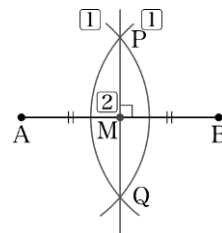


3節 作図

1 基本的な作図

与えられた線分 AB の中点 M を求める手順を考えてみよう。

- ① 2点 A, B を中心として等しい半径の円をかき, その交点を P, Q とする。
- ② 2点 P, Q を通る直線と線分 AB の交点が, 求める中点 M である。

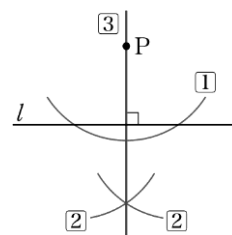


②で引いた直線 PQ は, 線分 AB の垂直二等分線になっている。

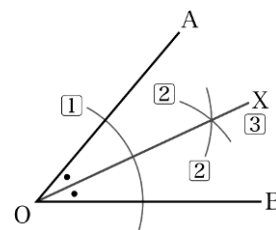
このように, 与えられた2点を通る直線を引く「定規」と, 与えられた点を中心として与えられた半径の円をかき「コンパス」だけを用いて, 条件を満たす図形をかき「作図」という。

次の作図の方法は中学校で学んだ。

- (1) 直線 l 上にない点 P を通り, l に垂直な直線を引く。



- (2) $\angle AOB$ の二等分線 OX を引く。



いろいろな作図

これまでに学んだ基本的な作図を利用して、いろいろな作図について考えてみよう。

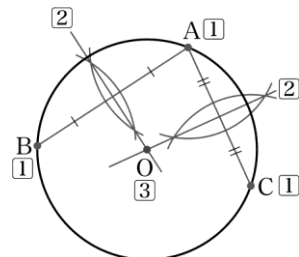
例1 中心がわからない円が与えられたとき、円の中心を求める作図の手順を考えてみよう。

1 与えられた円周上に3点A, B, Cをとる。

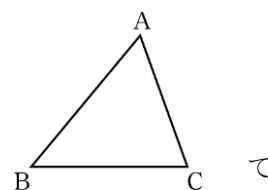
2 弦AB, ACの垂直二等分線を引く。

3 この2本の垂直二等分線の交点をOとする。

このとき、Oは△ABCの外心であるから、求める円の中心である。



問1 与えられた△ABCの外接円を作図せよ。 → p.133 問題10



円Oの外部の点Aから円Oに引いた接線を作図する手順を考えよう。

1 線分AOの中点O'を求め、点O'を中心とし、A, Oを通る円をかく。

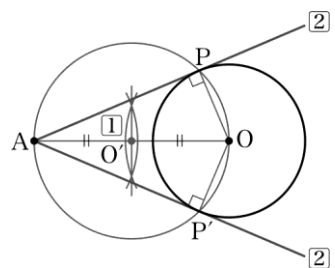
この円と円Oの交点をP, P'とする。

2 直線AP, AP'を引く。

このとき、点P, P'は円O'上の点であり、AOは円O'の直径であるから、円周角の定理により

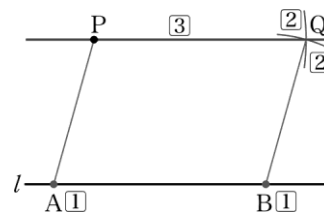
$$OP \perp AP, OP' \perp AP'$$

よって、直線AP, AP'は円Oの接線である。



直線 l 上にない点 P を通り、 l に平行な直線は、次のような手順によって作図することができる。

- ① 直線 l 上に 2 点 A, B をとる。
- ② 点 P を中心とする半径 AB の円と、点 B を中心とする半径 AP の円をかき、この 2 円の交点を Q とする。
- ③ 直線 PQ を引く。



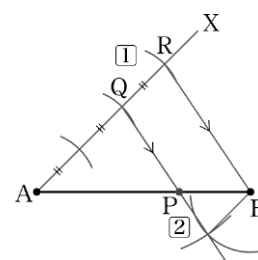
このとき、四角形 $ABQP$ は、 $PQ = AB, AP = BQ$ より、2 組の対辺がそれぞれ等しいから平行四辺形である。

