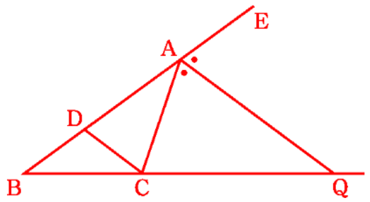
外角の二等分線と比

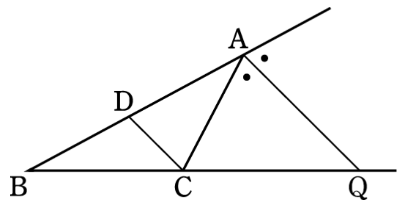
定理　△ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすると，Q は BC を AB : AC に外分する。

すなわち　　BQ : QC = AB : AC



問5　上の図において，頂点 C を通って AQ に平行な直線を引き，AB との交点を D とする。これを利用して，上の定理を証明せよ。





線分 BA の延長上に点 E をとる。

AQ//DC より

　　∠CAQ = ∠ACD（錯角）

　　∠EAQ = ∠ADC（同位角）

ここで，∠CAQ = ∠EAQ であるから

　　∠ACD = ∠ADC

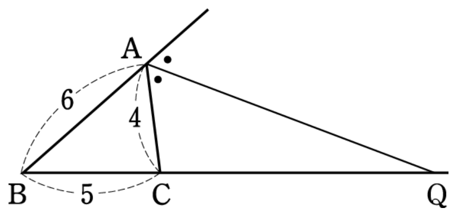
したがって　AC = AD　　　　　……①

また，AQ//DC より

　　BQ : QC = BA : AD　　　　　……②

①，②より　BQ : QC = AB : AC

問6　△ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。頂点 A における外角の二等分線と BC の延長との交点を Q とするとき，CQ の長さを求めよ。



△ABC において，AQ は頂点 A における外角の二等分線であるから

　　BQ : QC = AB : AC

　　(BC + CQ) : QC = 6 : 4

　　6QC = 4(5 + QC)

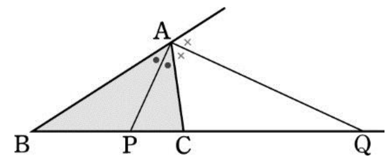
　　2QC = 20

よって　CQ = 10

内角の二等分線と比の定理と上の定理は，その逆も成り立つことが知られている。

角の二等分線と比の定理の逆

定理　△ABC において，辺 BC を AB : AC に内分，外分する点をそれぞれ P，Q とすると



$\boxed{1}$　AP は頂点 A における内角を 2 等分する。

$\boxed{2}$　AQ は頂点 A における外角を 2 等分する。

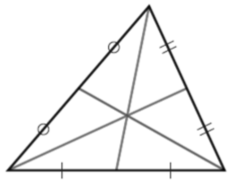
2 三角形の重心・外心・垂心・内心

三角形の重心

（教科書 p.104）

三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を（[1] 中線 ）という。

三角形の重心
定理 三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。その交点は，それぞれの中線を 2：1 に内分する。



証明 △ABC において，2 本の中線 BE と CF の交点を G とする。E，F はそれぞれ辺 AC，AB の中点であるから

EF//BC かつ BC = 2EF

よって BG：GE = CG：GF = 2：1

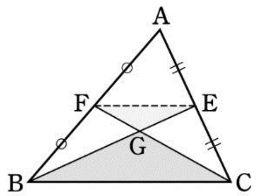
一方，2 本の中線 BE と AD の交点を H とすると，同様に

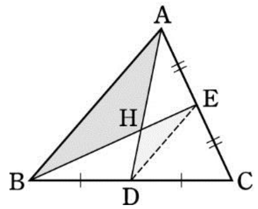
DE//AB かつ AB = 2DE

であるから BH：HE = AH：HD = 2：1

よって，G と H はともに中線 BE を 2：1 に内分するから一致する。

したがって，3 本の中線は 1 点 G で交わり，G はそれぞれの中線を 2：1 に内分する。





三角形の 3 本の中線の交点を，その三角形の（[2] 重心 ）という。

問7 右の図において，点 G は △ABC の重心で，線分 PQ は G を通り辺 BC に平行である。BD = 3，GD = 2 のとき，AG，GQ の長さをそれぞれ求めよ。

