3 章　図形の性質

数学は科学の女王である。

19 世紀前半の最大の数学者。
ドイツの貧しい家に生まれる。
幼少から計算にすばらしい才能を示し，数学の各方面に不朽の貢献をした。
18 歳のある朝，目覚めとともに，定規とコンパスによる正十七角形の作図が可能であることを発見したのが，数学の道に進む機縁になったと伝えられる。

1 節　三角形の性質

1　三角形と比

三角形における比の性質については，中学校で次のことを学んだ。

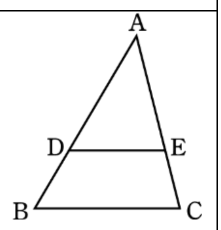
三角形と比

定理　△ABC の辺 AB，AC 上に，それぞれ点 D，E があるとき

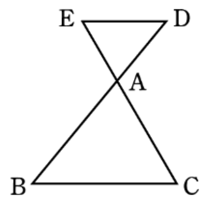
$\boxed{1}$ $DE \mathbin{/\!/} BC \Leftrightarrow AD:AB = AE:AC$

$\boxed{2}$ $DE \mathbin{/\!/} BC \Leftrightarrow AD:DB = AE:EC$

$\boxed{3}$ $DE \mathbin{/\!/} BC \Leftrightarrow AD:AB = DE:BC$



注意　$\boxed{3}$ において，その逆は成り立たない。



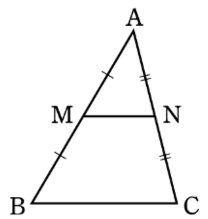
上の定理は，点 D，E が辺 AB，AC の延長上にあるときでも成り立つ。

また，とくに，D と E がそれぞれ AB，AC の中点であるときには，次の中点連結定理が成り立つ。

中点連結定理

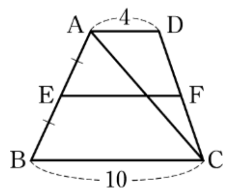
定理　△ABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき

$MN \mathbin{/\!/} BC,\quad MN = \frac{1}{2}BC$



問 1　$AD = 4$，$BC = 10$，$AD \mathbin{/\!/} BC$ の台形 ABCD において，辺 AB の中点 E から辺 BC に平行な直線を引き，辺 CD との交点を F とする。EF の長さを求めよ。

→ p.114 問題1，2



内分と外分

　$m,\ n$ は正の数とする。

　線分 AB 上に点 P があり

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$$

が成り立つとき，P は AB を $m:n$ に**内分**するという。

　また，線分 AB の延長上に点 Q があり

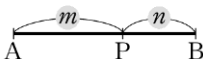
$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=m:n$$

が成り立つとき，Q は AB を $m:n$ に**外分**するという。

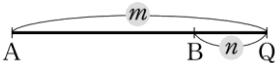
　外分の場合，m と n の大小関係により，Q の位置は上の図のようになる。

　なお，線分を $1:1$ に外分する点はない。

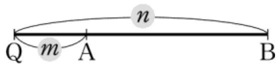
内分



外分　$m>n$ のとき

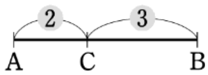


外分　$m<n$ のとき

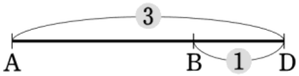


例 1　線分 AB に対して，次のように内分する点，外分する点を図示してみよう。

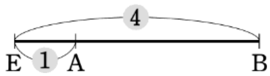
(1)　AB を $2:3$ に内分する点 C



(2)　AB を $3:1$ に外分する点 D



(3)　AB を $1:4$ に外分する点 E



問 2　線分 AB を引き，その線分について次の点を図示せよ。

(1)　AB を $3:1$ に内分する点 C

(2)　BA を $3:1$ に内分する点 D

(3)　AB を $5:1$ に外分する点 E

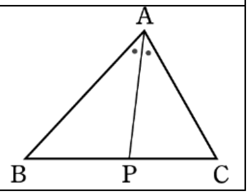
(4)　AB を $2:3$ に外分する点 F

三角形の内角と外角の二等分線

内角の二等分線と比

定理　△ABC の ∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると，P は BC を AB: AC に内分する。

