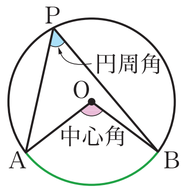
2 節 円の性質

1 円周角の定理

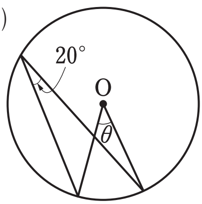
中学校では，次の **円周角の定理** とその逆について学んだ。

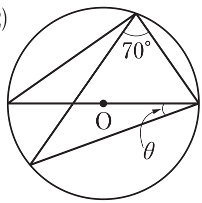
円周角の定理

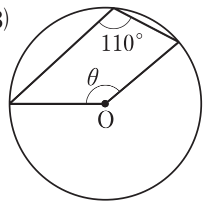
定理　1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。



問 1　下の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

(1)


(2)


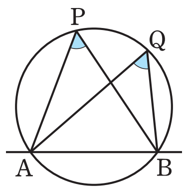
(3)


円周角の定理の逆

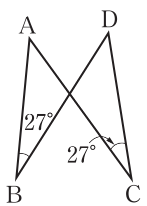
定理　4 点 A，B，P，Q について，P，Q が直線 AB に関して同じ側にあって

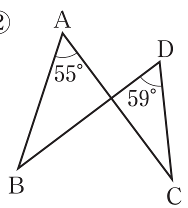
$$\angle APB = \angle AQB$$

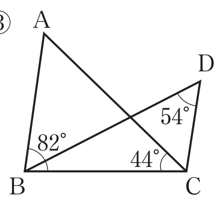
ならば，この 4 点は同一円周上にある。



問 2　次のうち，4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるものはどれか。

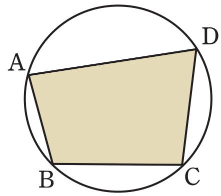
①


②


③


2 円に内接する四角形

四角形の4頂点が1つの円周上にあるとき，その四角形は円に **内接する** という。三角形は必ず円に内接するが，四角形は円に内接するとは限らない。



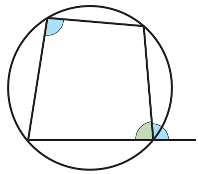
円に内接する四角形について，次の定理が成り立つ。

円に内接する四角形

定理　円に内接する四角形では

1　対角の和は 180° である。

2　外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。



証明

1　円に内接する四角形を ABCD，$\angle A=\alpha$,　$\angle C=\beta$ とする。

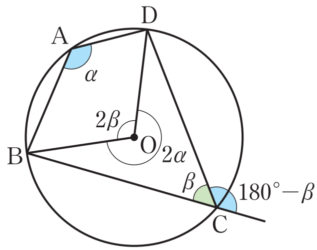
円周角の定理により，

弧 BCD に対する中心角は 2α,

弧BAD に対する中心角は 2β となる。

$2\alpha+2\beta=360^\circ$ より　$\alpha+\beta=180^\circ$

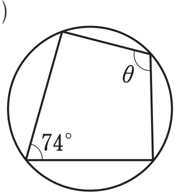
したがって，1 が成り立つ。



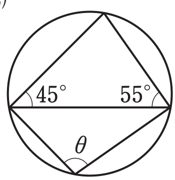
2　1 より，$\alpha=180^\circ-\beta$ であるから，∠C の外角は ∠A に等しい。

問 3　下の図において，角 θ を求めよ。

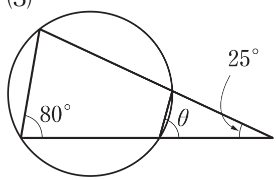
(1)



(2)



(3)



→ p.126 問題6

前ページの定理は，その逆も成り立つ。

四角形が円に内接する条件

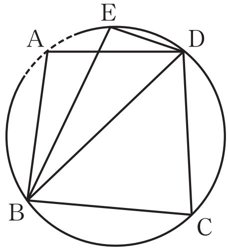
定理　次の $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ のいずれかが成り立つ四角形は円に内接する。

$\boxed{1}$　１組の対角の和が $180°$ である。

$\boxed{2}$　１つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しい。

証明　$\boxed{1}$　四角形 ABCD において，$\angle A + \angle C = 180°$ とする。

△BCD の外接円をかき，BD に関して C と反対側の円周上に点 E をとる。



四角形 BCDE は円に内接するから

$$\angle C + \angle BED = 180°$$

一方，仮定より

$$\angle C + \angle BAD = 180°$$

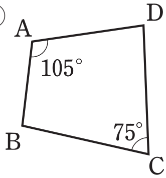
よって，$\angle BED = \angle BAD$ となり，円周角の定理の逆により，４点 B，D，A，E は同一円周上にある。