点 G は △ABC の重心であるから

AG：GD = 2：1

AG = 2GD = 2・2 = 4

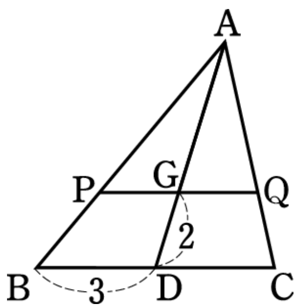
点 D は BC の中点より DC = 3

△ADC において，GQ//DC より

GQ：DC = AG：AD = 2：3

よって

$GQ = \frac{2}{3}DC = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2$

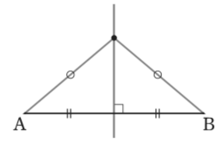


三角形の外心

（教科書 p.105）

線分 AB の垂直二等分線上の点は，両端 A，B から等距離にある。逆に，両端 A，B から等距離にある点は AB の垂直二等分線上にある。

このことを用いて，次の定理を導いてみよう。



三角形の外心
定理 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

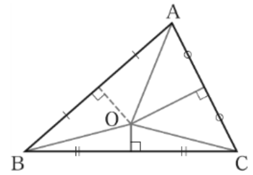
証明 △ABC において，2 辺 BC，CA の垂直二等分線の交点を O とすると

OB = OC かつ OC = OA

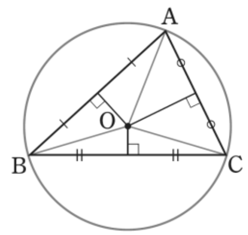
であるから OA = OB

よって，O は辺 AB の垂直二等分線上にある。

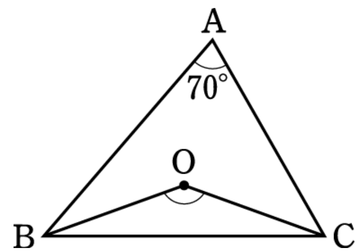
したがって，3 辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。



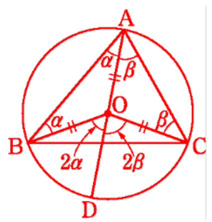
上の図で，OA = OB = OC であるから，点 O は 3 つの頂点から等距離にある。よって，O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができる。この円を三角形の（[3] 外接円 ）といい，中心 O を三角形の（[4] 外心 ）という。



問8 右の図において，点 O は △ABC の外心である。∠BOC の大きさを求めよ。



直線 AO と △ABC の外接円との交点を D とする。



O は外心であるから，△OAB と△OAC は二等辺三角形である。

このとき，

$\angle OAB = \angle OBA = \alpha$，$\angle OAC = \angle OCA = \beta$ とすると，

$\angle A = 70°$ より

$\alpha + \beta = 70°$

したがって

$\angle BOC = \angle BOD + \angle COD$

$= 2\alpha + 2\beta$

$= 2(\alpha + \beta) = 140°$

問9 $\angle A$ が直角の直角三角形 ABC の外心の位置はどこか。

AB の中点を M とし，M を通り AB に垂直な直線が BC と交わる点を O とする。

直線 OM は AB の垂直二等分線であるから

$AO = BO$ ……①

また，$\angle BMO = \angle BAC = 90°$ であるから

$MO // AC$

よって，$BO : OC = BM : MA$ となり，O は BC の中点となる。

したがって $BO = CO$ ……②

①，②より，$AO = BO = CO$ であるから，BC の中点 O が $\triangle ABC$ の外心である。

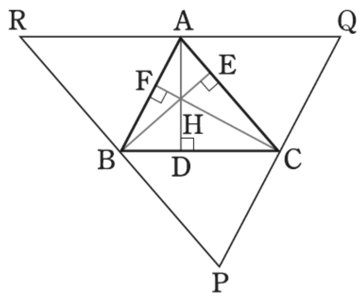
三角形の垂心

（教科書 p.106）

三角形の垂心

定理　三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わる。

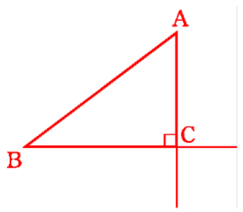
証明



$\triangle$ABC の頂点 A，B，C から対辺，またはその延長にそれぞれ垂線 AD，BE，CF を下ろす。
また，頂点 A，B，C を通り，それぞれの対辺に平行な直線の各交点を，右の図のように P，Q，R とする。
BC//RA，AC//RB より，
四角形 ARBC は平行四辺形であるから　　BC = RA
同様に，四角形 ABCQ は平行四辺形であるから　　BC = AQ
よって　　RA = AQ　　…… ①
また，BC//RQ，AD ⊥ BC より
AD ⊥ RQ　　…… ②
①，② より，AD は $\triangle$PQR の辺 QR の垂直二等分線である。
同様に，BE，CF は，それぞれ辺 RP，PQ の垂直二等分線である。
三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わるから，3本の垂線 AD，BE，CF は1点 H で交わる。

