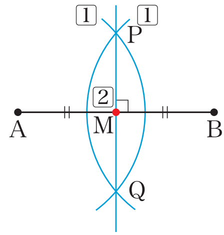
3節 作図

1 基本的な作図

与えられた線分 AB の中点Mを求める手順を考えてみよう。

1　2点 A，B を中心として等しい半径の円をかき，その交点を P，Q とする。

2　2点 P，Q を通る直線と線分 AB の交点が，求める中点Mである。

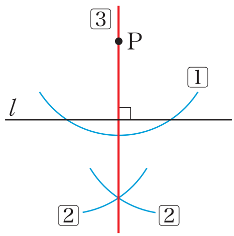


2 で引いた直線 PQ は，線分 AB の垂直二等分線になっている。

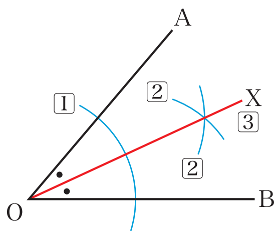
このように，与えられた2点を通る直線を引く「定規」と，与えられた点を中心として与えられた半径の円をかく「コンパス」だけを用いて，条件を満たす図形をかくことを **作図** という。

次の作図の方法は中学校で学んだ。

(1)　直線 l 上にない点Pを通り，l に垂直な直線を引く。



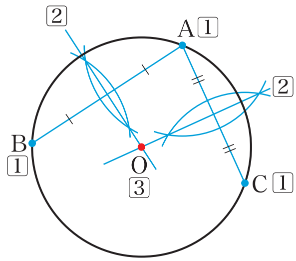
(2)　∠AOB の二等分線 OX を引く。



いろいろな作図

これまでに学んだ基本的な作図を利用して，いろいろな作図について考えてみよう。

例 1　中心がわからない円が与えられたとき，円の中心を求める作図の手順を考えてみよう。



$\boxed{1}$　与えられた円周上に3点A，B，Cをとる。

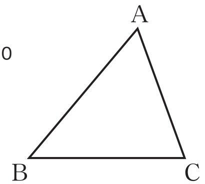
$\boxed{2}$　弦AB, ACの垂直二等分線を引く。

$\boxed{3}$　この2本の垂直二等分線の交点をOとする。

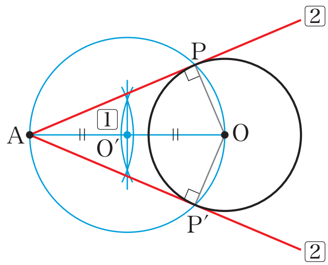
このとき，Oは△ABCの外心であるから，求める円の中心である。

問 1　与えられた△ABCの外接円を作図せよ。

→ p.133 問題10



円Oの外部の点Aから円Oに引いた接線を作図する手順を考えてみよう。



$\boxed{1}$　線分AOの中点O′を求め，点O′を中心とし，A，Oを通る円をかく。この円と円Oの交点をP，P′とする。

$\boxed{2}$　直線AP，AP′を引く。

このとき，点P, P′は円O′上の点であり，AOは円O′の直径であるから，円周角の定理により

$$OP \perp AP, \qquad OP' \perp AP'$$

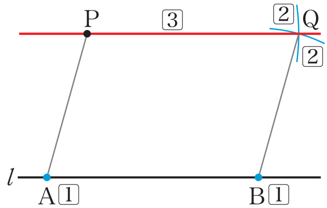
よって，直線AP，AP′は円Oの接線である。

直線 l 上にない点Pを通り，l に平行な直線は，次のような手順によって作図することができる。

$\boxed{1}$　直線 l 上に2点A，Bをとる。

$\boxed{2}$　点Pを中心とする半径ABの円と，点Bを中心とする半径APの円をかき，この2円の交点をQとする。

$\boxed{3}$　直線PQを引く。



このとき，四角形ABQPは，PQ = AB，AP = BQ より，2組の対辺がそれぞれ等しいから平行四辺形である。

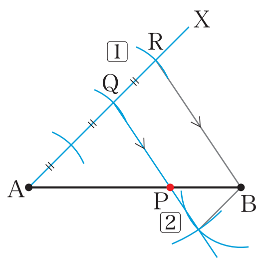
すなわち，直線PQは直線ABに平行である。

m，n を正の整数とすると，与えられた線分を $m : n$ に内分する点は，次のような作図によって求めることができる。

例 2　線分ABが与えられたとき，線分ABを2：1に内分する点Pを作図する手順を考えてみよう。