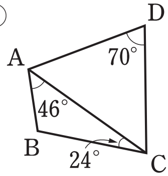
ここで，△BDE の外接円は △BCD の外接円でもあるから，４点 A，B，C，D は同一円周上にあることになり，四角形 ABCD は円に内接する。

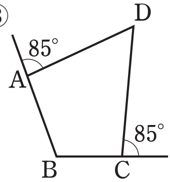
$\boxed{2}$　四角形 ABCD において，∠C の外角が，∠C の対角 ∠A に等しいとすると，$\angle A = 180° - \angle C$ が成り立つ。

このとき，$\angle A + \angle C = 180°$ となり，$\boxed{1}$ の場合に一致する。

問 4　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか。

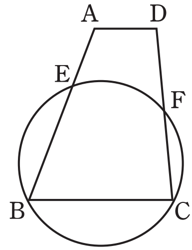
①


②


③


例題 1　四角形が円に内接する条件

AD // BC である台形 ABCD がある。この台形の頂点 B，C を通る円が，点 E，F で辺 AB，CD とそれぞれ交わるとする。
このとき，4 点 A，D，E，F は同一円周上にあることを証明せよ。



証明　四角形 BCFE は円に内接するから

$\angle B = \angle EFD$　……①

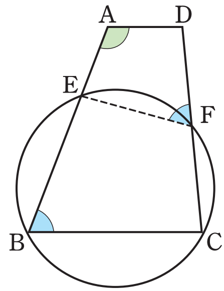
また，AD // BC より

$\angle B + \angle A = 180^\circ$　……②

①，② より

$\angle EFD + \angle A = 180^\circ$

よって，四角形 AEFD の 1 組の対角の和が 180° であるから，
四角形 AEFD は円に内接する。
したがって，4 点 A，D，E，F は同一円周上にある。

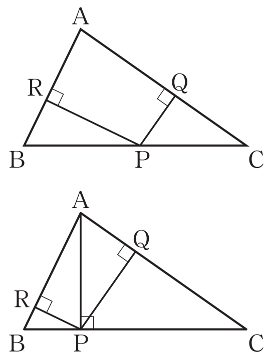


問 5　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R をとり，PQ ⊥ CA，PR ⊥ AB とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　4 点 A，R，P，Q は同一円周上にあることを証明せよ。

(2)　点 P が AP ⊥ BC を満たすとき，4 点 B，C，Q，R は同一円周上にあることを証明せよ。

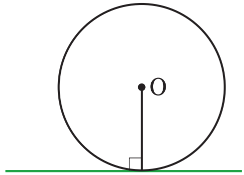
→ p.126 問題7



3　接線と弦のつくる角

円の接線

円の接線が接点を通る半径に垂直であることは中学校で学んだ。

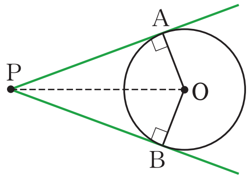


ある円に対して，円の外部の点からは 2 本の接線が引ける。このとき，次の定理が成り立つ。

接線の長さ

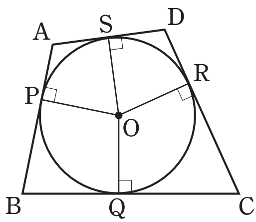
定理　円の外部の 1 点 P からその円に引いた 2 本の接線において，点 P から 2 つの接点 A，B までの距離は等しい。

すなわち　　$PA = PB$



円外の点から接点までの距離を **接線の長さ** という。

例 1　右の図のように，四角形 ABCD の 4 辺が，P，Q，R，S で円 O に接しているとき，2 組の対辺の長さの和が等しいことを示してみよう。



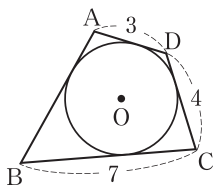
$$AP = AS,\ BP = BQ,$$
$$CQ = CR,\ DR = DS$$