三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線の交点を，その三角形の（5　垂心　）という。

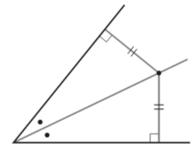
問 10 辺 AB を斜辺とする直角三角形 ABC の垂心の位置はどこか。



頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線は直線 AC である。
同様に，頂点 B から対辺 AC に下ろした垂線は直線 BC である。
よって，垂心は直角の頂点 C である。

三角形の内心

（教科書 p.107）

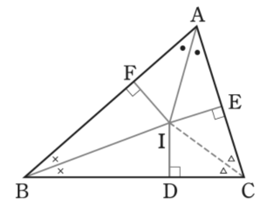


角の二等分線上の点は，角をつくる2辺から等距離にある。逆に，2辺から等距離にある点は，角の二等分線上にある。
このことを用いて，次の定理を導いてみよう。

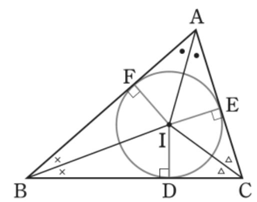
三角形の内心

定理　三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。

証明

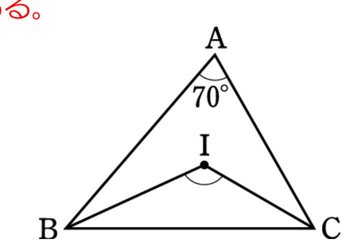


$\triangle$ABC において，∠A と ∠B の二等分線の交点を I とする。I から辺 BC，CA，AB にそれぞれ垂線 ID，IE，IF を下ろすと
IE = IF　かつ　IF = ID
であるから　　ID = IE
よって，I は ∠C の二等分線上にある。
したがって，3つの内角の二等分線は1点 I で交わる。



上の図で，ID = IE = IF であるから，点 I は3点 D，E，F から等距離にある。よって，I を中心として D，E，F を通る円をかくことができる。この円は三角形の3辺に接しているから，三角形の（6　内接円　）といい，中心 I を三角形の（7　内心　）という。
内心は3辺からの距離が等しい点である。

問 11 右の図において，点 I は $\triangle$ABC の内心である。このとき，∠BIC の大きさを求めよ。



I は内心であるから，BI，CI はそれぞれ ∠B，∠C の二等分線である。
よって

$$\angle IBC = \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\angle ICB = \frac{1}{2}\angle ACB$$

これより

$$\begin{aligned}\angle BIC &= 180^\circ - \angle IBC - \angle ICB \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle ACB \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 70^\circ) \\ &= 125^\circ\end{aligned}$$

参考　三角形の傍心

（教科書 p.108）

三角形の 1 つの内角の二等分線と，他の 2 つの頂点における外角の二等分線は 1 点で交わる。

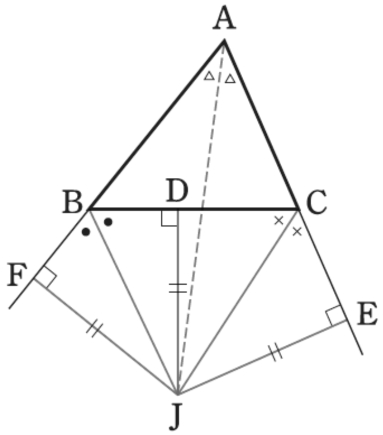
証明 右の図のように，頂点 B，C における外角の二等分線の交点を J とするとき，AJ が ∠A の二等分線であることを示す。
J から辺 BC，さらに辺 AC，AB の延長にそれぞれ垂線 JD，JE，JF を下ろす。
このとき

$JF = JD$　かつ　$JE = JD$

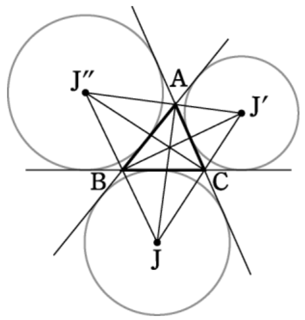
であるから

$JF = JE$

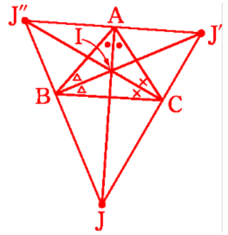
よって，J は ∠A の二等分線上にある。
∠B，∠C についても同様に証明できる。