$\boxed{1}$　右の図のように，半直線AXを引き，AX上に2点Q，Rを AQ：QR = 2：1 となるようにとる。

$\boxed{2}$　点Qを通り，直線RBに平行な直線を引き，線分ABとの交点をPとする。



このとき，RB // QP であるから

$$AP : PB = AQ : QR = 2 : 1$$

よって，点Pは線分ABを2：1に内分する点である。

問 2　与えられた線分ABについて，次の点を作図することによって求めよ。

(1)　線分ABを1：3に内分する点

(2)　線分ABを2：3に内分する点

→ p.133 問題13, 14

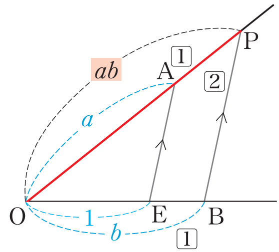
2　長さの作図

積の長さの作図

長さ 1，a，b の線分が与えられたものとする。このとき，積 ab を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

$\boxed{1}$　右の図のように，$\mathrm{OE}=1$，$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OB}=b$ となる点 O，E，A，B をとる。

$\boxed{2}$　点 B を通り，直線 EA に平行な直線を引き，直線 OA との交点を P とする。



このとき，$\mathrm{OE}:\mathrm{OB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OP}$ より

$$1:b=a:\mathrm{OP}$$

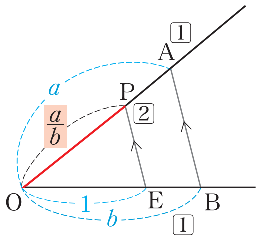
すなわち，$\mathrm{OP}=ab$ である。

商の長さの作図

長さ 1，a，b の線分が与えられたものとする。このとき，商 $\dfrac{a}{b}$ を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

$\boxed{1}$　右の図のように，$\mathrm{OE}=1$，$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OB}=b$ となる点 O，E，A，B をとる。

$\boxed{2}$　点 E を通り，直線 BA に平行な直線を引き，直線 OA との交点を P とする。



このとき，$\mathrm{OE}:\mathrm{OB}=\mathrm{OP}:\mathrm{OA}$ より

$$1:b=\mathrm{OP}:a$$

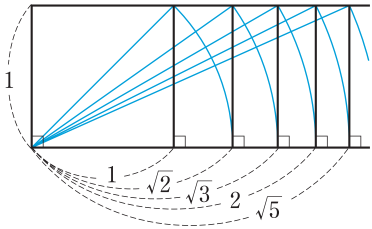
すなわち，$\mathrm{OP}=\dfrac{a}{b}$ である。

問 3　右の図において，OE の長さを 1 とするとき，上の方法によって，長さ $\dfrac{4}{3}$ の線分を作図せよ。

平方根の長さの作図

長さ1とaの線分が与えられたものとする。このとき，$\sqrt{a}$ を長さとする線分を作図する手順を考えてみよう。

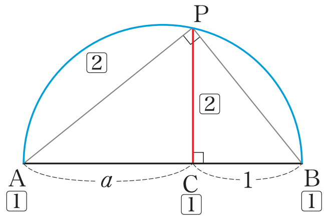
aが簡単な自然数のときには，三平方の定理を利用して，右の図のように，$\sqrt{a}$ を長さとする線分を作図することができる。