であるから

$$AB + DC = (AP + BP) + (DR + CR) = (AS + BQ) + (DS + CQ)$$
$$= (AS + DS) + (BQ + CQ) = AD + BC$$

問 6　右の図のように，四角形 ABCD の 4 辺が円 O に接しているとき，辺 AB の長さを求めよ。

→ p.126 問題8

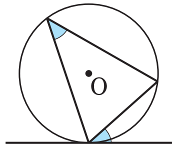


接線と弦のつくる角

円の接線と接点を通る弦のつくる角について，次の定理が成り立つ。

接線と弦のつくる角

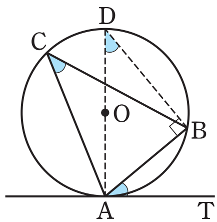
定理 円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



証明 右の図のように，円Oの点Aにおける接線をAT，Aを通る弦をABとして，∠BATが鋭角のとき ∠BAT = ∠ACB を証明する。

直径ADを引くと，∠DATは直角であるから

$$\angle BAT = 90^\circ - \angle DAB$$



一方，ADは直径であるから，∠ABDも直角であり

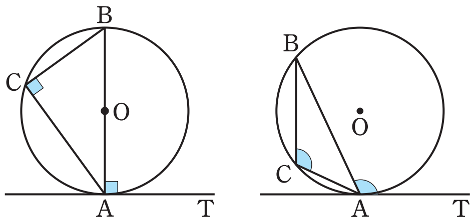
$$\angle ADB = 90^\circ - \angle DAB$$

よって $\angle BAT = \angle ADB$

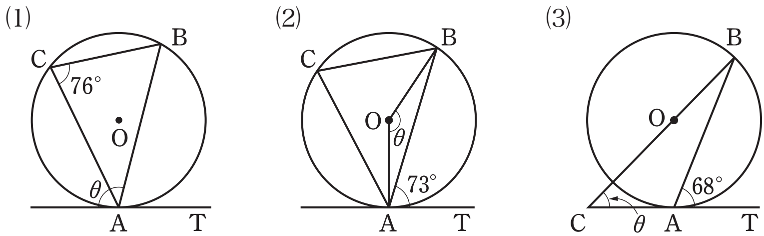
∠ACBと∠ADBはいずれも弧ABに対する円周角であるから

$\angle ACB = \angle ADB$ よって $\angle BAT = \angle ACB$

∠BATが直角，鈍角の場合も同様に定理は成り立つ。



問 7 下の図において，ATは円Oの接線，Aは接点である。角θを求めよ。



4　方べきの定理

点Pと円Oが与えられたとき，Pを通る2直線と円Oの4つの交点について考えてみよう。

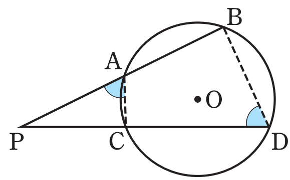
点Pとこれらの点の間の距離には，次の **方べきの定理** が成り立つ。

方べきの定理 (1)

定理　点Pを通る2直線が，円Oとそれぞれ2点A，Bと2点C，Dで交わるとき

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

証明　(i)　点Pが円Oの外部にあるとき



△PACと△PDBにおいて，

円に内接する四角形の定理により

$$\angle PAC = \angle PDB$$

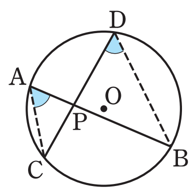
また，∠Pは共通である。

したがって　　$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$

よって　　$PA : PD = PC : PB$

すなわち　　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

(ii)　点Pが円Oの内部にあるとき



△PACと△PDBにおいて，

円周角の定理により

$$\angle PAC = \angle PDB$$

また，対頂角は等しいから

$$\angle APC = \angle DPB$$

したがって　　$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$

よって　　$PA : PD = PC : PB$

すなわち　　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

図形の性質

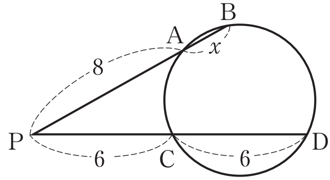
例 2　右の図において，AB の長さ x を求めてみよう。

方べきの定理により

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

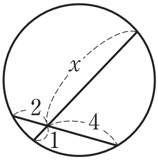
よって　　$8(x+8) = 6(6+6)$

これより　　$x = 1$

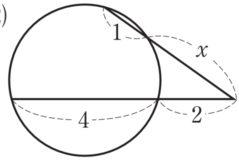


問 8　下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)



方べきの定理 (2)

