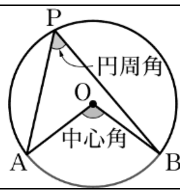
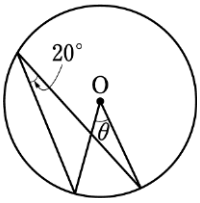
2 節　円の性質

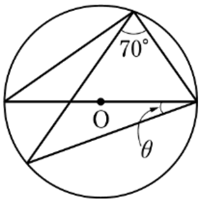
1　円周角の定理

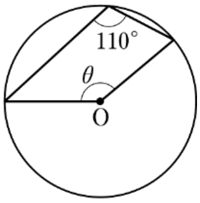
中学校では，次の**円周角の定理**とその逆について学んだ。

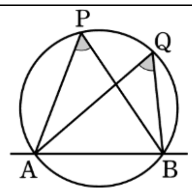
円周角の定理
定理　1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。 

問 1　下の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

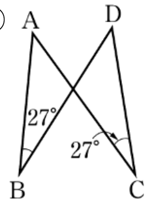
(1) 

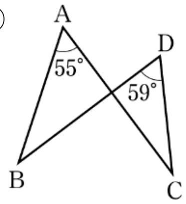
(2) 

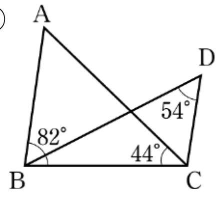
(3) 

円周角の定理の逆
定理　4 点 A，B，P，Q について，P，Q が直線 AB に関して同じ側にあって $\angle APB = \angle AQB$ ならば，この 4 点は同一円周上にある。 

問 2　次のうち，4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるものはどれか。

① 

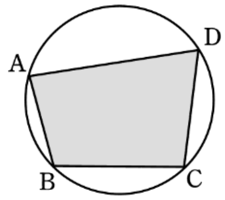
② 

③ 

2　円に内接する四角形

四角形の4頂点が1つの円周上にあるとき，その四角形は円に**内接する**という。三角形は必ず円に内接するが，四角形は円に内接するとは限らない。

円に内接する四角形について，次の定理が成り立つ。

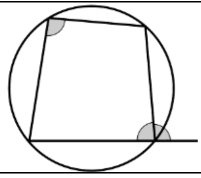


円に内接する四角形

定理　円に内接する四角形では

$\boxed{1}$　対角の和は180°である。

$\boxed{2}$　外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。

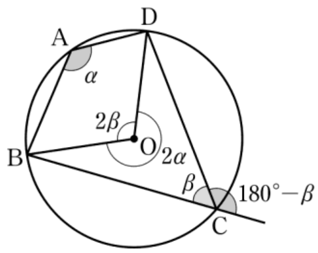


証明　$\boxed{1}$　円に内接する四角形をABCD, $\angle A = \alpha$，$\angle C = \beta$ とする。

円周角の定理により，弧BCDに対する中心角は 2α，弧BADに対する中心角は 2β となる。

$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$ より　$\alpha + \beta = 180^\circ$

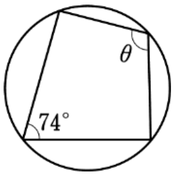
したがって，$\boxed{1}$ が成り立つ。



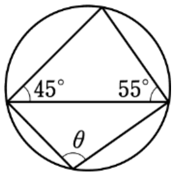
$\boxed{2}$　$\boxed{1}$ より，$\alpha = 180^\circ - \beta$ であるから，$\angle C$ の外角は $\angle A$ に等しい。

問3　下の図において，角 θ を求めよ。

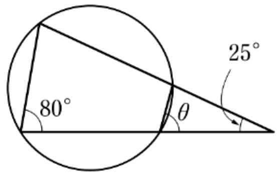
(1)



(2)



(3)

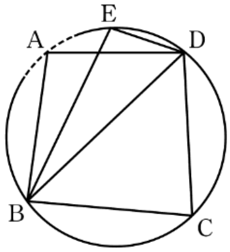


➡ p.126 問題6

前ページの定理は，その逆も成り立つ。

四角形が円に内接する条件
定理　次の $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ のいずれかが成り立つ四角形は円に内接する。 $\boxed{1}$　1 組の対角の和が 180° である。 $\boxed{2}$　1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しい。