すなわち　　BP: PC ＝ AB: AC



証明　頂点 C を通り AP に平行な直線を引き，BA の延長との交点を D とすると

∠ACD ＝ ∠CAP　　◀錯角

∠ADC ＝ ∠BAP　　◀同位角

ここで，∠BAP ＝ ∠CAP であるから

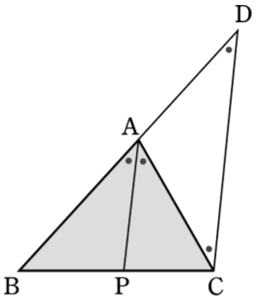
∠ACD ＝ ∠ADC

よって，ΔACD は二等辺三角形であるから

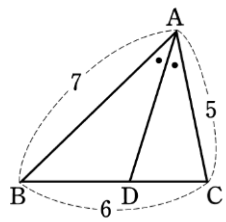
AC ＝ AD　　……①

また，PA ∥ CD より　　BP: PC ＝ BA: AD　　……②

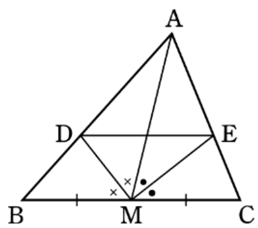
①，②より　　BP: PC ＝ AB: AC



問 3　△ABC において，∠A の二等分線と対辺 BC との交点を D とする。AB ＝ 7，AC ＝ 5，BC ＝ 6 のとき，BD の長さを求めよ。



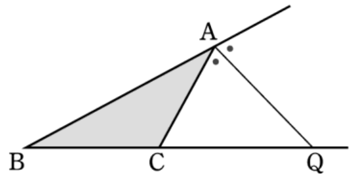
問 4　△ABC の辺 BC の中点を M とし，∠AMB，∠AMC の二等分線と辺 AB，AC との交点をそれぞれ D，E とする。このとき，DE ∥BC であることを証明せよ。



外角の二等分線と比

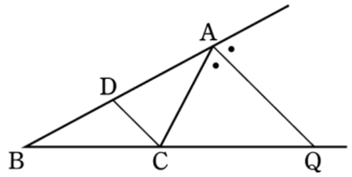
定理　△ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすると，Q は BC を AB: AC に外分する。

すなわち　　BQ: QC = AB: AC

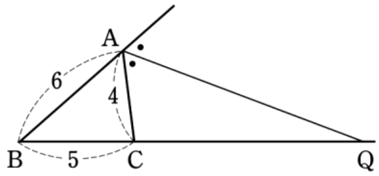


$\boxed{\text{注意}}$　AB = AC のときは，外角の二等分線は辺 BC と平行になる。

$\boxed{\text{問 5}}$　上の図において，頂点 C を通って AQ に平行な直線を引き，AB との交点を D とする。これを利用して，上の定理を証明せよ。



$\boxed{\text{問 6}}$　△ABC において，辺 AB, BC, CA の長さをそれぞれ 6, 5, 4 とする。頂点 A における外角の二等分線と BC の延長との交点を Q とするとき，CQ の長さを求めよ。



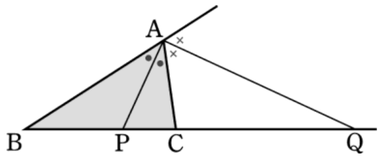
前ページの定理と上の定理は，その逆も成り立つことが知られている。

角の二等分線と比の定理の逆

定理　△ABC において，辺 BC を AB: AC に内分，外分する点をそれぞれ P, Q とすると

$\boxed{\mathbf{1}}$　AP は頂点 A における内角を 2 等分する。

$\boxed{\mathbf{2}}$　AQ は頂点 A における外角を 2 等分する。



2　三角形の重心・外心・垂心・内心

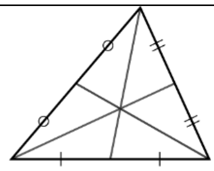
三角形の重心

三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を**中線**という。

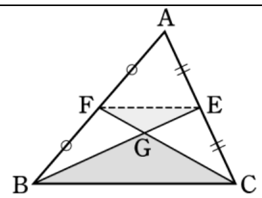
三角形の重心

定理　三角形の3本の中線は1点で交わる。

その交点は，それぞれの中線を $2:1$ に内分する。



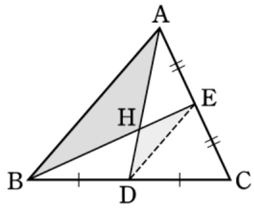
証明　△ABC において, 2本の中線 BE と CF の交点を G とする。E, F はそれぞれ辺 AC, AB の中点であるから