右の図における交点 J を △ABC の ∠A に対する（[8]　傍心　）という。
この傍心 J は，頂点 B，C における外角の二等分線上にあるから，J を中心にして BC および AB，AC の延長線に接する円をかくことができる。この円を，△ABC の ∠A に対する（[9]　傍接円　）という。
右の図のように，△ABC の ∠B, ∠C に対する傍心と傍接円もそれぞれ 1 つずつある。



問1 △ABC の 3 つの傍心をそれぞれ J，J′，J″ とするとき，△JJ′J″ の垂心は，△ABC の内心と一致することを示せ。



∠A に対する傍心が J であるとき，AJ は ∠A の二等分線である。
同様に，BJ′ は ∠B の二等分線，CJ″ は ∠C の二等分線である。
したがって，AJ，BJ′，CJ″ は △ABC の内心 I で交わる。
AJ′，AJ″ はともに ∠A の外角の二等分線であるから，J′，A，J″ は一直線上にある。
このとき，$\angle J'AC = \angle J''AB$ で，AJ は ∠A の二等分線であるから

$\angle J'AJ = \angle J''AJ = 90^\circ$

すなわち，AJ と J′J″ は垂直である。
同様に BJ′ と J″J は垂直，CJ″ と JJ′ は垂直である。
よって，△JJ′J″ の各頂点から対辺に下ろした 3 本の垂線 AJ，BJ′，CJ″ の交点 I は △JJ′J″ の垂心である。
したがって，△JJ′J″ の垂心は，△ABC の内心と一致する。

3 三角形の比の定理

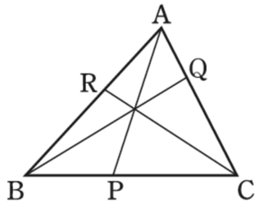
（教科書 p.109）

三角形の頂点から対辺に引いた 3 直線について，次の（[1] チェバの定理 ）が成り立つ。

チェバの定理

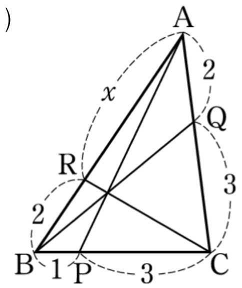
定理　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

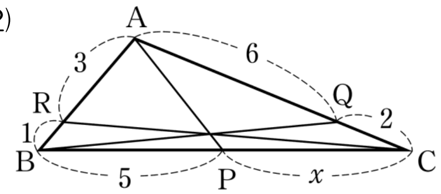


問 12 下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)



チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

(1) ①より

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{2}=1$$

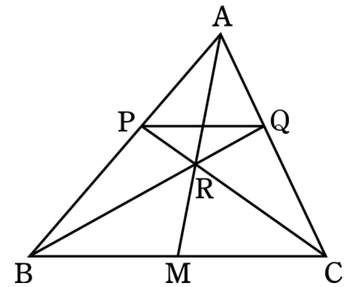
よって　$x=4$

(2) ①より

$$\frac{5}{x}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{1}=1$$

よって　$x=5$

例題 1　△ABC において，PQ//BC となるように点 P，Q をそれぞれ辺 AB，AC 上にとり，線分 PC と QB の交点を R とする。線分 AR の延長と辺 BC との交点を M とするとき，M が BC の中点であることを証明せよ。



解　△ABC の辺上の点 M，Q，P について，チェバの定理を用いると

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AP}{PB}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

また，PQ//BC より

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \quad \cdots\cdots ②$$

②を①に代入して

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AQ}{QC}=1$$

よって

$$\frac{BM}{MC}=1$$

したがって，BM = MC となり，M は BC の中点である。

問 13 △ABC の辺 BC の中点を M とする。線分 AM 上に点 R をとり，CR の延長と辺 AB との交点を P，BR の延長と辺 AC との交点を Q とする。このとき，PQ//BC であることを証明せよ。