定理　点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A，B で交わり，もう一方が点 T で接するとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$

証明　T と A，T と B を結ぶ。△PTA と △PBT において，

接線と弦のつくる角の定理により

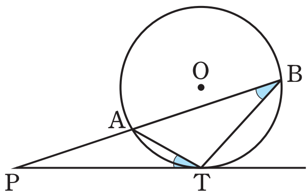
$$\angle PTA = \angle PBT$$

また，∠P は共通である。

したがって　　$\triangle PTA \backsim \triangle PBT$

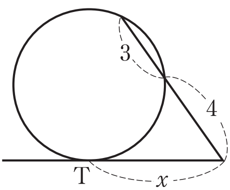
よって　　$PA : PT = PT : PB$

すなわち　　$PA \cdot PB = PT^2$

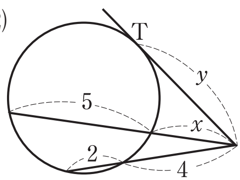


問 9　下の図において，x，y を求めよ。ただし，T は接点とする。

(1)



(2)



方べきの定理(1)は，その逆も成り立つ。

方べきの定理(1)の逆

定理　2つの線分AB，CD，またはそれぞれの延長が1点Pで交わっているとき，PA・PB＝PC・PD ならば，4点A，B，C，Dは同一円周上にある。

証明　PA・PB＝PC・PD より

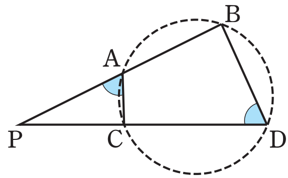
$$PA : PD = PC : PB$$

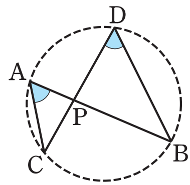
また，∠APC＝∠DPB であるから

$$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$$

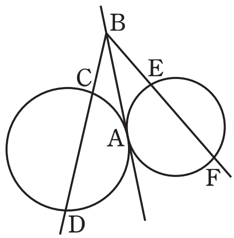
よって　∠CAP＝∠BDP

したがって，4点A，B，C，Dは同一円周上にある。





問10　2つの円が点Aで同じ直線に接している。この直線上のAと異なる点Bを通る2本の直線と，2円との2つの交点をそれぞれC，DおよびE，Fとする。このとき，4点C，D，E，Fは同一円周上にあることを証明せよ。



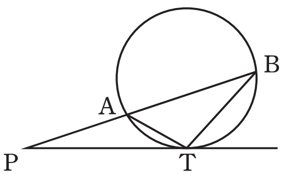
方べきの定理(2)についても，その逆は成り立つ。

方べきの定理(2)の逆

定理　一直線上にない3点A，B，Tと線分BAの延長上の1点をPとするとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$

が成り立つならば，PTは3点A，B，Tを通る円に接する。



図形の性質

5　2つの円

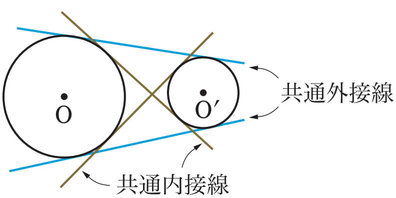
半径の異なる2つの円の位置関係については，右の図のように5通りの場合が考えられる。

$\boxed{2}$ のような場合には2円は **外接する** といい，$\boxed{4}$ のような場合には2円は **内接する** という。いずれの場合も2円は1点を共有しており，その点を **接点** という。このとき，接点は2つの円の中心を通る直線上にある。

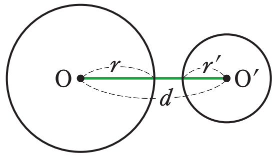
2つの円の位置関係は，それらの円の半径 r，r' と中心間の距離 d との関係で定まる。ただし，$r>r'$ とする。

$\boxed{1}$	$d>r+r'$	共有点はなし
$\boxed{2}$	$d=r+r'$	共有点は1個
$\boxed{3}$	$r-r'<d<r+r'$	共有点は2個
$\boxed{4}$	$r-r'=d$	共有点は1個
$\boxed{5}$	$r-r'>d$	共有点はなし

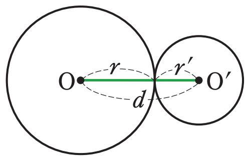
また，1本の直線が2つの円の両方の接線となることがある。このような接線を2円の **共通接線** という。共通接線には，その接線に対して同じ側に2円がある **共通外接線** と，反対側に2円がある **共通内接線** の2種類がある。