すなわち、直線 PQ は直線 AB に平行である。

m, n を正の整数とすると、与えられた線分を $m : n$ に内分する点は、次のような作図によって求めることができる。

例 2 線分 AB が与えられたとき、線分 AB を $2 : 1$ に内分する点 P を作図する手順を考えてみよう。

- ① 右の図のように、半直線 AX を引き、 AX 上に 2 点 Q, R を $AQ : QR = 2 : 1$ となるようにとる。
- ② 点 Q を通り、直線 RB に平行な直線を引き、線分 AB との交点を P とする。



このとき、 $RB \parallel QP$ であるから

$$AP : PB = AQ : QR = 2 : 1$$

よって、点 P は線分 AB を $2 : 1$ に内分する点である。

問 2 与えられた線分 AB について、次の点を作図することによって求めよ。

- (1) 線分 AB を $1 : 3$ に内分する点
- (2) 線分 AB を $2 : 3$ に内分する点

2 長さの作図

積の長さの作図

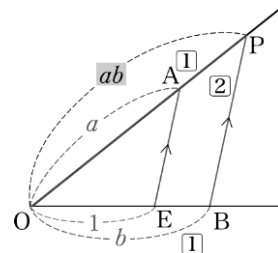
長さ $1, a, b$ の線分が与えられたものとする。このとき、積 ab を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

- 1 右の図のように、 $OE = 1, OA = a, OB = b$ となる点 O, E, A, B をとる。
- 2 点 B を通り、直線 EA に平行な直線を引き、直線 OA との交点を P とする。

このとき、 $OE : OB = OA : OP$ より

$$1 : b = a : OP$$

すなわち、 $OP = ab$ である。



商の長さの作図

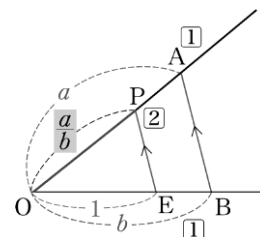
長さ $1, a, b$ の線分が与えられたものとする。このとき、商 $\frac{a}{b}$ を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

- 1 右の図のように、 $OE = 1, OA = a, OB = b$ となる点 O, E, A, B をとる。
- 2 点 E を通り、直線 BA に平行な直線を引き、直線 OA との交点を P とする。

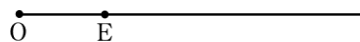
このとき、 $OE : OB = OP : OA$ より

$$1 : b = OP : a$$

すなわち、 $OP = \frac{a}{b}$ である。



- 問 3** 右の図において、 OE の長さを 1 とするとき、上の方法によって、長さ $\frac{4}{3}$ の線分を作図せよ。

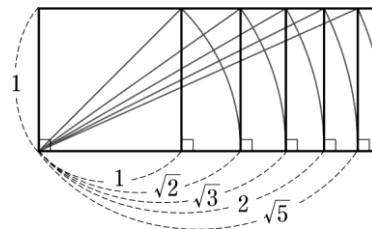


平方根の長さの作図

長さ1と a の線分が与えられたものとする。このとき、 \sqrt{a} を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

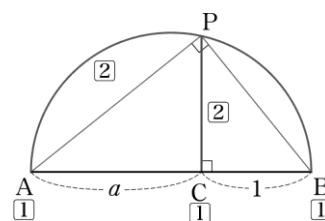
a が簡単な自然数のときには、三平方の定理を利用して、右の図のように、 \sqrt{a} を長さとする線分を作図することができる。