$EF \parallel BC$　かつ　$BC = 2EF$

よって　$BG : GE = CG : GF = 2 : 1$

一方，2本の中線 BE と AD の交点を H とすると，同様に



$DE \parallel AB$　かつ　$AB = 2DE$

であるから　　$BH : HE = AH : HD = 2 : 1$

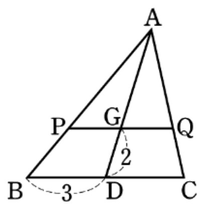
よって, G と H はともに中線 BE を $2:1$ に内分するから一致する。

したがって，3本の中線は1点 G で交わり，G はそれぞれの中線を $2:1$ に内分する。

三角形の3本の中線の交点を，その三角形の**重心**という。

問 7　右の図において，点 G は△ABC の重心で，線分 PQ は G を通り辺 BC に平行である。

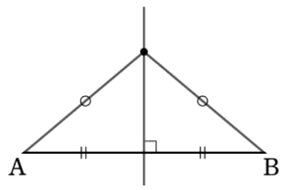
$BD = 3$，$GD = 2$ のとき，AG, GQ の長さをそれぞれ求めよ。



三角形の外心

線分 AB の垂直二等分線上の点は，両端 A，B から等距離にある。逆に，両端 A，B から等距離にある点は AB の垂直二等分線上にある。

このことを用いて，次の定理を導いてみよう。



三角形の外心
定理　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

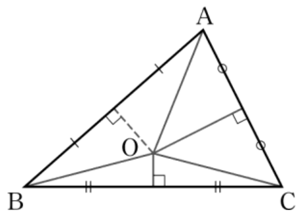
証明　△ABC において，2 辺 BC，CA の垂直二等分線の交点を O とすると

$OB = OC$　かつ　$OC = OA$

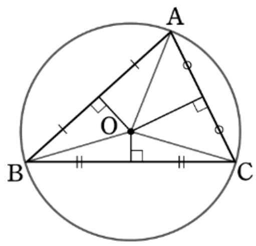
であるから　$OA = OB$

よって，O は辺 AB の垂直二等分線上にある。

したがって，3 辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。

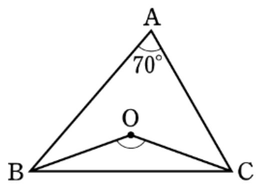


上の証明より，$OA = OB = OC$ であるから，点 O は 3 つの頂点から等距離にある。よって，O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができる。この円を三角形の**外接円**といい，その中心 O を三角形の**外心**という。



問 8　右の図において，点 O は△ABC の外心である。

このとき，∠BOC の大きさを求めよ。

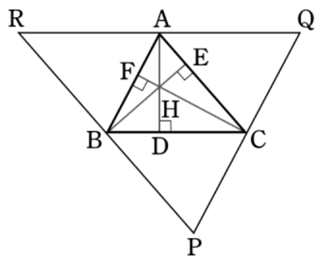


問 9　∠A が直角の直角三角形 ABC の外心の位置はどこか。

三角形の垂心

前ページの三角形の外心の定理を用いると，次の定理が成り立つことがわかる。

三角形の垂心
定理　三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わる。



証明　△ABCの頂点A，B，Cから対辺，またはその延長にそれぞれ垂線AD，BE，CFを下ろす。
また，頂点A，B，Cを通り，それぞれの対辺に平行な直線の各交点を，右の図のようにP，Q，Rとする。
BC∥RA，AC∥RBより，
四角形ARBCは平行四辺形であるから　BC = RA
同様に，四角形ABCQは平行四辺形であるから　BC = AQ
よって　RA = AQ　……①
また，BC∥RQ，AD⊥BCより
AD⊥RQ　……②
①，②より，ADは△PQRの辺QRの垂直二等分線である。
同様に，BE，CFは，それぞれ辺RP，PQの垂直二等分線である。
三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わるから，3本の垂線AD，BE，CFは1点Hで交わる。

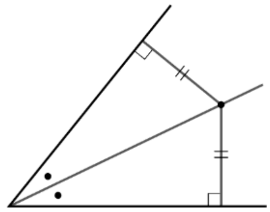
三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線の交点を，その三角形の**垂心**という。