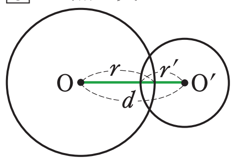
$\boxed{1}$　互いに外部にある



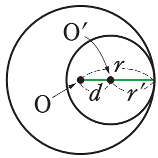
$\boxed{2}$　外接する



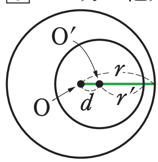
$\boxed{3}$　2点で交わる



$\boxed{4}$　内接する



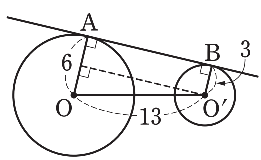
$\boxed{5}$　一方が他方を含む



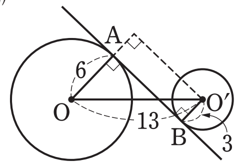
問11　共通接線の本数は，前ページの５つの位置関係でどのように変わるか。

問12　下の図において，直線 AB は２つの円の共通接線で，A，B は接点である。このとき，線分 AB の長さを求めよ。

(1)



(2)

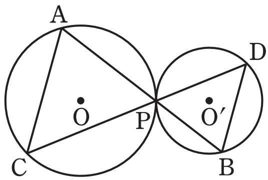


応用 例題 2　　２つの円

点Ｐで２つの円が外接している。点Ｐを通る２本の直線がそれぞれの円と点 A，B および C，D で交わるとき

$$AC \mathbin{/\!/} BD$$

となることを証明せよ。



証明　右の図のように，点Ｐを通る共通接線 TPT′ を引くと，接線と弦のつくる角の定理により

$$\angle ACP = \angle APT$$

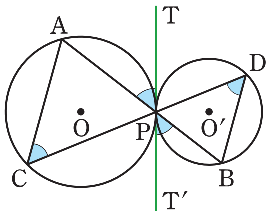
$$\angle BDP = \angle BPT'$$

ここで，$\angle APT = \angle BPT'$　であるから

$$\angle ACP = \angle BDP$$

よって，錯角が等しいから

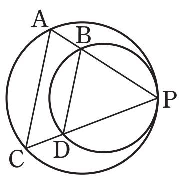
$$AC \mathbin{/\!/} BD$$



問13　例題２において，２つの円が点Ｐで内接しているときにも

$$AC \mathbin{/\!/} BD$$

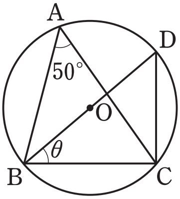
となることを証明せよ。



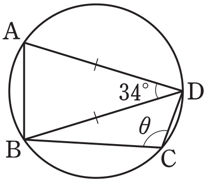
問題

6　下の図において，角 θ を求めよ。ただし，Oは円の中心である。
また，(2) では $AD=BD$ とする。

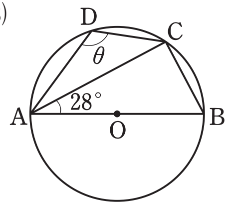
(1)



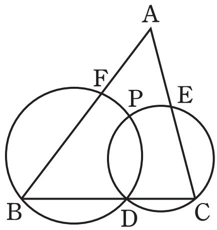
(2)



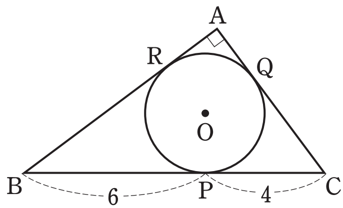
(3)



7　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F がある。3点 B，D，F および C，D，E を通る2つの円が，右の図のように，△ABC の内部の点 P で交わっているとき，4点 A，E，F，P は同一円周上にあることを証明せよ。

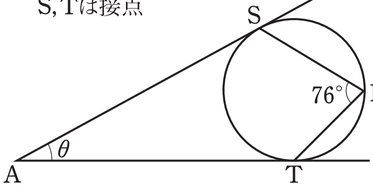


8　右の図において，円Oは直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。
$BP=6$，$CP=4$ のとき，円Oの半径を求めよ。



9　下の図において，角 θ を求めよ。

(1)　AS, ATは接線
S, Tは接点



(2)　Oは円の中心
ATは接線
Aは接点