3 直線 AM，BQ，CP が 1 点で交わるから，チェバの定理により

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AP}{PB}=1$$

ここで，BM = MC より

$$\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AP}{PB}=1$$

よって

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{AQ}{QC}$$

したがって，△ABC において

AP : PB = AQ : QC

三角形と比の定理により　PQ//BC

チェバの定理は，その逆も成り立つことが知られている。

チェバの定理の逆

定理　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

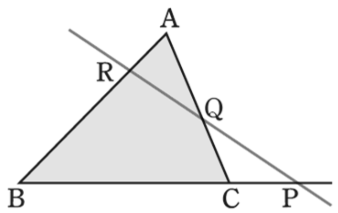
が成り立てば，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。

一直線上の 3 点について，次の（2　メネラウスの定理　）が成り立つ。

メネラウスの定理

定理　ある直線が △ABC の辺 BC，CA，AB，またはその延長と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

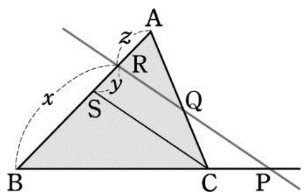
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$



証明　点 C を通って PQ に平行な直線を引き，AB との交点を S とする。
RB $=x$，RS $=y$，AR $=z$ と表すと

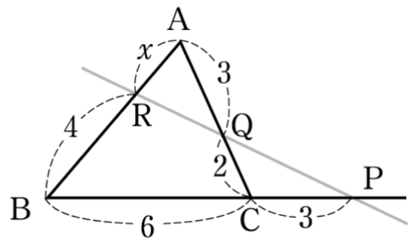
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{x}{y},\quad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{y}{z},\quad \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{z}{x}$$

よって　$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1$



問 14　下の図において，x を求めよ。

(1)



メネラウスの定理により

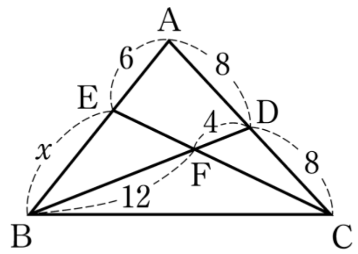
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

よって

$$\frac{9}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{4}=1$$

したがって　$x=2$

(2)



メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}=1$$

よって

$$\frac{16}{8}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{x}{6}=1$$

したがって　$x=9$

メネラウスの定理は，その逆も成り立つことが知られている。

メネラウスの定理の逆
定理　$\triangle\mathrm{ABC}$ の辺 BC，CA，AB，またはその延長上にそれぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうち 1 つまたは 3 つが辺の延長上にあるとき $$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$ が成り立てば，3 直線 P，Q，R は一直線上にある。

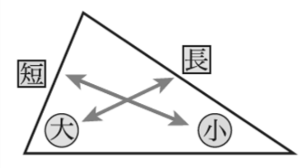
参 考　辺と角の大小関係

（教科書 p.112）

次の定理が成り立つ。

辺と角の大小関係

定理　三角形において，長い辺に対する角は，短い辺に対する角より大きい。
また，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より長い。



辺と角の大小関係を用いると，三角形の 3 辺の長さについて，次の関係を示すことができる。

三角形の 3 辺の長さの関係

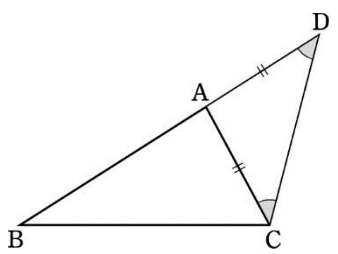
定理　三角形において

$\boxed{1}$　2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きい。

$\boxed{2}$　2 辺の長さの差は，他の 1 辺の長さより小さい。

証明　$\boxed{1}$を証明する。$\triangle ABC$ において，辺 AB と AC の長さの和が，辺 BC の長さより大きいことを示す。

辺 BA の延長上に，$AD = AC$ となるように点 D をとることができる。



このとき，辺 AB と AC の和は

$$AB + AC = AB + AD = BD$$

となる。

$\triangle ACD$ は二等辺三角形であるから　$\angle ACD = \angle D$

よって

$$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = \angle BCA + \angle D > \angle D$$