問10　辺ABを斜辺とする直角三角形ABCの垂心の位置はどこか。

三角形の内心

角の二等分線上の点は, 角をつくる 2 辺から等距離にある。逆に, 2 辺から等距離にある点は，角の二等分線上にある。

このことを用いて，次の定理を導いてみよう。



三角形の内心
定理　三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。

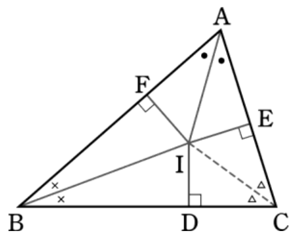
証明　△ABC において, ∠A と ∠B の二等分線の交点を I とする。
I から辺 BC, CA, AB にそれぞれ垂線 ID, IE, IF を下ろすと

IE = IF　かつ　IF = ID

であるから　　ID = IE

よって，I は ∠C の二等分線上にある。

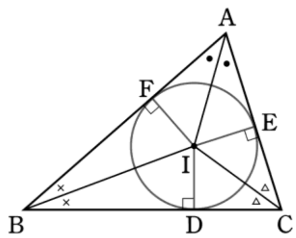
したがって，3 つの内角の二等分線は 1 点 I で交わる。



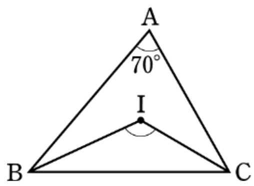
上の証明より, ID = IE = IF であるから, 点 I は 3 点 D, E, F から等距離にある。

よって, I を中心として D, E, F を通る円をかくことができる。この円は三角形の 3 辺に接しているから，三角形の**内接円**といい，その中心 I を三角形の**内心**という。

内心は 3 辺からの距離が等しい点である。

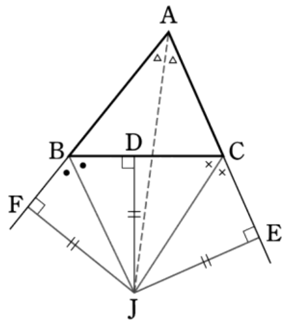


問 11　右の図において，点 I は△ABC の内心である。このとき，∠BIC の大きさを求めよ。



参考　三角形の傍心

三角形の 1 つの内角の二等分線と, 他の 2 つの頂点における外角の二等分線は 1 点で交わる。このことを証明してみよう。



証明　右の図のように，頂点 B，C における外角の二等分線の交点を J とするとき，AJ が ∠A の二等分線であることを示す。J から辺 BC，さらに辺 AC，AB の延長にそれぞれ垂線 JD，JE，JF を下ろす。

このとき

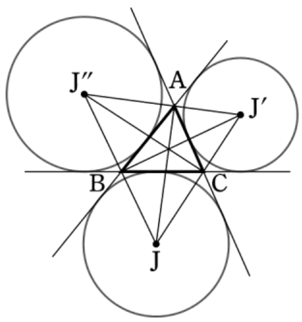
JF = JD　かつ　JE = JD

であるから

JF = JE

よって，J は ∠A の二等分線上にある。

∠B，∠C についても同様に証明できる。



上の証明における交点 J を△ABC の ∠A に対する**傍心**という。この傍心 J は，頂点 B，C における外角の二等分線上にあるから，J を中心にして BC および AB，AC の延長線に接する円をかくことができる。この円を，△ABC の ∠A に対する**傍接円**という。

右の図のように，△ABC の ∠B，∠C に対する傍心と傍接円もそれぞれ 1 つずつある。

注意　三角形の重心，外心，垂心，内心，傍心を合わせて**三角形の五心**という。

問 1　△ABC の 3 つの傍心をそれぞれ J，J′，J″ とするとき，△JJ′J″ の垂心は，△ABC の内心と一致することを示せ。

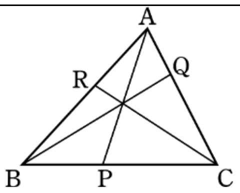
3　三角形の比の定理

三角形の頂点から対辺に引いた 3 直線について，次の**チェバの定理**が成り立つ。[*]

チェバの定理

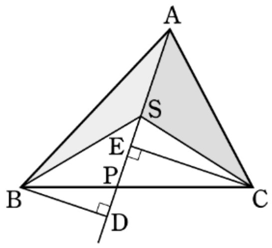
定理　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$