証明 $\boxed{1}$　四角形 ABCD において，$\angle A+\angle C=180^\circ$ とする。



△BCD の外接円をかき，BD に関して C と反対側の円周上に点 E をとる。

四角形 BCDE は円に内接するから

$$\angle C+\angle BED=180^\circ$$

一方，仮定より

$$\angle C+\angle BAD=180^\circ$$

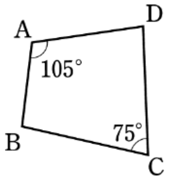
よって，$\angle BED=\angle BAD$ となり，円周角の定理の逆により，4 点 B，D，A，E は同一円周上にある。

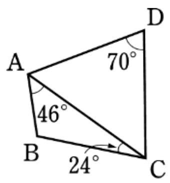
ここで，△BDE の外接円は△BCD の外接円でもあるから，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあることになり，四角形 ABCD は円に内接する。

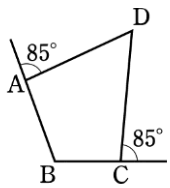
$\boxed{2}$　四角形 ABCD において，∠C の外角が，∠C の対角 ∠A に等しいとすると，$\angle A=180^\circ-\angle C$ が成り立つ。

このとき，$\angle A+\angle C=180^\circ$ となり，$\boxed{1}$ の場合に一致する。

問 4　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか。

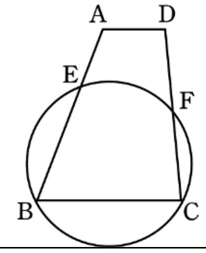
①


②


③


例題１　四角形が円に内接する条件

AD // BC である台形 ABCD がある。この台形の頂点 B, C を通る円が，点 E, F で辺 AB, CD とそれぞれ交わるとする。
このとき，4 点 A, D, E, F は同一円周上にあることを証明せよ。



証明　四角形 BCFE は円に内接するから

$\angle B = \angle EFD$　…①

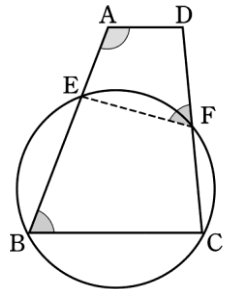
また，AD // BC より

$\angle B + \angle A = 180^\circ$　…②

①，②より

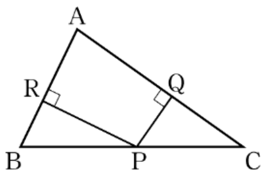
$\angle EFD + \angle A = 180^\circ$

よって，四角形 AEFD の 1 組の対角の和が 180° であるから，四角形 AEFD は円に内接する。
したがって，4 点 A, D, E, F は同一円周上にある。



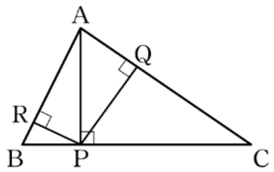
問 5　△ABC の辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R をとり，PQ ⊥ CA, PR ⊥ AB とする。
このとき，次の問に答えよ。

(1)　4 点 A, R, P, Q は同一円周上にあることを証明せよ。



(2)　点 P が AP ⊥ BC を満たすとき，4 点 B, C, Q, R は同一円周上にあることを証明せよ。

➡ p.126 問題7

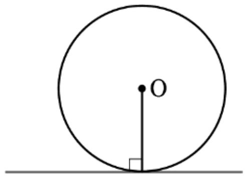


3　接線と弦のつくる角

円の接線

円の接線が接点を通る半径に垂直であることは中学校で学んだ。

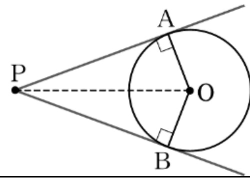
ある円に対して，円の外部の点からは 2 本の接線が引ける。このとき，次の定理が成り立つ。



接線の長さ

定理　円の外部の 1 点 P からその円に引いた 2 本の接線において，点 P から 2 つの接点 A, B までの距離は等しい。

すなわち　　$PA = PB$



円外の点から接点までの距離を**接線の長さ**という。

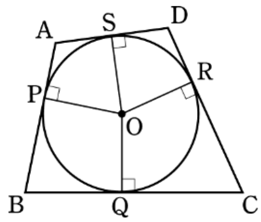
例 1　右の図のように，四角形 ABCD の 4 辺が，P, Q, R, S で円 O に接しているとき, 2 組の対辺の長さの和が等しいことを示してみよう。

$AP = AS,\ BP = BQ$

$CQ = CR,\ DR = DS$

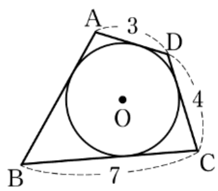
であるから

$$\begin{aligned} AB + DC &= (AP + BP) + (DR + CR) = (AS + BQ) + (DS + CQ) \\ &= (AS + DS) + (BQ + CQ) = AD + BC \end{aligned}$$