一般に、 \sqrt{a} を長さとする線分は次のような手順によって作図することができる。



1 右の図のように、同一直線上に、 $AC = a$, $CB = 1$ となる3点A, C, Bをとる。

2 ABを直径とする円をかき、点Cを通り直線ABに垂直な直線との交点をPとする。



このとき、 $\triangle ACP$ と $\triangle PCB$ において

$$\angle ACP = \angle PCB = 90^\circ$$

$$\angle APC = 90^\circ - \angle CPB = \angle PBC$$

したがって、 $\triangle ACP \sim \triangle PCB$ である。

ゆえに $AC : CP = CP : CB$

すなわち $CP^2 = AC \cdot CB = a \cdot 1 = a$

よって $CP = \sqrt{a}$

問4 長さ1の線分を定めて、上の方法により、 $\sqrt{5}$ の長さの線分を作図せよ。

→ p.133 問題16

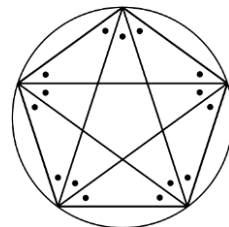
問5 長さ1の線分を定めて、 $3 - \sqrt{2}$ の長さの線分を作図せよ。

参考 正五角形の作図

これまでに学んだことを利用して、正五角形を作図してみよう。

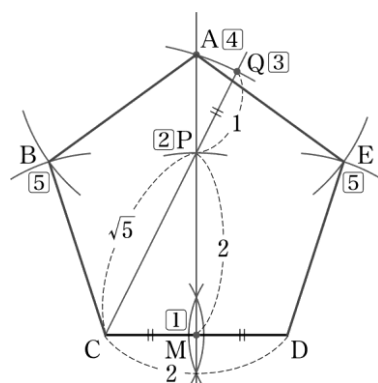
1辺の長さを1とする正五角形の対角線の長さは $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であることが知られている。

よって、長さの比が $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるような2つの線分が作図できれば、正五角形は作図できる。



例1 1辺が2，対角線の長さが $1+\sqrt{5}$ である正五角形を作図する手順を考えてみよう。

- 1** 長さ2の辺CDを定め、CDの垂直二等分線とCDの交点をMとする。
- 2** CDの垂直二等分線上に、 $PM = CD$ となるように点Pをとる。
- 3** CPの延長上に $PQ = CM$ となるように点Qをとる。
- 4** 点Cを中心とする半径CQの円とCDの垂直二等分線の交点をAとする。



このとき、 $CP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ， $CA = CQ = 1 + \sqrt{5}$ である。

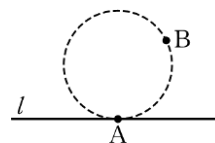
したがって、点Aは正五角形の頂点の1つである。

- 5** $BA = BC = CD$ となる点Bと、 $EA = ED = CD$ となる点EをAMの反対側にとって結ぶと、正五角形ABCDEができる。

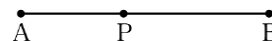
問1 実際に正五角形を作図せよ。

問題

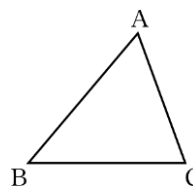
- 10 直線 l 上の点 A において l に接し, l 上でない点 B を通る円を作図する手順を書け。



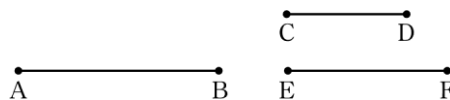
- 11 右の図の線分 AB を斜辺とし, 辺 AC が線分 AP と長さが等しくなるような直角三角形 ABC を作図せよ。



- 12 与えられた $\triangle ABC$ の内接円を作図せよ。



- 13 右の図の線分 AB を, 与えられた線分の長さの比 $CD : EF$ に内分する点 P を作図することによって求めよ。



- 14 与えられた線分 AB について, 次の点を作図することによって求めよ。

- (1) 線分 AB を $4 : 1$ に外分する点 P
 (2) 線分 AB を $1 : 4$ に外分する点 Q

- 15 次の大きさの角を作図せよ。

- (1) 60° (2) 150° (3) 15°

- 16 長さ a, b の線分が与えられたとする。このとき, 縦の長さ, 横の長さがそれぞれ a, b の長方形と等しい面積をもつ正方形を作図せよ。