証明　3 直線の交点を S とする。B，C から直線 AP に垂線 BD，CE を下ろし，△ABS と△ACS において，AS を底辺と考えると

$$\frac{\triangle\mathrm{ABS}}{\triangle\mathrm{ACS}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CE}}$$



一方，BD∥CE より，$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CE}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CP}}$ で

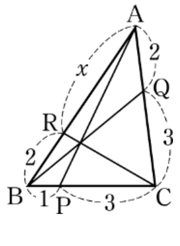
あるから，$\frac{\triangle\mathrm{ABS}}{\triangle\mathrm{ACS}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CP}}$ が成り立つ。

同様に，$\frac{\triangle\mathrm{BCS}}{\triangle\mathrm{ABS}}=\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}$，$\frac{\triangle\mathrm{CAS}}{\triangle\mathrm{BCS}}=\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}$ が成り立つから

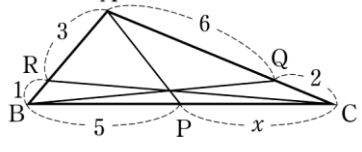
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{ABS}}{\triangle\mathrm{CAS}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{BCS}}{\triangle\mathrm{ABS}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{CAS}}{\triangle\mathrm{BCS}}=1$$

問 12　下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)

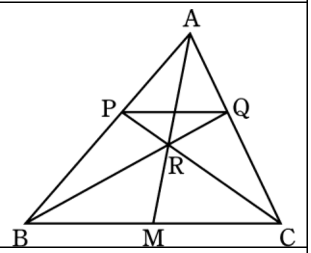


---

[*]チェバの定理は，P，Q，R のうちのいずれか 2 点がそれぞれ辺 BC，CA，AB の延長上にある場合にも成り立つ。

例題１　チェバの定理の利用

△ABC において，PQ // BC となるように点 P，Q をそれぞれ辺 AB，AC 上にとり，線分 PC と QB の交点を R とする。線分 AR の延長と辺 BC との交点を M とするとき，M が BC の中点であることを証明せよ。



証明　△ABC の辺上の点 M，Q，P について，チェバの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=1 \qquad \cdots\cdots①$$

また，PQ // BC より　$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}$　……②

②を①に代入して　$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}=1$

よって　$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}=1$

したがって，BM = MC となり，M は BC の中点である。

問 13　△ABC の辺 BC の中点を M とする。線分 AM 上に点 R をとり，CR の延長と辺 AB との交点を P，BR の延長と辺 AC との交点を Q とする。
このとき，PQ // BC であることを証明せよ。　➡ p.114 問題4

チェバの定理は，その逆も成り立つことが知られている。

チェバの定理の逆

定理　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

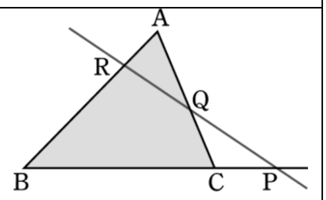
が成り立てば，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。

一直線上の 3 点について，次の**メネラウスの定理**が成り立つ。

メネラウスの定理

定理　ある直線が△ABC の辺 BC，CA，AB，またはその延長と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

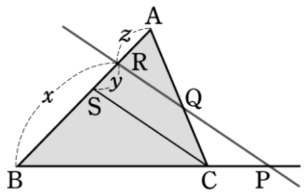


$\boxed{\text{証明}}$　点 C を通って PQ に平行な直線を引き，AB との交点を S とする。

RB $= x$，RS $= y$，AR $= z$ と表すと

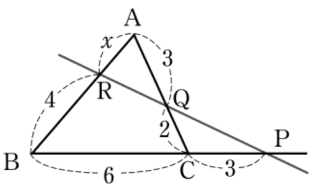
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{x}{y},\quad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{y}{z},\quad \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{z}{x}$$

よって　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y}{z}\cdot\dfrac{z}{x}=1$

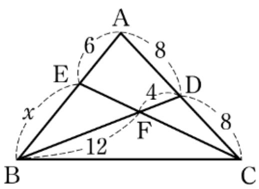


$\boxed{\text{問 14}}$　下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)



メネラウスの定理は，その逆も成り立つことが知られている。

メネラウスの定理の逆

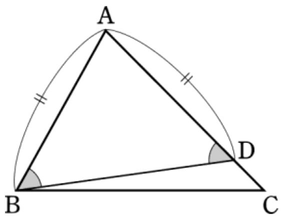
定理　△ABC の辺 BC，CA，AB，またはその延長上にそれぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうち 1 つまたは 3 つが辺の延長上にあるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