問 6　右の図のように，四角形 ABCD の 4 辺が円 O に接しているとき，辺 AB の長さを求めよ。

➡ p.126 問題8

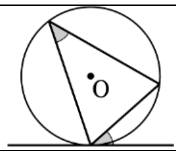


接線と弦のつくる角

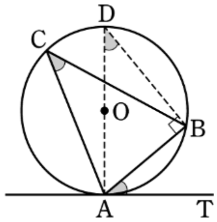
円の接線と接点を通る弦のつくる角について，次の定理が成り立つ。

接線と弦のつくる角

定理　円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



証明　右の図のように，円 O 上の点 A における接線を AT，A を通る弦を AB として，∠BAT が鋭角のとき ∠BAT = ∠ACB を証明する。



直径 AD を引くと，∠DAT は直角であるから

$$\angle BAT = 90^\circ - \angle DAB$$

一方，AD は直径であるから，∠ABD も直角であり

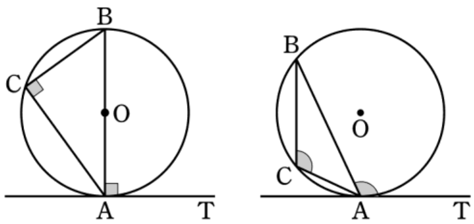
$$\angle ADB = 90^\circ - \angle DAB$$

よって　　$\angle BAT = \angle ADB$

∠ACB と ∠ADB はいずれも弧 AB に対する円周角であるから

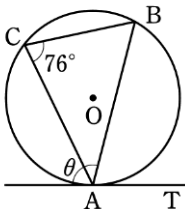
$\angle ACB = \angle ADB$　　よって　　$\angle BAT = \angle ACB$

∠BAT が直角，鈍角の場合も同様に定理は成り立つ。

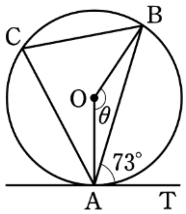


問 7　下の図において，AT は円 O の接線，A は接点である。角 θ を求めよ。

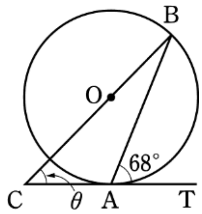
(1)



(2)



(3)

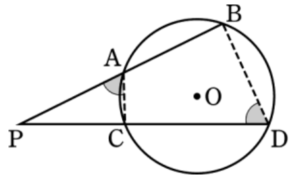


4　方べきの定理

点 P と円 O が与えられたとき, P を通る 2 直線と円 O の 4 つの交点について考えてみよう。
点 P とこれらの点の間の距離には，次の**方べきの定理**が成り立つ。

方べきの定理(1)
定理　点 P を通る 2 直線が，円 O とそれぞれ 2 点 A，B と 2 点 C，D で交わるとき $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

$\boxed{\text{証明}}$　(i)　点 P が円 O の外部にあるとき△PAC と△PDB において，円に内接する四角形の定理により



$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PDB}$

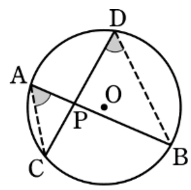
また，$\angle\mathrm{P}$ は共通である。

したがって　$\triangle\mathrm{PAC}\backsim\triangle\mathrm{PDB}$

よって　$\mathrm{PA}:\mathrm{PD}=\mathrm{PC}:\mathrm{PB}$

すなわち　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

(ii)　点 P が円 O の内部にあるとき△PAC と△PDB において，円周角の定理により



$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PDB}$

また，対頂角は等しいから

$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{DPB}$

したがって　$\triangle\mathrm{PAC}\backsim\triangle\mathrm{PDB}$

よって　$\mathrm{PA}:\mathrm{PD}=\mathrm{PC}:\mathrm{PB}$

すなわち　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

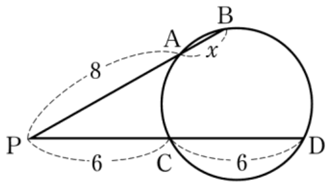
例 2 右の図において，AB の長さ x を求めてみよう。

方べきの定理により

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$

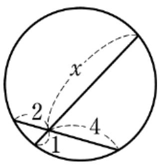
よって $8(x+8)=6(6+6)$

これより $x=1$

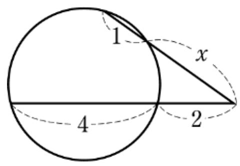


問 8 下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)