$\triangle BCD$ において，$\angle BCD > \angle D$ であるから，辺と角の大小関係により $BD > BC$ となる。

したがって，$BD = AB + AC$ であるから

$$AB + AC > BC$$

が成り立つ。

同様に，$AC + BC > AB$，$AB + BC > AC$ も成り立つ。

問1　上の定理の$\boxed{2}$を証明せよ。

定理$\boxed{1}$より，任意の $\triangle ABC$ において，次の 3 つの不等式が成り立つ。

$AB + AC > BC$　……①

$AC + BC > AB$　……②

$AB + BC > AC$　……③

いま，$|AB - AC| < BC$ であることを証明しよう。

②より　$AB - AC < BC$　……④

③より　$-BC < AB - AC$　……⑤

④，⑤より　$-BC < AB - AC < BC$

よって　$|AB - AC| < BC$ が成り立つ。

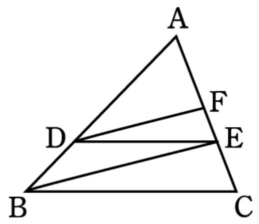
同様に，$|BA - BC| < AC$，$|CA - CB| < AB$ も成り立つ。

問 題

（教科書 p.114）

1 右の図において，BC//DE，BE//DF のとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

$AE^2 = AF \cdot AC$



BC//DE より　AD : AB = AE : AC

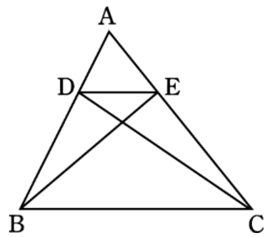
BE//DF より　AD : AB = AF : AE

したがって　AE : AC = AF : AE

ゆえに　$AE^2 = AF \cdot AC$

2 右の図において，DE//BC，AD : DB ＝ 1 : 2 とする。

次の比を求めよ。



(1)　△ADE : △DBE

△ADE と△DBE は，AD，DB を底辺とみると高さが共通である。

したがって

△ADE : △DBE = AD : DB

= 1 : 2

(2)　△DBE : △DBC

△DBE と△DBC の共通な辺 DB を底辺とみると，その高さの比は DE と BC の比に等しい。

ここで，DE : BC = AD : AB = 1 : 3 であるから

△DBE : △DBC = DE : BC

= 1 : 3

(3)　△ADE : △DBC

(1)と(2)の結果から

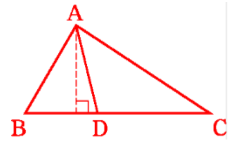
△ADE : △DBE : △DBC = 1 : 2 : 6

したがって　△ADE : △DBC = 1 : 6

3 △ABC において，辺 BC 上に点 D をとって

△ABD : △ACD = AB : AC

となるようにすると，AD は∠A を 2 等分することを証明せよ。



△ABD と△ACD は BD，CD をそれぞれ底辺とみると高さが共通である。

よって

△ABD : △ACD = BD : CD

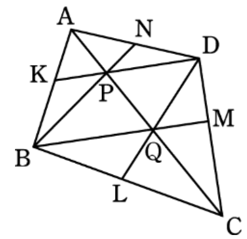
また，仮定より

△ABD : △ACD = AB : AC であるから

BD : CD = AB : AC

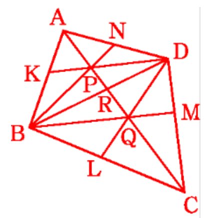
したがって，AD は∠A を 2 等分する。

4 右の図のように，四角形 ABCD の対角線 AC 上に点 P，Q をとり，DP の延長と辺 AB の交点を K, DQ の延長と辺 BC の交点を L, BQ の延長と辺 CD の交点を M，BP の延長と辺 AD の交点を N とする。このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。



$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1$$

四角形 ABCD の対角線 BD を引き，AC との交点を R とする。



△ABD と△CBD において，それぞれチェバの定理により

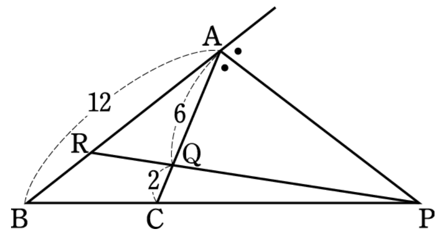
$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BR}{RD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1$$

$$\frac{DR}{RB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} = 1$$

この 2 式の両辺をそれぞれ掛けて

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1$$

5 右の図において，AP は △ABC の頂点 A における外角の二等分線である。このとき，AR の長さを求めよ。



メネラウスの定理により

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$　　……①

ここで　$QA=6$，$CQ=2$　　……②

AP は頂点 A における外角の二等分線であるから

$BP:PC=AB:AC=12:8$

$=3:2$　　……③

$AR=x$ とおくと　　$RB=12-x$　……④

②，③，④を①に代入すると

$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{x}{12-x}=1$

これを解くと　$x=8$

よって，AR の長さは 8 である。