が成り立てば，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

参考　辺と角の大小関係

△ABC において，辺 AB と AC が等しければ，この三角形は二等辺三角形であり，∠B と ∠C は等しい。AB と AC が等しくないとき，それぞれの辺に対する角の大小関係がどうなるかを考えてみよう。



$AB < AC$ の場合は，辺 AC 上に，$AB = AD$ となるように点 D をとることができる。このとき，△ABD は二等辺三角形となり，$\angle ABD = \angle ADB$ である。

よって

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$$
$$= \angle ADB + \angle CBD$$

∠ADB は△BCD の ∠BDC の外角であるから

$$\angle ADB = \angle C + \angle CBD$$

ゆえに　$\angle ABC = \angle C + \angle CBD + \angle CBD > \angle C$

となる。

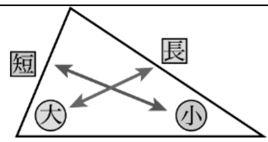
すなわち，$AB < AC$ ならば $\angle C < \angle B$ が成り立つ。

また，このことの逆，すなわち，$\angle C < \angle B$ ならば $AB < AC$ も成り立つことが知られている。

以上より，次の定理が成り立つ。

辺と角の大小関係

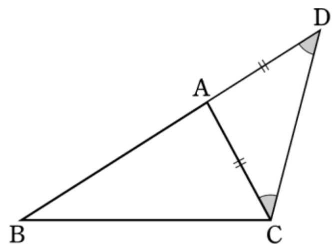
定理　三角形において，長い辺に対する角は，短い辺に対する角より大きい。
また，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より長い。



　辺と角の大小関係を用いると，三角形の 3 辺の長さについて，次の関係を示すことができる。

三角形の 3 辺の長さの関係
定理　三角形において $\boxed{1}$　2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きい。 $\boxed{2}$　2 辺の長さの差は，他の 1 辺の長さより小さい。

証明　$\boxed{1}$を証明する。△ABC において，辺 AB と AC の長さの和が，辺 BC の長さより大きいことを示す。



辺 BA の延長上に，AD = AC となるように点 D をとることができる。

このとき，辺 AB と AC の和は

$$AB + AC = AB + AD = BD$$

となる。

△ACD は二等辺三角形であるから　　$\angle ACD = \angle D$

よって

$$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = \angle BCA + \angle D > \angle D$$

△BCD において，$\angle BCD > \angle D$ であるから，辺と角の大小関係により $BD > BC$ となる。

したがって，$BD = AB + AC$ であるから

$$AB + AC > BC$$

が成り立つ。

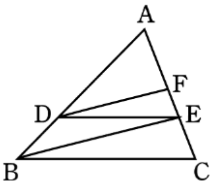
同様に，$AC + BC > AB$，$AB + BC > AC$ も成り立つ。

問 1　上の定理の$\boxed{2}$を証明せよ。

問題

1　右の図において，BC // DE，BE // DF のとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

$$AE^2 = AF \cdot AC$$

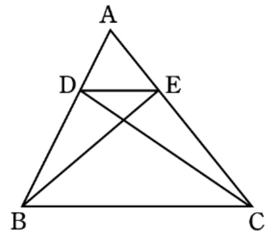


2　右の図において，DE // BC，AD : DB = 1 : 2 とする。次の比を求めよ。

(1)　△ADE :△DBE

(2)　△DBE :△DBC

(3)　△ADE :△DBC



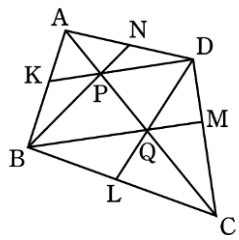
3　△ABC において，辺 BC 上に点 D をとって

△ABD :△ACD = AB : AC

となるようにすると，AD は ∠A を 2 等分することを証明せよ。

4　右の図のように，四角形 ABCD の対角線 AC 上に点 P，Q をとり，DP の延長と辺 AB の交点を K，DQ の延長と辺 BC の交点を L，BQ の延長と辺 CD の交点を M，BP の延長と辺 AD の交点を N とする。このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1$$



5　右の図において, AP は△ABC の頂点 A における外角の二等分線である。このとき，AR の長さを求めよ。