方べきの定理(2)
定理 点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A，B で交わり，もう一方が点 T で接するとき $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

証明 T と A，T と B を結ぶ。△PTA と△PBT において，接線と弦のつくる角の定理により

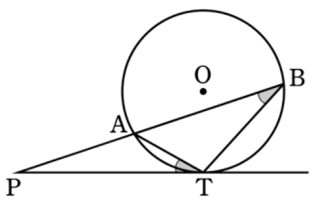
$$\angle\mathrm{PTA}=\angle\mathrm{PBT}$$

また，∠P は共通である。

したがって $\triangle\mathrm{PTA}\backsim\triangle\mathrm{PBT}$

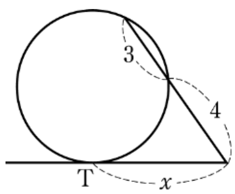
よって $\mathrm{PA}:\mathrm{PT}=\mathrm{PT}:\mathrm{PB}$

すなわち $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

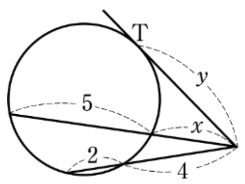


問 9 下の図において，x，y を求めよ。ただし，T は接点とする。

(1)



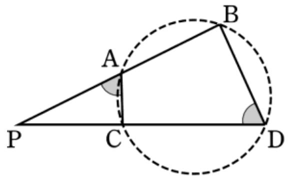
(2)

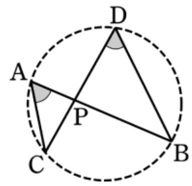


方べきの定理(1)は，その逆も成り立つ。

方べきの定理(1)の逆

定理 2つの線分 AB，CD，またはそれぞれの延長が1点 P で交わっているとき，$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ならば，4点 A，B，C，D は同一円周上にある。





$\boxed{\text{証明}}$ $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ より

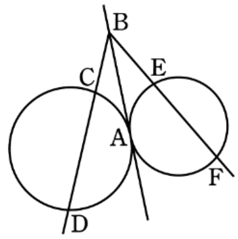
$$PA : PD = PC : PB$$

また，$\angle APC = \angle DPB$ であるから

$$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$$

よって　　$\angle CAP = \angle BDP$

したがって，4点 A，B，C，D は同一円周上にある。



$\boxed{\text{問 10}}$ 2つの円が点 A で同じ直線に接している。
この直線上の A と異なる点 B を通る2本の直線と，2円との2つの交点をそれぞれ C，D および E，F とする。このとき，4点 C，D，E，F は同一円周上にあることを証明せよ。

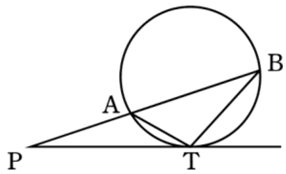
方べきの定理(2)についても，その逆は成り立つ。

方べきの定理(2)の逆

定理 一直線上にない3点 A，B，T と線分 BA の延長上の1点を P とするとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$

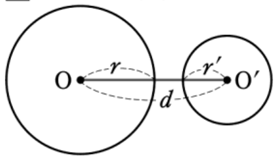
が成り立つならば，PT は3点 A，B，T を通る円に接する。



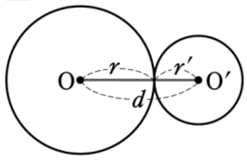
5　２つの円

　半径の異なる2つの円の位置関係については，右の図のように5通りの場合が考えられる。

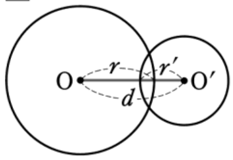
$\boxed{1}$　互いに外部にある



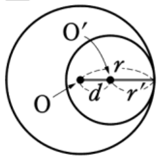
$\boxed{2}$　外接する



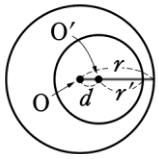
$\boxed{3}$　2点で交わる



$\boxed{4}$　内接する



$\boxed{5}$　一方が他方を含む

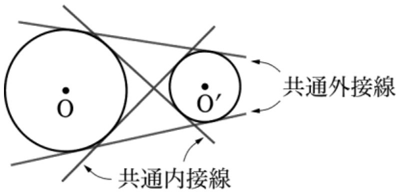


　$\boxed{2}$のような場合には2円は**外接する**といい，$\boxed{4}$のような場合には2円は**内接する**という。
いずれの場合も2円は1点を共有しており，その点を**接点**という。このとき，接点は2つの円の中心を通る直線上にある。