一般に，$\sqrt{a}$ を長さとする線分は次のような手順によって作図することができる。

$\boxed{1}$　右の図のように，同一直線上に，$AC=a$，$CB=1$ となる3点A，C，Bをとる。

$\boxed{2}$　ABを直径とする円をかき，点Cを通り直線ABに垂直な直線との交点をPとする。



このとき，△ACPと△PCBにおいて

$$\angle ACP = \angle PCB = 90^\circ$$
$$\angle APC = 90^\circ - \angle CPB = \angle PBC$$

したがって，$\triangle ACP \backsim \triangle PCB$ である。

ゆえに　　$AC : CP = CP : CB$

すなわち　$CP^2 = AC \cdot CB = a \cdot 1 = a$

よって　　$CP = \sqrt{a}$

問4　長さ1の線分を定めて，上の方法により，$\sqrt{5}$ の長さの線分を作図せよ。

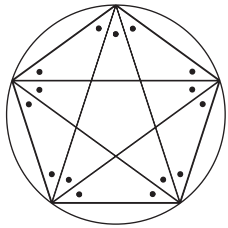
→ p.133 問題16

問5　長さ1の線分を定めて，$3-\sqrt{2}$ の長さの線分を作図せよ。

参考　正五角形の作図

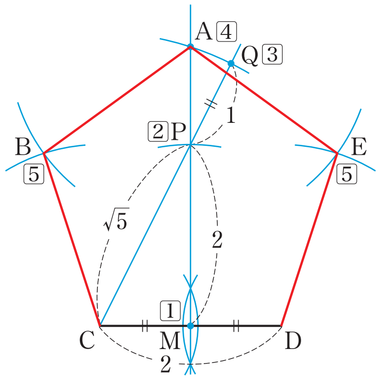
これまでに学んだことを利用して，正五角形を作図してみよう。

１辺の長さを１とする正五角形の対角線の長さは $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であることが知られている。



よって，長さの比が $1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるような２つの線分が作図できれば，正五角形は作図できる。

例 1　１辺が２，対角線の長さが $1+\sqrt{5}$ である正五角形を作図する手順を考えてみよう。



1　長さ２の辺 CD を定め，CD の垂直二等分線と CD の交点をＭとする。

2　CD の垂直二等分線上に，PM = CD となるように点Ｐをとる。

3　CP の延長上に PQ = CM となるように点Ｑをとる。

4　点Ｃを中心とする半径 CQ の円と CD の垂直二等分線の交点をＡとする。

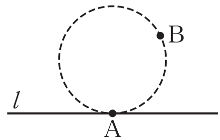
このとき，$CP=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$CA=CQ=1+\sqrt{5}$ である。
したがって，点Ａは正五角形の頂点の１つである。

5　BA = BC = CD となる点Ｂと，EA = ED = CD となる点Ｅを AM の反対側にとって結ぶと，正五角形 ABCDE ができる。

問 1　実際に正五角形を作図せよ。

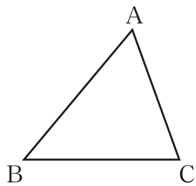
問　題

10　直線 l 上の点Aにおいて l に接し，l 上にない点Bを通る円を作図する手順を書け。

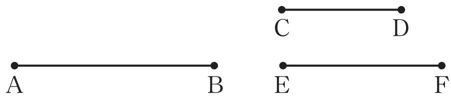


11　右の図の線分 AB を斜辺とし，辺 AC が線分 AP と長さが等しくなるような直角三角形 ABC を作図せよ。

12　与えられた △ABC の内接円を作図せよ。



13　右の図の線分 AB を，与えられた線分の長さの比 CD：EF に内分する点P を作図することによって求めよ。



14　与えられた線分 AB について，次の点を作図することによって求めよ。

(1)　線分 AB を 4：1 に外分する点P

(2)　線分 AB を 1：4 に外分する点Q

15[†]　次の大きさの角を作図せよ。

(1)　60°　　(2)　150°　　(3)　15°

16　長さ a，b の線分が与えられたとする。このとき，縦の長さ，横の長さがそれぞれ a，b の長方形と等しい面積をもつ正方形を作図せよ。