　2つの円の位置関係は，それらの円の半径r，r'と中心間の距離dとの関係で定まる。ただし，$r > r'$とする。

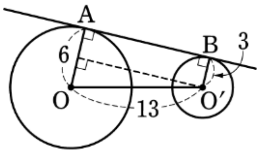
$\boxed{1}$	$d > r + r'$	共有点はなし
$\boxed{2}$	$d = r + r'$	共有点は1個
$\boxed{3}$	$r - r' < d < r + r'$	共有点は2個
$\boxed{4}$	$r - r' = d$	共有点は1個
$\boxed{5}$	$r - r' > d$	共有点はなし

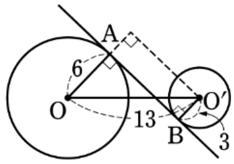
　また，1本の直線が2つの円の両方の接線となることがある。このような接線を2円の**共通接線**という。共通接線には，その接線に対して同じ側に2円がある**共通外接線**と，反対側に2円がある**共通内接線**の2種類がある。



$\boxed{\text{問 11}}$　共通接線の本数は，前ページの 5 つの位置関係でどのように変わるか。

$\boxed{\text{問 12}}$　下の図において，直線 AB は 2 つの円の共通接線で，A，B は接点である。
このとき，線分 AB の長さを求めよ。

(1) 

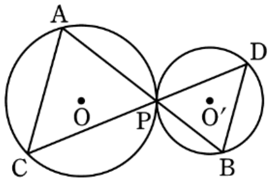
(2) 

応用例題 2　2 つの円

点 P で 2 つの円が外接している。点 P を通る 2 本の直線がそれぞれの円と点 A，B および C，D で交わるとき

$$AC \mathbin{/\!/} BD$$

となることを証明せよ。



証明　右の図のように，点 P を通る共通接線 TPT′を引くと，接線と弦のつくる角の定理により

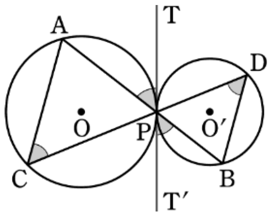
$$\angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{APT}$$
$$\angle \mathrm{BDP} = \angle \mathrm{BPT'}$$

ここで，$\angle \mathrm{APT} = \angle \mathrm{BPT'}$であるから

$$\angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{BDP}$$

よって，錯角が等しいから

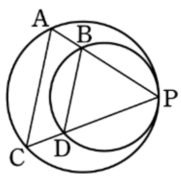
$$AC \mathbin{/\!/} BD$$



$\boxed{\text{問 13}}$　例題 2 において，2 つの円が点 P で内接しているときにも

$$AC \mathbin{/\!/} BD$$

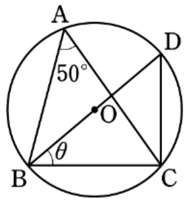
となることを証明せよ。



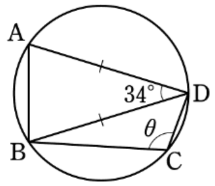
問題

6　下の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。
また，(2)では $\mathrm{AD}=\mathrm{BD}$ とする。

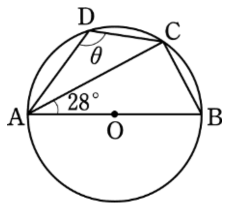
(1)



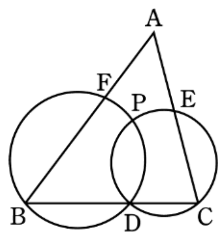
(2)



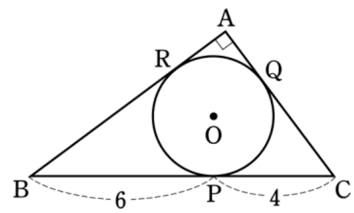
(3)



7　△ABC の辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 D, E, F がある。3点 B, D, F および C, D, E を通る 2 つの円が，右の図のように，△ABC の内部の点 P で交わっているとき，4 点 A, E, F, P は同一円周上にあることを証明せよ。

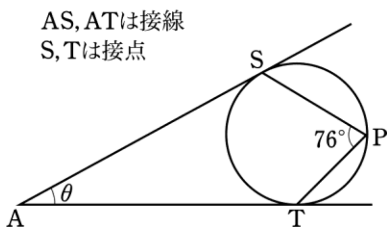


8　右の図において，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P, Q, R は接点である。
BP = 6, CP = 4 のとき，円 O の半径を求めよ。



9　下の図において，角 θ を求めよ。

(1)



(2)